LA SCIENCE DU CALCUL DES GRANDEURS EN GENERAL, OU LES ELEMENS DES...

Charles René Reyneau



LA SCIENCE
DU CALCUL
DES GRANDEURS EN GENERAL,
OU
LES ELEMENS
DES MATHEMATIQUES.

Par l'Auteur de l'Analyse Démontrée.



A VENISE,

CHEZ FRANÇOIS PITTERI.

MDCCXXXIX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE.



PREFACE,

OÙ L'ON DONNE UNE NOTION GENERALE DES MATHEMATIQUES:

On explique la methode qu'on y observe, qui conduit toujours à la verité; & l'on fait voir leur usage pour la perfection de l'esprit.

Notion generale des Mathematiques.

ON comprend sous le nom *des Mathematiques* toutes les Sciences qui ont pour objet les rapports des grandeurs.

On appelle *Grandeur* tout ce qui est capable du plus & du moins, c'est à dire d'augmentation & de diminution, tout ce qui pouvant être comparé à d'autres choses de même nature peut leur être égal, ou inégal, c'est à dire, plus grand ou plus petit, & qu'on peut leur égaler, quand il leur est inégal, en le diminuant de ce qu'il a de surplus, s'il est plus grand; ou en l'au-

gmentant de ce qui lui manque, s'il eſt plus petit.

Ainſi tout ce qui a des parties eſt une grandeur. Par exemple, les trois dimenſions de l'étendue, c'eſt à dire, les Longueurs, les Surfaces, les Soliditez des corps ſont des grandeurs : le Mouvement, la Vîteſſe, le Temps, les Poids, &c. ſont des grandeurs.

Les comparaiſons que l'on peut faire des grandeurs d'une même nature les unes avec les autres, en conſiderant combien de fois l'une contient l'autre, ou quelque partie déterminée de l'autre; ou en prenant garde de combien l'une ſurpaſſe l'autre; ces comparaiſons, dis-je, s'appellent *les rapports des grandeurs*. Par exemple, ſi le Soleil contient la Terre un million de fois, le rapport du Soleil à la Terre eſt celui d'un million à l'unité.

Dans les Mathematiques on ne conſidere pas ordinairement les grandeurs en elles-mêmes; on ſçait évidemment qu'elles ſont compoſées d'une infinité de parties qu'on ne ſçauroit épuiſer. On cherche à découvrir les rapports des unes aux autres. Par exemple, dans la Geometrie on ne s'arrête pas à examiner le nombre infini des petites parties dans leſquelles une figure peut être diviſée; on y cherche les rapports des lignes qu'on peut concevoir dans cette figure, les rapports qu'ont entr'elles & avec la figure entiere les differentes parties dont elle eſt compoſée; enfin les rapports tant des parties de la figure que de la figure même avec les autres figures & grandeurs auxquelles elle peut être comparée.

On peut conſiderer les rapports des grandeurs

ou dans les grandeurs particulieres & sensibles dans lesquelles ils se trouvent, ou en general en regardant ces rapports sans faire attention aux grandeurs particulieres dans lesquelles sont ces rapports. Par exemple, les rapports qui forment les accords de la Musique s'expliquent dans cette science par les rapports qui sont entre les longueurs de deux cordes égales en grosseur, & qui sont également tendues sur un Instrument. Si on les pince, ou si on les touche avec l'archet ; quand le rapport des longueurs est égal, leurs sons formeront l'*unisson* ; si le rapport des longueurs est celui de 1 à 2, elles feront entendre l'*octave* ; si ce rapport est comme 2 à 3, on entendra la *quinte* ; si ce rapport est comme 3 à 4, elles feront entendre la *quarte* ; & ainsi des autres accords. On peut aussi considerer ces rapports détachez, pour ainsi dire, par l'esprit de toute grandeur particuliere & sensible ; c'est à dire, sans penser à aucune grandeur particuliere. Il est évident que ces rapports des grandeurs regardez ainsi en general peuvent être appliquez à toutes les grandeurs particulieres.

Ces deux manieres de considerer les rapports des grandeurs font distinguer les Mathematiques en deux classes. La premiere, contient les Sciences Mathematiques qui ont pour objet les rapports des grandeurs en general, & il y en a trois, *la Geometrie, l'Arithmetique & l'Algebre*. Nous comprenons les deux dernieres sous le nom de *la Science du Calcul des grandeurs en general* : Elles sont les Sciences generales des Mathematiques, & elles en contiennent les élemens.

La ſeconde claſſe comprend les Sciences Mathematiques particulieres qui ont pour objet les rapports des grandeurs particulieres & ſenſibles ; & il y en a un grand nombre; ce qui vient non ſeulement du nombre des grandeurs ſenſibles, mais encore de ce qu'une même grandeur ſenſible (comme le mouvement, les rayons viſuels, &c.) peut fournir de la matiere à pluſieurs ſciences. On ne donnera ici qu'une legere idée de quelques-unes des plus utiles & des plus curieuſes.

Dans la *Geometrie pratique* on apprend à meſurer toutes les longueurs, les ſurfaces & les ſoliditez des corps ſenſibles; c'eſt à dire, à trouver leurs rapports avec leur unité ſenſible qui eſt un pied ou une toiſe; & à tracer en petit ſur un plan toutes les figures ſenſibles des corps, de façon que toutes les parties de la figure ſur le plan ayent en petit les mêmes rapports qu'ont en grand les parties correſpondantes de la figure terreſtre & ſenſible.

La Mécanique des ſolides enſeigne les rapports que doivent avoir les parties dont les machines les plus néceſſaires & les plus uſitées dans les Arts ſont conſtruites, afin que telle force qu'on voudra, puiſſe, par le moyen de ces machines, égaler ou ſurmonter telle autre force ou telle autre réſiſtance qui pourra ſe préſenter; c'eſt à dire, elle explique les rapports que doivent avoir les parties des machines pour être propres à augmenter ou à diminuer les degrez d'une force déterminée ſi petite & ſi grande qu'on voudra, ſelon tous les rapports dont on peut avoir beſoin dans l'uſage.

La Mécanique des fluides fait connoître les rapports

qui ſe peuvent trouver dans les differens degrez des forces mouvantes des fluides, dans leur mouvement, dans leur peſanteur, dans la vertu de reſſort des fluides qui en ont, dans la proprieté qu'ont quelques-uns de pouvoir être dilatez & condenſez. Elle explique les rapports des effets qui réſultent des differens degrez de ces forces, lorſque ces fluides agiſſent les uns ſur les autres, ou lorſqu'ils agiſſent ſur les corps ſolides en les pouſſant, en les preſſant, en leur réſiſtant, ou de quelqu'autre maniere que ce puiſſe être. Elle détermine auſſi les rapports des parties dont peuvent être conſtruites les machines utiles & curieuſes qui doivent ſervir pour employer les forces mouvantes des fluides à produire les differens effets dont on peut avoir beſoin.

On voit dans *la Muſique* les rapports qu'ont entr'eux les nombres des tremblemens ou vibrations de l'air faites en même temps, qui font entendre tous les accords & tous les tons de la Muſique; comme auſſi les rapports que doivent avoir les parties dont les Inſtrumens de Muſique ſont compoſez, pour les rendre propres à donner à l'air qui les environne (quand ils ſont pincez, ou touchez, ou frapez, ou quand ils ſont pouſſez par l'air qu'on y ſouffle) les tremblemens ou les vibrations qui font entendre les accords & tous les tons de la Muſique.

Il y a quatre ſciences ſur *les rayons viſuels*; c'eſt à dire, ſur les rayons de la lumiere, qui font appercevoir les objets. L'*Optique* découvre les rapports des parties de l'œil, & les rapports que les rayons viſuels, qui viennent des objets, reçoivent dans les

trois humeurs de l'œil, pour leur faire peindre au fond de l'œil les images claires & distinctes des objets ; & elle explique comment les differens rapports de ces images, des rayons visuels & des yeux font voir toutes les diversitez des objets, leur grandeur, leur éloignement, leur repos, leur mouvement, &c.

La Dioptrique détermine les rapports qui surviennent aux rayons visuels lorsqu'ils traversent differens milieux transparens, comme l'air, & l'eau, le verre, &c. Elle fait distinguer par ces differens rapports les sept especes de rayons contenus dans un même rayon de lumiere qui font appercevoir les sept couleurs primitives, le rouge, l'orangé ou couleur d'or, le jaune, le vert, le bleu, le bleu obscur, & le violet. Elle marque les figures qu'il faut donner aux verres pour rendre à notre vûe tant d'objets perdus par leur trop grand éloignement, ou par leur extrême petitesse : ce qui a donné le moyen d'enrichir la Physique & l'Astronomie de tant de nouvelles découvertes.

La Catoptrique examine les rapports de rayons visuels réfléchis par des surfaces polies comme celles des miroirs, & les rapports des differentes images que font appercevoir ces rayons refléchis suivant les differens rapports des differentes surfaces polies, suivant les rapports des situations des objets éclairez dont elles reçoivent les rayons de lumiere & les réfléchissent, & suivant les rapports des differentes situations de l'œil qui reçoit ces rayons réfléchis.

Dans *la Perspective* on suppose d'abord qu'on regarde au travers d'une glace transparente posée à un

un certain éloignement de l'œil tous les objets qui se présentent à la vûe, comme un Paysage & tout ce qu'il contient ; & l'on fait remarquer que les rayons visuels qui sont réfléchis par tous les points sensibles des objets qu'on apperçoit, & qui viennent en peindre les images au fond de l'œil, passent chacun par un point de cette glace ou de ce tableau qui est distingué de tous les autres points du même tableau. On suppose ensuite que chacun des points du tableau soit marqué par la couleur du rayon qui venant d'un point sensible de l'objet passe par ce point du tableau ; & que tout le tableau ayant la peinture des objets qu'on voyoit au travers, dont les traits sont exactement sur les mêmes points du tableau par où passoient les rayons des objets ; que le tableau, dis-je, devienne opaque, sans que celui qui regardoit les objets en soit averti ; il s'imaginera voir encore les objets en eux-mêmes. On tire de ces deux suppositions les regles qu'on doit suivre dans la peinture des objets pour y placer tous les traits dans les rapports qui leur conviennent, suivant les éloignemens où les objets & l'œil peuvent être du tableau ; afin que celui qui regarde le tableau à une certaine distance, s'imagine voir en eux-mêmes les objets dont il ne voit que la peinture.

Dans l'*Astronomie* on fait d'abord considerer les mouvemens qui paroissent dans les Astres, & l'on fait distinguer les mouvemens qui paroissent leur être communs d'avec ceux qui paroissent propres & particuliers à chacun des Astres. Ensuite on fait imaginer dans le monde, qu'on regarde comme

un globe, les cercles où se font les revolutions communes des Astres, & les cercles où se font leurs révolutions particulieres; on fait aussi imaginer les lignes qui servent d'essieux aux cercles des révolutions des astres, les points qui sont les extrêmitez de ces essieux, & qui sont *les poles* de ces cercles; comme aussi les points où le cercle de la révolution propre du Soleil, qu'on nomme l'*Ecliptique*, coupe le plus grand des cercles des révolutions communes qu'on nomme l'*Equateur*; & de plus les points où les cercles des révolutions propres des planettes coupent l'Ecliptique. On fait imaginer les mêmes cercles, leurs essieux, leurs poles, & leurs points d'intersection sur la Terre, sur le Soleil & sur les Planettes qu'on regarde comme des globes. C'est par rapport à ces cercles, à ces lignes & à ces points, regardez comme des termes fixes, qu'on distingue tous les rapports de tous les astres & de tous les points du Ciel, tant comparez les uns aux autres que comparez à la Terre: c'est par ces termes regardez comme fixes qu'on distingue de même les rapports de toutes les parties du globe terrestre, composé de la Terre & de la Mer, les unes avec les autres, & leurs rapports avec tous les corps celestes; & c'est de-là que se forme *la Geographie*.

Après cela on détermine, par le moyen des observations faites dans toute l'exactitude possible, avec le secours de la Geometrie & du calcul, les rapports qu'ont les corps celestes dans leurs mouvemens, dans les temps employez tant dans leurs révolutions entieres que dans toutes les parties de leurs révolutions, dans leurs distances, soit de la

terre, ſoit les uns des autres; dans leurs groſſeurs; dans les comparaiſons des temps des revolutions des planettes avec leurs diſtances du Soleil qui eſt comme le centre de leurs mouvemens; en un mot, on détermine tous les rapports utiles que peuvent avoir les Aſtres, & qu'on peut découvrir par les obſervations. On forme enfin, ſur ces découvertes, des Regles fixes pour trouver exactement dans tous les momens, ſoit de l'avenir ſoit du paſſé, tous les rapports des ſituations des Aſtres; pour prévoir les momens où ſe trouvant pluſieurs enſemble dans une même ligne avec la terre, les plus proches feront éclipſer les plus éloignez, ou bien l'ombre de la terre ſera éclipſer la Lune, & pour retrouver dans le paſſé les momens fixes de ces éclipſes.

C'eſt ſur ces Regles certaines que l'Egliſe a reformé le *Calendrier*, & l'a réduit à l'exactitude requiſe, afin que ſes Fêtes Mobiles ſe retrouvaſſent aux temps précis des mêmes Saiſons où l'Egliſe les fixa dès ſon commencement, dont elles s'étoient écartées dans la longue ſuite des temps, par les petits défauts des premieres ſupputations.

C'eſt à ces Regles que *la Chronologie* doit ce qu'elle a de plus aſſuré pour regler dans la ſuite des temps depuis le commencement du monde, & depuis les *Epoques* les plus remarquables, les places de tous les évenemens de l'Hiſtoire; afin d'ôter la confuſion des faits par la diſtinction exacte des temps où ils ſont arrivez; & pour réduire à l'uniformité les differentes manieres de compter les années qui ont été en uſage dans tous les âges du monde, & parmi toutes les differentes Nations.

On doit à ces mêmes Regles, en y joignant celles de la Perſpective, *la conſtruction des Globes Celeſtes, des Planiſpheres du Ciel, des Aſtrolabes* (qui ſont des aſtronomies, pour ainſi dire, parlantes aux yeux) dans l'exactitude, & dans la perfection où ils ſont à preſent.

C'eſt encore des principes de l'Aſtronomie que *la Gnomonique, ou l'Art de décrire les Cadrans*, a tiré les methodes de tracer ſur une ſurface plane ou courbe, avec le ſecours de la Geometrie, les lignes qui ſont les interſections où cette ſurface eſt coupée par les cercles que le Soleil paroît décrire, par ceux qui partageant ſa revolution journaliere en vingt quatre parties égales, la diſtinguent en heures; enfin par ceux qui peuvent avoir tel rapport qu'on voudra avec tous les points où ſe trouve le Soleil pendant une année, qui eſt le temps du mouvement propre qu'il nous paroît avoir: De maniere que ces lignes ont de tels rapports entr'elles, & avec tous les points du Ciel par où paſſe le Soleil, que le mouvement de l'ombre de la pointe d'un ſtile, poſé comme il le doit être ſur cette ſurface, fait diſtinguer l'heure qu'il eſt tant à l'endroit où l'on eſt, que par toute la terre, la ſaiſon où l'on eſt, le jour de l'année, le temps qui eſt paſſé depuis le lever du Soleil, ce qui en reſte juſqu'à ſon coucher, &c.

Les découvertes de l'Aſtronomie ont auſſi donné le moyen de faire en tous les endroits de la terre des obſervations exactes des éclipſes de la Lune, du Soleil, & des Satellites de Jupiter qui ſont plus frequentes, dont on s'eſt ſervi pour déterminer

avec exactitude les differens rapports des parties de la surface de la Terre & de la Mer; & pour marquer les positions justes sur *les Globes terrestres*, & *sur les Cartes Geographiques*, tant des parties de la Terre, que des parties de la Mer. Ce qui a déja réduit *la Geographie* à une plus grande exactitude, & ce qui donne lieu d'esperer qu'on la portera bientôt à sa derniere perfection.

La Marine tire de la Boussole, c'est-à-dire, de l'Eguille aymantée, le fond de ses pratiques. C'est par l'usage de la Boussole qu'elle fait discerner à tout moment la route que doit tenir le Vaisseau; & en comptant exactement le chemin qu'il décrit sur cette route, elle fait connoître à tout moment par les supputations, ou par les Cartes réduites, le lieu de la Mer où est le Vaisseau, c'est-à-dire, le rapport de ce point à toutes les parties de la Terre & de la Mer. Mais la variation de l'Eguille aymantée, les courans de la Mer, & la diversité perpetuelle, & souvent peu sensible de la force du vent, & la dérive du Vaisseau, font perdre la certitude de ces pratiques, par les raisons de douter qu'elles y apportent. La Marine la fait retrouver cette certitude, par le secours de l'Astronomie. Elle fait employer les observations des hauteurs du Soleil, & des autres Astres, & celles des éclipses des Satellites de Jupiter, quand cela est possible; & l'on s'assure par-là de la justesse de la route du Vaisseau, si les causes dont on vient de parler ne l'ont point alterée; ou bien l'on en corrige les défauts, s'il se trouve qu'elles y ayent produit des changemens.

Il est inutile de faire ici une plus longue énume-

ration des Sciences Mathematiques particulieres; on en peut tous les jours inventer de nouvelles; & il y en a de très-utiles dont la découverte s'est faite, pour ainsi dire, de notre temps. Les notions qu'on vient de donner des plus communes, suffisent pour faire appercevoir aux Commençans, que les Sciences Mathematiques generales qui donnent la connoissance de tous les rapports qui peuvent se trouver entre toutes les grandeurs prises en general, & qui apprennent les Methodes de developer ces rapports, de les comparer les uns avec les autres de toutes les manieres possibles: en un mot, de les déduire les uns des autres; que ces Sciences, dis-je, contiennent, pour ainsi dire, toutes les Sciences Mathematiques particulieres.

Pour distinguer ces Sciences generales les unes des autres, & pour donner une notion, on fera remarquer trois manieres d'exprimer les grandeurs en general, & tous leurs rapports.

La premiere, qui est le plus à la portée des sens, & de l'imagination, est de les exprimer par les lignes, & par les figures; car il n'y a point de rapport possible entre les grandeurs, qui ne puisse être exprimé par le rapport des lignes droites, puisqu'on peut prendre des lignes droites qui soient entr'elles en tel rapport qu'on voudra. On peut aussi imaginer des figures soit rectilignes, soit courbes, soit en partie rectilignes, & en partie courbes, dans lesquelles on peut concevoir des lignes droites terminées par la figure, qui ayent entr'elles tous les rapports possibles, & qui puissent representer tous les rapports des grandeurs. Enfin on peut compa-

rer les parties des figures, tant les unes avec les autres, qu'avec les figures entieres dont elles ſont les parties, & même les figures entieres les unes avec les autres; on peut, dis-je, les comparer de maniere qu'on y trouve tous les rapports poſſibles ; & par conſequent elles peuvent ſervir à repreſenter en general tous les rapports poſſibles des grandeurs.

La ſeconde maniere eſt d'employer les expreſſions des nombres. Pour le faire concevoir clairement, on fera remarquer que nous avons naturellement les idées claires & diſtinctes de l'unité, & de tous les nombres poſſibles compoſez de l'unité: que pour appliquer aux grandeurs particulieres & ſenſibles les idées des nombres, on prend dans chaque eſpece de grandeur une partie déterminée pour l'unité, par exemple, un pied dans les longueurs: un pied quarré dans les ſurfaces, un pied cubique dans les ſolides: une heure dans les temps: une livre dans les poids: un degré dans les mouvemens, & dans les viteſſes, & ainſi des autres. Cette unité, étant une grandeur, eſt diviſible à l'infini. Qu'on peut comparer toutes les grandeurs de differentes eſpeces chacune à ſon unité, de trois manieres. 1°. Il y en a qui contiennent exactement l'unité pluſieurs fois; & ces rapports des grandeurs à l'unité, ou ſi l'on veut, les grandeurs qui contiennent exactement l'unité pluſieurs fois, s'appellent *les Nombres entiers*. Les differentes Nations ſe ſont ſervis de differents caracteres pour exprimer ces Nombres entiers; mais dans les Mathematiques on ſe ſert *des chiffres* (qu'on a reçu des Arabes) pour les

exprimer. 2°. Il y a des grandeurs qui ne contiennent pas l'unité exactement plusieurs fois ; mais elles contiennent exactement une certaine partie déterminée de l'unité : par exemple, deux tiers de l'unité, trois quarts de l'unité, &c. Ces rapports des grandeurs aux parties déterminées de l'unité qu'elles contiennent, ou, si l'on veut, les grandeurs qui ne contiennent pas exactement l'unité, mais quelque partie de l'unité, se nomment simplement *rapports*, on les nomme aussi *fractions* ; on les appelle encore *des nombres rompus*. On les exprime ces rapports, ou ces fractions, par deux nombres posez l'un sur l'autre, & separez par une ligne, de cette maniere, $\frac{2}{3}$ (deux tiers), $\frac{3}{4}$ (trois quarts) &c. Le nombre d'enbas marque en combien de parties égales l'unité est divisée ; & celui d'enhaut, combien la fraction contient de ces parties de l'unité. Dans la fraction $\frac{2}{3}$ (deux tiers), 3 marque que l'unité est divisée en trois parties égales, ou en tiers ; & 2 exprime que cette fraction contient deux de ces tiers. 3°. L'unité materielle & divisible peut être conçûe divisée en tel nombre de parties égales qu'on voudra, & cela en allant de plus petites en plus petites, sans aucune fin. En quelque nombre de petites parties égales qu'on puisse concevoir l'unité divisée, il y a des grandeurs qui étant comparées avec l'unité, ne contiennent jamais exactement une de ces parties égales, quelque petites qu'elles soient ; mais elles contiennent toujours, outres ces petites parties égales, un petit reste ; & quelque supposition que l'on fasse, que ces petites parties de l'unité soient elles-mémes divisées de plus petites

petites en plus petites ſans fin, il arrivera toujours que ces grandeurs ne contiendront jamais exactement ces plus petites parties égales de l'unité, un certain nombre de fois; mais il y aura toujours un petit reſte moindre que l'une de ces parties égales. (On le démontrera dans la ſcience du Calcul.) Ces grandeurs n'ont donc aucune meſure commune avec l'unité, & on nomme, à cauſe de cela, leurs rapports avec l'unité, *des rapports incommenſurables*, ou ſi l'on veut, on nomme ces grandeurs, *des grandeurs incommenſurables:* on leur donne des expreſſions propres qu'il ſeroit inutile de marquer ici, où elles cauſeroient de la difficulté aux Commençans. Or ces trois ſortes de rapports des grandeurs avec l'unité, comprennent tous les rapports poſſibles. On peut les concevoir en general, ſans penſer aux grandeurs particulieres & ſenſibles. Ainſi on peut exprimer par leur moyen tous les rapports des grandeurs en general.

La troiſiéme maniere d'exprimer les grandeurs en general, & tous leurs rapports, eſt de marquer les grandeurs & leurs rapports, par les lettres de l'alphabet, ce ſont les caracteres les plus ſimples & les plus familiers. Cette maniere eſt la plus generale de toutes. On peut repreſenter par une lettre tous les nombres entiers, tous les nombres rompus, toutes les grandeurs incommenſurables, en ſuppoſant que notre eſprit peut ſubſtituer ſucceſſivement à la place de cette lettre, tous les nombres entiers & rompus, & toutes les grandeurs incommenſurables. On peut repreſenter de même par des lettres toutes les lignes, & toutes les

figures poſſibles, & tous leurs rapports, en ſuppoſant par notre eſprit toutes ces lignes & leurs rapports, & toutes ces figures avec leurs rapports, ſubſtituées les unes après les autres à la place de ces lettres par leſquelles notre eſprit les apperçoit toutes repreſentées. On peut de même concevoir toutes les grandeurs particulieres & ſenſibles, avec tous leurs rapports, repreſentées par les lettres. Ainſi tout ce que l'on démontre par ces expreſſions litterales, & tout ce qu'elles font découvrir, convient neceſſairement à toutes les grandeurs.

Ces trois manieres d'exprimer les grandeurs en general, & tous leurs rapports, ſont ſeparement l'objet des trois ſciences generales des Mathematiques.

La Geometrie a pour objet les grandeurs en general, & tous leurs rapports, repreſentez par les lignes & par les figures; ou plutôt, quoique la Geometrie ſemble avoir pour objet particulier, les rapports des trois dimenſions du corps, des longueurs, des ſurfaces, & des ſolides; comme ces rapports peuvent auſſi exprimer tous les rapports de toutes les grandeurs particulieres & ſenſibles, la Geometrie eſt une ſcience generale des Mathematiques, qui doit préceder les Mathematiques particulieres & ſenſibles, & elle les contient éminemment.

L'Arithmetique a pour objet les grandeurs en general, & tous leurs rapports repreſentez par les expreſſions des nombres, c'eſt à dire, toutes les grandeurs numeriques.

L'Algebre a pour objet toutes les grandeurs, & tous leurs rapports repreſentez de la maniere la

plus generale qu'on puiſſe concevoir par les lettres de l'alphabet; ce qui les fera nommer *les grandeurs litterales*.

Ces deux ſciences l'Arithmetique & l'Algebre, ont une liaiſon naturelle; elles enſeignent à faire des operations ſemblables, l'une ſur les grandeurs numeriques, l'autre ſur les litterales; elles ſe prêtent des ſecours & des éclairciſſemens reciproques. La grande univerſalité de l'Algebre ſurprend d'abord l'eſprit des Commençans, & le tient comme en ſuſpens. Ils ne ſçavent à quoi ils doivent déterminer ces idées ſi generales des expreſſions de l'Algebre. L'Arithmetique les fixe par les idées immuables des nombres qui ſont familiers à tout le monde. Ils peuvent d'abord ſuppoſer des nombres entiers déterminez à la place des lettres, & enſuite en ſuppoſer d'autres tels qu'ils voudront; & la verité generale que leur preſente l'expreſſion litterale, ſe trouvera convenir à tous ces nombres. Après cela ils peuvent ſuppoſer des nombres rompus tels qu'il leur plaira, au lieu des lettres de l'expreſſion generale, puis des grandeurs incommenſurables quelles qu'elles puiſſent être; & voyant toujours que la verité generale de l'expreſſion litterale ſe trouve convenir à toutes ces grandeurs dont le nombre eſt infini; ils s'éleveront enfin à l'entiere univerſalité des expreſſions litterales, & ils s'accoutumeront à voir toutes les grandeurs poſſibles avec leurs rapports, repreſentées par les expreſſions litterales; & que les reſolutions que fait découvrir le calcul des grandeurs litterales, ſont generales, & conviennent à toutes les grandeurs

possibles. Enfin ces deux Sciences mêlent souvent ensemble leurs expressions dans les mêmes operations. Ces raisons ont porté à ne faire qu'une même Science generale de ces deux là, à laquelle on donne le nom de *La science du Calcul des grandeurs en general*. On y explique à fond l'une & l'autre; on a tâché de n'y oublier aucun des principes, ni aucune des operations de l'une & de l'autre. C'est par cette Science qu'on doit commencer à apprendre les Mathematiques. Elle en contient les Elemens, ou plutôt elle les comprend toutes par son universalité, & elle donne la Methode la plus simple, la plus facile, la plus sûre, & qui est la plus proportionnée à l'étendue bornée de l'esprit, pour les apprendre avec plaisir, comme si on les découvroit soi-même. En voici une notion en peu de mots.

On donne dans cette Science des expressions, par le moyen des chiffres, & par le moyen des lettres, aux grandeurs considerées en general, & à tous les rapports qu'elles peuvent avoir entr'elles. On en donne aux grandeurs entieres, aux grandeurs rompues, & aux grandeurs incommensurables, qui les distinguent les unes des autres. Cependant l'universalité des expressions litterales est cause que les expressions litterales des grandeurs entieres, & toutes les operations faites sur ces expressions, conviennent aussi aux grandeurs rompues, & aux grandeurs incommensurables; mais les differens degrez de composition des rapports des grandeurs, & les differentes comparaisons qu'il faut faire des uns avec les autres, obligent aussi de donner des expressions propres aux grandeurs rompues, & aux gran-

deurs incommenſurables. On enſeigne enſuite à faire ſur ces trois ſortes d'expreſſions, toutes les operations qu'on nomme addition, ſouſtraction, multiplication, diviſion, formation des puiſſances, extraction des racines, &c. Ces operations ſe nomment auſſi du nom commun de *Calcul* des grandeurs. Les regles de ce Calcul ſont ſi ſûres, ſi juſtes, & ſi lumineuſes, que pourvû qu'on obſerve l'ordre & la juſteſſe qu'elles preſcrivent, en quelque quantité que puiſſent être les grandeurs ſur leſquelles on opere, & quelque compoſition qu'il y ait dans leurs rapports, on voit clair dans tout le chemin que l'on ſuit; on eſt aſſuré qu'on ne s'écarte point, & qu'on arrive à la fin avec une entiere certitude. Le Calcul litteral a cependant ce grand avantage ſur le Calcul numerique, qui eſt plus ſimple, plus facile, plus court, plus general, qu'il demande bien moins de temps, qu'il ménage tout autrement la capacité de notre eſprit, & qu'il augmente, pour ainſi dire, à l'infini l'étendue de ſa vue qui eſt ſi bornée, en lui préſentant ſous l'expreſſion la plus ſimple qu'on puiſſe imaginer une infinité d'objets. Mais ce qu'il faut principalement remarquer pour appercevoir le grand uſage du calcul des grandeurs en general par rapport aux découvertes des Mathematiques, c'eſt qu'il conſiſte en des ſignes arbitraires ordonnez par la Science du calcul à marquer tous les raiſonnemens dans l'ordre & dans la ſuite naturelle qu'ils doivent avoir entr'eux; à marquer, dis-je, tous les raiſonnemens clairs, diſtincts & ſuivis que doit faire notre eſprit, pour déduire des grandeurs connues & de leurs rapports connus, en quelque

quantité qu'ils puissent être, & de quelque degré de composition qu'ils soient, tous les rapports qui peuvent s'en déduire necessairement. Cela fait voir que celui qui employe le calcul fait par-là tous les raisonnemens naturels, exacts & dans l'ordre qu'ils doivent avoir, qu'on doit faire pour déduire des grandeurs & des rapports de ces grandeurs qui lui sont connus, les rapports qui s'en peuvent déduire necessairement. C'est ce qui a fait faire tant de progrès aux Mathematiques depuis qu'on y a employé le calcul: c'est ce qui y a fait faire tant de découvertes si utiles; c'est ce qui les a rendues si faciles, & ce qui en a ôté ce qu'elles avoient de rebutant, en les faisant apprendre avec le plaisir de les découvrir soi-même, à ceux qui se sont rendu le calcul familier, & qui en ont acquis l'habitude. Car c'est par les expressions litterales que fournit le calcul qu'on saisit un Problême ou une question sur toutes sortes de grandeurs generales & particulieres, & sur leurs rapports, avec toutes les conditions qui y entrent & qui la déterminent. Et ensuite sans partager la capacité de l'esprit par la vûe de la quantité des objets, & de la composition des rapports qui entrent dans la question, par la consideration de toutes les lignes ou de toutes les figures, souvent en grand nombre, qui peuvent entrer en la question, dont l'impression sensible occuperoit toute l'étendue de l'esprit, ou la plus grande partie, & feroit trouver la question embarassée & rebutante, quelqu'utilité qu'il y apperçût; sans, dis-je, toutes ces considerations fatigantes que cette methode rend inutiles, il suffit

de ne faire attention qu'au calcul, qui étant familier, laisse à l'esprit toute son étendue ; & l'appliquant, ce calcul, à l'expression de la question, la plume seule conduit directement à la résolution ; & si la question a plusieurs résolutions, elles viennent toutes se présenter. L'expression litterale de la résolution d'une question qu'on a découverte devient elle-même une Regle generale qui donne la résolution de toutes les questions semblables sur toutes sortes de grandeurs. Les résolutions litterales portent encore avec elles leur demonstration, sans qu'il en faille d'autres, qui ne serviroient qu'à faire voir évidemment par des raisonnemens suivis qu'on y est arrivé, & les raisonnemens exprimez par le calcul sont eux-mêmes très certains & très évidens par les démonstrations des Regles du calcul qu'enseigne la Science du calcul. Ces résolutions & l'expression de la question contiennent aussi tous les Corollaires qui en peuvent dépendre. On les en tire par le calcul, & l'on a le plaisir de voir que chaque trait de plume produit des découvertes. Il arrive même souvent qu'une seule expression litterale qui n'est composée que de peu de lettres qui ne feroient pas une ligne, contient une science entiere dont on a le plaisir de développer par le seul calcul toutes les parties les unes après les autres. Enfin l'universalité de cette Science a une si grande étendue, & l'art qu'elle donne de présenter à l'esprit une infinité d'objets differens sous une simple expression abregée, va si loin qu'il fait réduire, en plusieurs occasions, à une seule expression litterale très simple, un nombre infini d'autres expressions

litterales, dont chacune est elle-même une Regle generale pour des résolutions de Problêmes; & toutes ces expressions se tirent par le seul calcul de celle qui les représente toutes. On en verra des exemples dans le second Volume de la Science du calcul.

On explique & on démontre dans ce premier Volume tous les calculs des grandeurs entieres tant litterales que numeriques, des grandeurs rompues, & des grandeurs incommensurables, qu'il faut sçavoir pour apprendre ou pour découvrir soi-même les Mathematiques. On y explique aussi tout ce qu'il faut sçavoir des rapports simples & des rapports composez, & de toutes les differentes comparaisons qu'on peut faire des uns & des autres. Ce sont là les seuls principes ou les seules connoissances que suppose l'*Analyse démontrée*. Les Commençans pourront l'entendre sans y trouver aucune difficulté qui les arrête. Ils y verront que les calculs qu'ils auront appris dans ce premier Volume sont la clef qui ouvre l'entrée à toutes les découvertes.

Explication de la Methode qu'on observe dans les Mathematiques qui conduit toujours à la verité.

Les Mathematiques se sont toujours distinguées par leur certitude: Elles ne contiennent que des veritez sans aucun mélange d'opinion ni d'erreur. C'est une prérogative qui leur est propre de l'aveu de tout le monde, & elle ne leur a jamais été contestée. Cette certitude leur vient de deux causes. La

La premiere eſt qu'elles ne s'appliquent qu'à des objets dont on a des idées claires & diſtinctes ; car il n'y a pas d'objets dont on ait des idées plus claires & plus diſtinctes que celles que nous avons des nombres, des trois dimenſions de l'étendue, & de toutes les grandeurs dont on cherche à connoître les rapports dans les Mathematiques, & l'on peut toujours voir clair dans les déductions que l'on peut faire de ces rapports les uns des autres. La ſeconde cauſe de la certitude des Mathematiques eſt que l'on y ſuit toujours, ſans jamais s'écarter, une methode qui conduit infailliblement à la verité.

Pour faire clairement concevoir cette methode aux Commençans, & pour faire voir qu'elle conduit avec une entiere certitude à la verité les démarches de l'eſprit qui la ſuit, on leur fera faire attention aux démarches que fait notre eſprit dans la recherche de la verité.

Quand notre eſprit cherche à découvrir quelque verité, il s'applique aux objets qui en ſont le ſujet ; il les conſidere avec attention chacun en particulier ; & plus il s'applique, & plus ſon attention eſt forte ; plus auſſi ces objets s'approchent, plus ils lui paroiſſent clairs ; il en voit clairement toutes les faces ; il diſtingue l'une après l'autre toutes les choſes que ces objets renferment, & rien ne lui en échape.

Ces premieres démarches de l'eſprit dans la recherche de la verité, s'appellent de *ſimples perceptions*, ou de *pures perceptions*.

Après avoir apperçu clairement & diſtinctement les objets, il faut donner, pour ainſi dire, à chacun

ſa marque qui le diſtingue de tous les autres, & qui ſoit tellement liée à cet objet clairement apperçu, que quand cette marque ſe préſente, cet objet ſe préſente en même temps à notre eſprit ſous une vûe claire & diſtincte. Ces marques ſont d'elles-mêmes des ſignes arbitraires, mais elles deviennent des ſignes propres aux objets, & elles ſervent à les préſenter à l'eſprit par l'union qu'on en a faite à ces objets, & par l'habitude qu'on a acquiſe de les unir enſemble. Les paroles dont on ſe ſert pour déterminer un mot ou une autre marque à ſignifier un objet dont on a une idée claire & diſtincte, s'appelle *une définition*: en voici une: *Un nombre entier eſt celui qui contient exactement l'unité pluſieurs fois.*

2°. Notre eſprit après avoir conſideré attentivement les objets ſur leſquels il veut découvrir des veritez, il les compare les uns avec les autres, il en apperçoit par ſon attention les rapports; c'eſt à dire il voit clairement s'ils ſont égaux les uns aux autres, s'ils ſont inégaux; ſi les uns contiennent ou ne contiennent pas les autres, &c. Ce ſont ces rapports clairement apperçus entre les objets préſens à l'eſprit & comparez enſemble, qu'on appelle *des veritez*. Car puiſque ces rapports ſont clairement apperçus par l'eſprit, ils ſont tels qu'ils ſont apperçus, puiſque le neant ne ſçauroit être apperçu. Les veritez ſont les rapports réels entre les objets. L'erreur ou la fauſſeté n'eſt rien. La verité peut bien être apperçue, car elle eſt, c'eſt un rapport réel; mais l'erreur ou la fauſſeté ne ſçauroit être apperçue, car elle n'a aucune réalité, elle n'eſt rien, & le neant ne ſçauroit être apperçu; appercevoir

rien, & ne point appercevoir, c'est la même chose.

Quand notre esprit acquiesce aux rapports qu'il apperçoit ou qu'il s'imagine appercevoir, en jugeant que ces rapports sont tels qu'il les apperçoit, cet acquiescement de notre esprit s'appelle *un Jugement*; par exemple, notre esprit apperçoit le rapport d'égalité qui est entre 2 fois 2 & 4; il acquiesce à ce rapport, & il juge que ce rapport est vrai, en affirmant que 2 fois 2 sont 4. Ces Jugemens ou ces acquiescemens de notre esprit aux rapports qu'il apperçoit, sont les secondes démarches que fait notre esprit dans la recherche de la verité.

Il est bon de faire distinguer deux choses dans les secondes démarches de notre esprit: la premiere est la perception des rapports sans acquiescer encore à ces rapports, sans juger qu'ils sont vrais. Cette perception doit préceder les jugemens, & elle est une pure perception; la seconde chose est l'acquiescement à ces rapports. C'est dans l'acquiescement aux rapports que consiste, à proprement parler, le jugement ou la seconde démarche de notre esprit dans la recherche de la verité. Cette remarque fera distinguer la verité de l'erreur. Car ce qu'on apperçoit clairement, étant necessairément & réellement tel qu'il est apperçu, il ne peut y avoir d'erreur dans les pures perceptions; on ne sçauroit appercevoir que la verité, que ce qui est tel qu'il est apperçu. On ne sçauroit donc se tromper, c'est à dire on ne sçauroit tomber dans l'erreur, quand on n'acquiesce qu'à ce qu'on apperçoit clairement. L'erreur ne peut donc venir que de ce qu'on juge qu'on apperçoit, ce qu'on n'apperçoit

point; de ce que le jugement ſur un rapport précede la perception de ce rapport. Par exemple, ſi l'on juge qu'il y a un rapport d'égalité entre 2 fois 2 & 5, on tombe dans l'erreur, parceque ce jugement prévient la perception de l'eſprit; l'eſprit n'apperçoit point un rapport d'égalité entre 2 fois 2 & 5. Si donc on ne jugeoit d'un rapport qu'après l'avoir clairement apperçu, on ne ſe tromperoit point; & l'erreur ne vient que de ce qu'on juge d'un rapport qu'on n'a pas auparavant apperçu. C'eſt donc nous qui faiſons l'erreur en jugeant de nous-mêmes qu'il y a de certains rapports que notre eſprit n'a pas apperçu avant de porter notre jugement. Mais nous ne faiſons pas la verité, nous ne faiſons que l'appercevoir, & la découvrir telle qu'elle eſt en elle-même.

Les paroles dont on ſe ſert pour exprimer chacun de nos jugemens, s'appellent *une Propoſition*. En voici une. *12 contient 3 pris quatre fois*.

3°. Après que notre eſprit a comparé les objets de ſes perceptions les uns avec les autres, qu'il en a apperçu les rapports, & qu'il en a porté ſon jugement; pour avancer dans la recherche de la verité, il compare ces rapports mêmes les uns avec les autres, & en s'appliquant avec attention à ces comparaiſons des rapports, il apperçoit clairement les liaiſons qu'ils ont entr'eux: il voit que les uns ſe déduiſent neceſſairement des autres; & en ſuivant la perception qu'il en a, il déduit les rapports les uns des autres. Cette troiſiéme démarche de l'eſprit, par laquelle il déduit une verité d'une ou de pluſieurs autres dont il apperçoit qu'elle doit ſuivre

necessairement, s'appelle *un raisonnement*; en voici un. 3 pris quatre fois est égal à 12; 6 pris deux fois est aussi égal à 12. Par consequent 6 pris deux fois est égal à 3 pris quatre fois. La déduction que fait notre esprit de la troisiéme verité des deux autres dont elle est une suite necessaire, est un raisonnement.

On doit faire distinguer dans cette troisiéme démarche de l'esprit, comme on a fait dans la seconde, la pure perception de la suite necessaire qui se trouve entre un rapport & d'autres rapports dont il se déduit, d'avec la déduction que fait notre esprit de ce rapport en le tirant des autres, & en acquiesçant à cette déduction. Car notre esprit ne sçauroit se tromper en appercevant clairement les liaisons qui sont entre les rapports, & qu'on peut les déduire les uns des autres; puisque si cette liaison necessaire est apperçue clairement, elle est telle qu'elle est apperçue, elle est vraye; le neant ne sçauroit être apperçu. On ne tombe donc dans l'erreur en faisant des raisonnemens dans la recherche de la verité, que lorsque l'on déduit un rapport d'autres rapports avant d'avoir vû clairement que cette déduction est necessaire. L'action de l'esprit, par laquelle il fait cette déduction, & y acquiesce sans l'avoir apperçue clairement, est la cause de l'erreur, qui consiste en ce qu'il croit qu'un certain rapport est une suite necessaire d'autres rapports; & cependant dans la verité cette suite n'est point, & elle ne sçauroit être apperçue.

Pour rendre sensibles aux Commençans ces trois démarches de notre esprit dans la recherche de la

verité, on en va faire voir l'application à un exemple sur le mouvement des corps. On supposera qu'on veut découvrir comment on peut faire que deux boules sur un plan horizontal poli en allant en ligne droite l'une contre l'autre, se rencontrent avec des forces égales, ou avec des forces qui soient en tel rapport qu'on voudra.

1°. Notre esprit doit considerer avec attention l'idée des deux corps, en quoi consiste leur mouvement lorsqu'ils vont l'un contre l'autre; qu'est-ce qui fait la quantité de leur mouvement; comment un mouvement peut augmenter ou diminuer, être plus fort ou plus foible. Les connoissances de toutes ces choses conduiront à la resolution de la question.

On voit d'abord que chaque boule est un corps composé de parties de même nature, qu'on nomme à cause de cela *homogenes*; & l'assemblage ou le nombre de ces parties qui se meuvent toutes ensemble, se nomme *la masse* du corps.

Pendant qu'un corps ne change point de place, & qu'il conserve les mêmes rapports de proximité & de distance avec les corps qui l'environnent, l'esprit n'y voit aucun mouvement: Mais s'il change sans cesse de place, s'il change successivement les rapports de distance qu'il a avec les corps qui l'environnent, en un mot s'il est transporté d'un lieu en un autre en passant successivement par les milieux qui sont entre deux, l'esprit voit clairement que ce corps est en mouvement. Ainsi dans un corps en mouvement notre esprit n'y apperçoit que du transport, en ne faisant attention qu'à ce qui est dans un

corps en mouvement, & point du tout à la force exterieure qui lui donne le mouvement, dont la consideration seroit ici inutile. Notre esprit n'attache donc pas d'autre idée au terme de mouvement d'un corps, que l'idée de transport de ce corps.

L'esprit apperçoit encore clairement, que si un corps qui a parcouru une certaine longueur, comme dix toises en un certain temps comme deux minutes, venoit à parcourir une double longueur, comme 20 toises dans le même temps de deux minutes, il auroit dans le second cas le double du transport ou du mouvement qu'il avoit dans le premier cas. Ou bien encore, si le même corps avoit parcouru 10 toises dans le temps de deux minutes, & qu'il vint à parcourir ces 10 toises dans la moitie du temps, c'est à dire en une minute, l'esprit voit clairement qu'il auroit dans le second cas, le double du transport ou du mouvement qu'il avoit dans le premier cas.

La longueur du chemin que parcourt un corps par son mouvement ou par son transport, comparée au temps pendant lequel cette longueur est parcourue, est ce qu'on nomme *la vitesse*. Par exemple, si deux corps égaux se meuvent, & que l'un parcoure une plus grande longueur que l'autre en un même temps, il a plus de vitesse que l'autre. Comme encore si deux corps égaux parcourent la même longueur ou des longueurs égales, & que le temps que le premier employe à parcourir cette longueur, soit plus petit que le temps que le second employe à parcourir la même longueur, le premier a plus de vitesse que le second.

Notre esprit apperçoit donc clairement qu'il y a plus de transport, ou plus de mouvement dans un corps, lorsqu'il y a une plus grande longueur parcourue dans le même temps, ou bien lorsque la même longueur est parcourue en moins de temps; & que dans ces cas la vitesse du mouvement est plus grande.

Notre esprit voit encore clairement qu'en concevant la masse d'un corps qui se meut, partagée en une infinité de petites parties égales, chacune de ces parties égales a son transport ou son mouvement propre. Et comme on suppose que le corps se meut en ligne droite, le transport ou le mouvement de l'une des parties est égal au mouvement de chaque autre partie égale, & la vitesse du transport d'une partie est égale à la vitesse du transport de chaque autre partie. Ainsi on voit évidemment que plus il y a de parties dans un corps qui se meut en ligne droite, & plus il y a de mouvement.

2°. Après ces perceptions, notre esprit porte ces jugemens: Puisque le mouvement n'est que le transport d'un corps; plus il y a de transport, plus il y a de mouvement.

Plus il y a devitesse dans le transport d'un corps qui se meut, & plus son mouvement est grand.

Quand un corps se meut en ligne droite, la vitesse du transport de chacune des petites parties étant égale, la quantité totale du mouvement est la vitesse de chaque petite partie, repetée autant de fois, ou prise autant de fois que la masse contient de fois chaque partie; c'est ce qu'on nomme la vitesse multipliée par la masse.

La

La force d'un corps en mouvement n'eſt que la quantité de ſon mouvement, & ſuivant le jugement précedent, c'eſt la viteſſe de ſon tranſport multipliée par ſa maſſe.

3°. Après ces ſecondes démarches, notre eſprit n'a plus que cette troiſiéme à faire pour reſoudre la queſtion. Pour faire mouvoir deux corps l'un contre l'autre avec des forces égales, il n'y a qu'à donner à chacun une égale quantité de mouvement. Mais pour leur donner cette égale quantité de mouvement, il faut donner à chacun une viteſſe qui ſoit telle, que la viteſſe du premier corps étant multipliée par la maſſe du premier corps, le produit qui en viendra ſoit égal à celui qui naîtra de la viteſſe du ſecond multipliée par la maſſe du ſecond. D'où l'on conclut qu'il n'y a qu'à donner aux deux boules des viteſſes telles, que la viteſſe de chacune étant multipliée par ſa maſſe, il en reſulte un produit égal ; & les boules ſe rencontreront avec des forces égales.

Après cela il n'y a plus qu'à déterminer le rapport des maſſes des boules pour déterminer les viteſſes. Si, par exemple, elles ſont égales, il faut donner à chacune une égale viteſſe. Si l'une eſt double de l'autre, ou triple, ou quadruple, &c. il faut donner à la plus petite une viteſſe double, ou triple, ou quadruple, &c. de la viteſſe qu'on donnera à la plus grande.

Si l'on veut que les forces des deux boules qui ſe meuvent l'une contre l'autre ſoient en tel rapport qu'on voudra, par exemple, que l'une ſoit double, ou triple ou quadruple, &c. de l'autre, &

que les boules ſoient égales, il faut donner une viteſſe double, triple, &c. à celle qui doit avoir une force double, triple, &c.

Si les boules ſont inégales, il faut regler la viteſſe qu'on leur doit donner par rapport à leur maſſe, & par rapport au degré de force qu'on veut donner à chacune des boules: par exemple, ſi l'on veut qu'une boule, qui n'eſt que la moitié d'une autre, vienne rencontrer cette autre (qui a un degré de viteſſe) avec une force double, il faut lui donner quatre degrez de viteſſe.

Les trois démarches de notre eſprit que l'on a expliquées, & qu'on vient de rendre ſenſibles par un exemple, ſuffiſent pour découvrir les veritez qui ne ſont pas fort compoſées. Mais quand on veut s'appliquer à la recherche d'un grand nombre de veritez qui dépendent les unes des autres, par exemple, à la recherche des veritez que renferme une ſcience entiere comme celle du mouvement, ou comme la Geometrie, &c. Il y a un ſi grand nombre d'objets auſquels il faut s'appliquer avec attention pour les appercevoir clairement ; il y a tant de veritez à découvrir, & tant de raiſonnemens à faire pour les déduire les unes des autres, qu'il eſt neceſſaire d'obſerver un certain ordre dans toute la ſuite des démarches de notre eſprit qui les conduiſe toujours ſurement à la verité. Cet ordre s'appelle *Methode*, & il y en a de deux ſortes.

L'une ſe nomme *la Methode ſynthetique ou de compoſition*. Cette Methode preſcrit de commencer par les veritez les plus ſimples ; d'en déduire les veritez qui ne dépendent que des premieres, & qui ont

avec elles une liaison necessaire; de déduire de ces secondes veritez celles qui ne dépendent que des premieres & des secondes, & qu'on peut nommer les troisiémes veritez; enfin d'avancer ainsi par ordre des veritez plus simples à celles qui les suivent immédiatement. Cette Methode est propre pour enseigner une science entiere.

L'autre Methode s'appelle *Methode analytique ou de resolution*. Elle sert sur tout pour la resolution des questions particulieres. Voici ce qu'elle prescrit. Quand on veut resoudre une question; aprés l'avoir bien conçue, il faut supposer qu'elle est resolue, c'est à dire, il faut supposer que ce qui est en question est vrai, ou même quelquefois on peut supposer qu'il est faux. Il faut déduire de cette supposition les consequences qui s'en peuvent déduire; de ces premieres consequences en déduire de secondes; des troisiémes de ces secondes; & continuer ainsi de raisonner jusqu'à ce qu'on soit arrivé à quelque proposition dont la verité est évidente, ou qui est évidemment fausse. Dans le premier cas, ce qui étoit en question qu'on a supposé vrai, l'est effectivement, puisqu'il conduit necessairement à une verité évidente, d'où l'on peut retourner par la Methode synthetique à ce qu'on a supposé être veritable. Si l'on avoit supposé que ce qui étoit en question fût faux, & que cela eût conduit à une proposition évidente, il est clair que ce qui auroit été supposé faux, le seroit effectivement, & qu'on pourroit démontrer par la Methode syntetique en retournant de la proposition évidente où on étoit venu, à celle qui étoit en question, que ce que l'on

avoit ſuppoſé faux, ſeroit tel qu'on l'avoit ſuppoſé. Dans le ſecond cas, où l'on arriveroit par des conſequences toujours évidentes à une propoſition évidemment fauſſe, il eſt viſible que ce que l'on avoit ſuppoſé être vrai, ſe trouve faux.

La connoiſſance qu'on vient de donner des démarches que fait notre eſprit dans la recherche de toutes les veritez, tant les plus ſimples que les plus compoſées, ſervira à faire comprendre aux Commençans les Regles de la Methode que l'on obſerve exactement dans les Mathematiques, & à leur faire voir clairement que ces Regles conduiſent les démarches de l'eſprit infailliblement à la verité.

Regles ſur les perceptions. 1. On ne doit former aucun jugement, ni aucun raiſonnement ſur les objets de ſes applications, que l'on n'ait auparavant des perceptions claires & diſtinctes de ces objets, des rapports de ces objets, & des déductions par leſquelles on les tire les uns des autres, c'eſt à dire, des ſuites & des dépendances neceſſaires qu'ont ces rapports les uns des autres: Et l'on doit toujours conſerver l'évidence dans toutes les démarches de l'eſprit en la recherche de la verité.

2. Comme l'évidence dans nos perceptions eſt abſolument neceſſaire pour découvrir la verité, on doit être exact à pratiquer les moyens qui procurent cette évidence. Le premier eſt d'apporter toute l'attention dont nous ſommes capables aux objets de nos applications, & de ne point nous laſſer de les conſiderer juſqu'à ce que nous ayons clairement & diſtinctement connu tout ce qu'ils contiennent, ou du moins ce qui nous paroîtra neceſſaire pour

la resolution de la question qui est le sujet de notre application. Le second est de nous rendre si familiere la perception claire & distincte des objets en nous y appliquant plusieurs fois, que nous n'y puissions plus penser qu'ils ne se presentent à notre esprit avec une entiere évidence. (Ce moyen est plus important qu'on ne le pense ordinairement.) Le troisiéme est que, puisqu'on doit distinguer les objets que nous avons apperçus clairement par des marques, ou des signes, ou des paroles qui leur soient tellement liées, que ces marques ne puissent se presenter que les objets ne se presentent en même temps sous une vue claire & distincte; il faut par des définitions, donner des noms à tous les objets que nous avons apperçus clairement & distinctement; c'est à dire, il faut attacher ces objets à des noms qui en réveillent les idées claires & distinctes; & il faut bien prendre garde de ne se servir que de noms qui soient attachez, ou par l'usage, ou par des définitions de nom, à signifier des objets dont on a des idées claires & distinctes; car on tomberoit dans l'erreur si l'on se servoit de mots équivoques, c'est à dire qui réveillent plusieurs idées differentes, & qui peuvent être pris tantôt en un sens, & tantôt en un autre; ou de mots qui excitent des idées obscures, c'est à dire qui n'ont pas de signification claire & distincte.

Regles sur les propositions. 1. On doit admettre pour vrayes, sans preuve, les propositions qui expriment des rapports que l'on voit clairement & distinctement; comme celles-ci. Le tout est plus grand qu'une de ses parties: Un tout est égal à toutes ses parties

priſes enſemble : Deux grandeurs égales à une troiſiéme ſont égales entr'elles ; & les autres ſemblables qui expriment des rapports qu'on apperçoit avec une entiere evidence. Ces ſortes de propoſitions s'appellent des *axiomes*. 2. Toute propoſition qui exprime un rapport qu'on n'apperçoit pas avec évidence, ne doit pas être admiſe qu'on ne l'ait auparavant démontrée, c'eſt à dire, qu'on n'ait fait voir évidemment qu'elle ſe déduit neceſſairement d'autres propoſitions évidentes.

Regles ſur les raiſonnemens. Il y a deux choſes à conſiderer dans les raiſonnemens ; les propoſitions qui précedent les conſequences d'où ſont tirées ces conſequences ; la déduction des conſequences des propoſitions qui les précedent. 1. *Regle*. On ne doit mettre parmi les propoſitions dont on tire les conſequences, que des propoſitions qui ſoient dans la derniere évidence, ou par elles-mêmes, (c'eſt à dire qu'étant ſimples, il ſuffiſe de les conſiderer avec attention pour en voir clairement la verité;) ou parcequ'elles ont déja été démontrées, & qu'elles ſont devenues évidentes par la déduction neceſſaire qu'on en a faite d'autres propoſitions évidentes. 2. *Regle*. Il faut qu'on voye clairement en déduiſant les propoſitions les unes des autres, que celles qui ſont déduites ſont des ſuites neceſſaires des propoſitions dont elles ſont déduites.

On n'admet dans les Mathematiques aucunes preuves qui ne ſoient conformes à ces deux Regles, & c'eſt à ces ſeules preuves qu'on donne le nom de *Démonſtrations*.

Quand on fait la recherche de veritez fort com-

posées, ou d'un grand nombre de veritez qui dépendent les unes des autres, & qu'il faut pour les découvrir beaucoup de perceptions, de jugemens & de raisonnemens ; il faut mettre bien de l'ordre entre toutes ces démarches de l'esprit, & employer *la Methode synthetique*, ou *la Methode analytique*, ou mêler l'une avec l'autre. Voici

Les Regles communes à ces deux Methodes. 1. Il faut partager le sujet de son application en toutes les parties qu'il peut avoir, en faisant des divisions exactes qui comprennent tout le sujet. Il faut ensuite examiner avec attention toutes ces parties une à une, en commençant par les plus simples, & allant selon l'ordre naturel aux plus composées, en mettant même de l'ordre parmi celles qu'il paroît indifferent d'examiner les unes plutôt que les autres ; & ne point passer des unes aux autres, qu'on n'ait reconnu distinctement celles que l'on quitte pour s'appliquer aux suivantes, & sans se les être rendues très familieres : il faut retrancher après cela toutes les choses qu'on verra clairement être inutiles à découvrir la verité qu'on cherche. 2. Dans toute la longue suite des propositions & des raisonnemens qui font découvrir une verité composée, on doit voir clairement la verité de chacune des propositions en particulier, & que toutes les déductions que l'on fait de ces veritez, les tirant les unes des autres, sont necessaires.

La Regle particuliere à la Methode synthetique, est qu'il faut toujours commencer par les choses les plus simples & les plus connues, & n'établir pour principes dont on doit se servir dans ses raisonnemens, que

des propoſitions entierement évidentes. Il faut enſuite aller ſuivant l'ordre naturel des choſes les plus ſimples aux plus compoſées ſans faire de ſaut, c'eſt à dire, il faut en allant des premiers principes aux dernieres veritez, paſſer par toutes les veritez qui ſont comme les milieux, chacun en ſon rang naturel, entre les premiers principes & les dernieres veritez, ſans obmettre aucun de ces milieux; & conſerver toujours l'evidence dans tout le paſſage.

Les Regles particulieres à la Methode analytique, ſont, la 1re, qu'il faut concevoir clairement & diſtinctement l'état de la queſtion qu'on veut reſoudre, c'eſt à dire, qu'il faut avoir des idées diſtinctes des termes de la queſtion, afin de pouvoir les comparer, & découvrir le rapport que l'on cherche; & ne pas perdre de vue l'état de la queſtion dans toutes les démarches que fait l'eſprit pour la reſoudre, afin de n'en pas faire d'inutiles.

Dans chaque queſtion ou Problême, il y a toujours trois choſes à diſtinguer; 1°. des grandeurs inconnues qu'on cherche à découvrir; 2°. des grandeurs connues, & 3°. des rapports connus entre les grandeurs connues & les inconnues; & ces rapports ſont les conditions de la queſtion qui la déterminent. Il eſt ordinairement facile de diſtinguer, comme le preſcrit la premiere Regle, les grandeurs connues & les inconnues de la queſtion; mais il y a bien des queſtions où l'on ne voit pas d'abord les rapports déterminez entre les grandeurs connues & les inconnues qu'on cherche, qui ſont neceſſaires pour reſoudre la queſtion, & qui la déterminent; & c'eſt ſouvent la difficulté de trouver ces rapports,

rapports, qui fait tout la difficulté de la queſtion.

La ſeconde Regle eſt (quand l'énoncé de la queſtion n'exprime pas tous les rapports qui déterminent la queſtion) d'employer tout ce qu'on peut avoir de ſagacité, & de chercher par quelque effort d'eſprit dans les proprietez des grandeurs qui ſont les termes de la queſtion, les rapports entre les grandeurs connues & les inconnues qu'on cherche, qui déterminent la queſtion, & qui ſont neceſſaires pour la reſoudre; & que ces rapports ſoient clairement & diſtinctement connus.

Dans les queſtions ſur les nombres, quand les rapports entre les grandeurs connues & les inconnues, qui déterminent la queſtion, ne ſont pas bien énoncez dans la queſtion, ce qui arrive rarement, on les cherche ces rapports dans les proprietez des nombres quand la queſtion eſt de Geometrie, ou du moins quand on y peut faire entrer des figures de Geometrie (ce qui arrive dans la pluſpart des Problêmes) on cherche les rapports entre les grandeurs connues & les inconnues, qui déterminent la queſtion, dans les proprietez des figures propres à la queſtion: Quand la queſtion eſt ſur les grandeurs ſenſibles, on doit chercher les rapports qui déterminent la queſtion dans les proprietez des grandeurs ſenſibles. Voici un exemple qui fera voir la maniere d'appliquer la ſeconde Regle. Suppoſé qu'on veuille reſoudre le Problême qui fut propoſé à Archimede, & qu'il reſolut, que voici. *Trouver ſi un ouvrage qui paroît être d'or, & que l'ouvrier aſſure être de pur or, n'eſt point mêlé d'argent, ſans l'endommager*. La premiere Regle s'applique ſans peine, & l'énoncé

du Problême fait voir nettement l'état de la question. Il s'agit de s'assurer si l'ouvrage qui paroît d'or, & que l'ouvrier assure être de pur or, n'est point un composé ou un mêlange d'or & d'argent. La condition qui y est ajoûtée de ne point endommager l'ouvrage, entre aussi dans l'état de la question, & la rend ce semble plus difficile, en excluant tous les moyens de découvrir s'il y a ou s'il n'y a pas de mêlange en endommageant l'ouvrage. Il faut donc par la seconde Regle, chercher les rapports qui détermineront la question, & qui donneront le moyen de la resoudre, dans les proprietez de l'or pur, de l'argent, & d'un mêlange d'or & d'argent. C'est une proprieté des métaux, qu'en prenant des volumes de differens métaux, chacun d'un égal poids, tous ces volumes également pesans, seront inégaux en étendue, & le volume d'or sera le moindre de tous. Par exemple, un volume d'or pesant 10 livres, & un volume d'argent du poids de 10 livres sont inégaux en étendue; & le volume d'or est moindre que le volume d'argent. Cette proprieté fournit le rapport qu'on cherche pour déterminer la question: car le poids de l'ouvrage qui est le sujet du Problême, étant par exemple, supposé d'une livre; en prenant un lingot d'or pur d'une livre, il faut chercher le rapport de la grandeur du volume d'or à la grandeur du volume de l'ouvrage, & s'ils sont de même grandeur, il n'y a point de mêlange; si le volume d'or pur est moindre que le volume de l'ouvrage, il y a du mêlange. Et ce rapport est conforme à la condition de ne point endommager l'ouvrage; puisque, pour connoître le rapport des volu-

mes du lingot d'or pur & de l'ouvrage, il ne faut que tremper le lingot d'or pur & l'ouvrage dans de l'eau contenue dans un vaisseau qui ait sur un de ses cotez des marques qui fassent connoître la quantité d'eau que fait élever dans le vaisseau, ou que fait sortir du vaisseau, le corps plongé dans l'eau, laquelle quantité d'eau élevée dans le vaisseau, ou sortie du vaisseau, est égale au volume de ce corps.

Les métaux ont une autre proprieté, dont la raison se tire de la proprieté précedente, laquelle donne encore plus facilement le rapport qui détermine la question, & qui en fait découvrir la resolution. La voici. Des volumes égaux en pesanteur de differens métaux, perdent, étant plongez dans l'eau, une partie chacun de leurs poids; ces parties perdues sont inégales, & l'or en perd moins que les autres. On tire de cette proprieté le rapport qui détermine la question. Il faut chercher, en pesant dans l'eau un lingot d'or pur du poids de l'ouvrage, & en pesant de même l'ouvrage, le rapport des parties de leur poids que perdront dans l'eau le lingot d'or pur & l'ouvrage. Car si les parties du poids perdues se trouvent égales, l'ouvrage est d'or pur; & si elles sont inégales, il y a du mêlange. On trouveroit la quantité de ce mêlange en comparant ensemble les parties que perdroient de leur poids dans l'eau l'ouvrage, un lingot d'or pur, un lingot d'argent, tous trois d'un même poids. Mais cette recherche seroit ici inutile; ce qu'on a dit de la maniere de trouver le rapport qui détermine la question proposée par le moyen des proprietez des grandeurs qui entrent dans la question, suffit pour faire concevoir la seconde Regle.

Quand on a bien distingué dans une question les grandeurs inconnues qu'on cherche, les grandeurs connues, & qu'on a les rapports des unes avec les autres, qui sont les conditions du Problême qui le déterminent, *La troisiéme Regle* est qu'il faut supposer la question comme resolue, & déduire de cette supposition les consequences qui s'en peuvent déduire; de ces premieres en déduire de secondes, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la resolution évidente de la question.

Voici la maniere dont on employe cette troisiéme Regle dans la resolution des Problêmes des Mathematiques. Regardant le Problême comme s'il étoit resolu, on marque les grandeurs connues de la question ordinairement par les premieres lettres de l'alphabet; on marque les inconnues de la question communément par les dernieres lettres de l'alphabet, quoique cela soit arbitraire. Et considerant les grandeurs inconnues comme si elles étoient connues, on les compare avec les grandeurs connues, suivant les rapports connus qu'elles ont ensemble; on marque ces rapports par les expressions litterales suivant les Regles du calcul, & on les reduit à une seule expression, qui consiste en deux parties égales, qu'on appelle à cause de cela *une équation*, ou *une égalité*. Cette équation est une expression litterale de tout le Problême, & de tous les rapports ou de toutes les conditions qui le déterminent; c'est aussi l'expression litterale de la supposition qu'on fait que le Problême est resolu. Voici comment on tire des consequences de cette supposition par le moyen du calcul, jusqu'à la resolution évidente du

Problême. Les grandeurs inconnues sont mêlées avec les grandeurs connues, & quelques fois entre elles dans les deux parties égales de l'équation, qu'on appelle aussi les deux membres de l'équation. On applique sur ces deux parties égales les operations du calcul, par lesquelles on fait sur chaque partie égale des changemens égaux; ce qui n'ôte point l'égalité entre les deux parties égales; & cependant on arrive par ces calculs à dégager les inconnues, c'est à dire à faire en sorte que les inconnues se trouvent égales à des grandeurs connues; ainsi on arrive à une resolution évidente du Problême, & on y arrive en tirant de la supposition qu'on a faite que le Problême étoit resolu, des consequences necessaires; puisque les operations du calcul sur l'expression du Problême sont autant de raisonnemens justes & suivis, par lesquels on tire des rapports representez par l'expression du Problême, d'autres rapports qui s'en déduisent necessairement, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la resolution évidente du Problême, qui est la derniere consequence évidente & necessaire à laquelle on tendoit pendant toute la resolution.

L'explication qu'on vient de faire des Regles de la Methode qu'on suit dans les Mathematiques, suffit pour faire voir clairement aux Commençans qu'elle conduit infailliblement à la verité. Car la verité n'est qu'un rapport réel soit simple, soit composé. Or la Methode conduit de telle sorte les démarches de notre esprit, qu'en la suivant il ne doit admettre que des rapports réels, soit simples, soit composez; puisqu'il ne doit admettre que les rap-

ports qu'il apperçoit clairement & distinctement. La Methode conduit donc infailliblement notre esprit à la verité.

C'est ici le lieu de faire distinguer la vraye Methode qu'on suit dans les Mathematiques, qui vient d'être expliquée, d'avec la seule apparence de cette Methode, dont on peut abuser pour faire illusion aux simples & à ceux qui n'y regardent pas de près. Ce n'est pas assez pour traiter une matiere suivant la Methode des Mathematiques, que de donner aux propositions les noms d'Axiomes, de Définitions, de Suppositions, de Theorêmes, de Lemmes, en un mot tous les noms semblables à ceux dont on se sert dans les Mathematiques; & de donner de même aux preuves le nom de Démonstrations. Ce n'est là que l'exterieur & l'apparence de la Methode des Mathematiques, & ce n'est pas là la vraye Methode qui conduit infailliblement à la verité, quand on raisonne sur des matieres dont on n'a pas des idées claires & distinctes; quand les propositions, qu'on nomme Axiomes, ou suppositions sont obscures, & ne se font pas admettre par leur évidence; quand dans les preuves à qui donne le nom de Démonstrations, l'esprit n'apperçoit pas d'évidence dans les propositions, ni dans les déductions par lesquelles elles sont tirées les unes des autres.

De l'utilité des Mathematiques pour perfectionner notre esprit.

On ne parlera pas ici de l'utilité des Mathematiques par rapport à toutes les commoditez qu'elles fournissent aux besoins des hommes; par rapport à

ce qu'elles contribuent à la perfection des Arts, ni par rapport aux secours qu'en tirent les Sciences, & sur tout la Physique, qu'on ne sçauroit apprendre à fond, ni traiter avec quelque exactitude sans les Mathematiques; on déduira simplement comme un Corollaire de la Methode qu'on suit dans les Mathematiques, les grands avantages qu'on peut tirer de ces Sciences pour perfectionner notre esprit; c'est le principal usage qu'on doit faire des Mathematiques: c'est aussi le principal motif qui doit porter les jeunes personnes à s'y appliquer.

La premiere qualité de l'esprit de l'homme, la plus necessaire, celle qui s'étend à toutes ses actions, toutes ses applications, tous ses emplois, toutes ses affaires, toutes ses entreprises, celle qui doit diriger toutes ses autres qualitez, en un mot celle, qui étant jointe à la droiture du cœur qu'elle doit mettre en œuvre, & qu'elle doit conduire par sa lumiere, fait toute la perfection de l'homme; c'est *la justesse d'esprit*. C'est par elle qu'il distingue en toutes choses le vrai du faux, le juste de l'injuste, le bon parti du mauvais; c'est par cette estimable qualité que l'homme juge de toutes choses selon leur valeur, qu'il place toutes choses dans le rang qui leur convient; c'est par elle qu'il est judicieux dans toute sa conduite; en un mot c'est par elle qu'il est raisonnable, & qu'il découvre en toutes choses ce que prescrit le bon sens ou la raison.

Il ne suffit pas pour avoir cette justesse d'esprit, de sçavoir les Regles qui conduisent infailliblement à la verité; elle consiste dans l'habitude même de suivre ces Regles en toutes rencontres; elle suppose

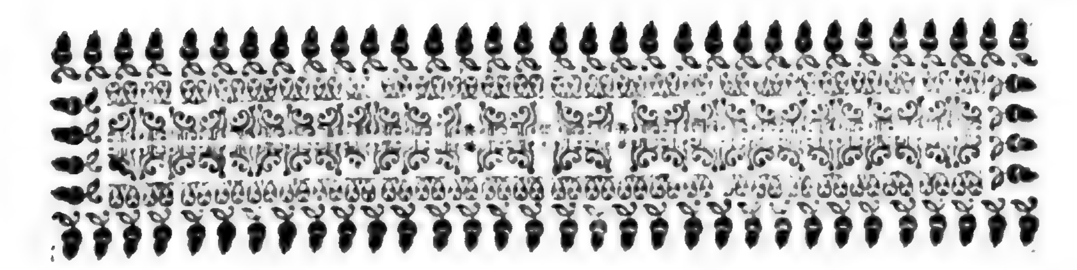
avant toutes choſes un vrai deſir de n'être pas trompé, & un ardent amour de la verité; elle réunit en elle les habitudes ſuivantes; 1°. une force d'eſprit qui lui faſſe apporter à tous les ſujets ſur leſquels il doit juger, toute l'attention qu'ils demandent pour en juger ſelon la verité, ſans ſe rebuter de la peine qui s'y peut rencontrer; 2°. une grandeur ou une étendue d'eſprit qui dans les queſtions compoſées l'ait accoutumé à regarder d'une ſimple vue la ſuite de pluſieurs principes qui conduiſent tous enſemble à la verité qu'il cherche; 3°. une fermeté d'eſprit qui l'empêche de ſe laiſſer emporter par les premieres vrai-ſemblances, qui ne lui permette pas de ſe rendre aux ſeules apparences de la verité, qui lui faſſe retenir & ſuſpendre ſon jugement dans les choſes naturelles, & qui ſont du reſſort de la raiſon, juſqu'à ce qu'il ſoit forcé de le porter par une évidence entiere, & qui enſuite l'attache conſtanment à la verité clairement connue, & le retienne inébranlable; 4°. une netteté d'eſprit ou une habitude à mettre un tel ordre dans toutes ſes penſées, un tel arrangement dans toutes les parties du ſujet de ſon application, qu'il puiſſe aiſément faire toutes les comparaiſons neceſſaires pour trouver la verité; 5°. une ſagacité qui faſſe découvrir dans les queſtions les plus difficiles & les plus embaraſſées, les moyens les plus ſimples & les plus propres pour les reſoudre; 6°. enfin une habitude qu'il doit ſe faire de la connoiſſance claire & diſtincte des principes les plus ſimples, les plus generaux, & les plus feconds ſur chaque matiere qui peut être d'uſage dans la vie; de façon que ces principes ſoient toujours preſens,

presens, & servent de lumiere à l'esprit dans toutes les occasions qui peuvent se presenter, & qu'il n'ait plus qu'à en tirer les consequences, pour juger sainement de la pluspart des choses qui se rencontrent le plus ordinairement. C'est le concours de toutes ces habitudes qui forme celle qu'on nomme justesse de l'esprit.

Cette excellente habitude s'acquiert comme les autres par la pratique continuelle des actes qui la produisent. Et il est évident par l'explication qu'on a fait de la Methode qu'on suit toujours dans les Mathematiques, que l'on y pratique continuellement les actes qui forment cette habitude. D'où suit évidemment l'utilité des Mathematiques pour former le jugement & perfectionner l'esprit.

Car la seule qualité de l'esprit necessaire pour apprendre les Mathematiques, est d'être capable d'attention. Un esprit attentif y fera un progrès prodigieux. C'est par la seule attention qu'il découvrira toutes les veritez que ces Sciences contiennent, & qu'il se fera jour au travers des obscuritez dont elles paroissent environnées aux esprits incapables d'attention, dans tout ce qu'elles semblent avoir de plus caché & de plus secret. Ainsi l'étude de ces Sciences est le moyen le plus propre à acquerir la force d'esprit, & à le rendre maître de son attention. Il n'y en a pas aussi de plus capable de lui donner l'étendue dont il a besoin lorsqu'il faut qu'il s'applique à des questions fort composées, & où il doit envisager d'une seule vûe un grand nombre de principes d'où dépend la resolution. Car les veritez que ces Sciences expliquent sont

toutes liées les unes aux autres, & un ſeul principe répand une telle lumiere ſur toutes les veritez qu'il renferme, que l'eſprit voit d'une ſimple vûe toute la ſuite qu'elles ont entr'elles juſqu'à la derniere, pour ainſi dire, qui les ſuppoſe toutes. C'eſt dans ces Sciences que ſe forme le goût de l'eſprit pour la verité; qu'il s'accoutume & ſe familiariſe, pour ainſi parler, avec elle; qu'il la diſtingue, dans les choſes qui ſont du reſſort de la raiſon, par ſon propre caractere qui eſt la lumiere & l'évidence. Le bel ordre que mettent ces Sciences entre toutes les veritez qu'elles enſeignent, qui en fait une des plus grandes beautez, & en quoi conſiſte le principal de leur excellente Methode, ſert à former la netteté de l'eſprit, & à l'accoutumer à arranger ſes penſées dans tous les ſujets de ſes applications, de la maniere la plus naturelle & la plus propre tant à découvrir la verité qu'à l'expliquer aux autres. L'artifice ingenieux qu'elles employent ſans ceſſe pour reſoudre les queſtions les plus embaraſſées par les moyens les plus ſimples & les plus naturels, eſt ce qu'il y a de plus propre à donner à l'eſprit la ſagacité qui lui eſt de ſi grand uſage dans toutes les occaſions où il doit s'appliquer à des queſtions difficiles, & trouver de lui-même les moyens les plus propres à les reſoudre. Enfin les Mathematiques dépendent d'un très petit nombre de principes generaux qu'on ne fait, pour ainſi dire, que developer dans toutes ces Sciences, & elles ſont très propres à faire acquerir à l'eſprit l'habitude de la connoiſſance des principes les plus feconds ſur les matieres les plus d'uſage dans la vie; & d'en juger ſolidement en ſuivant leur lumiere.



AVERTISSEMENT.

LA Methode d'apprendre les Mathematiques par le moyen du calcul litteral & numerique, est la plus aisée. En ôtant tout l'embarras & tout ce qu'il y avoit de rebutant dans cette étude, elle y substitue le plaisir de les apprendre comme si on en faisoit soi-même la découverte. Elle est la plus courte, & demande incomparablement moins de temps pour s'en rendre maître. Elle est plus lumineuse & plus feconde, en conduisant par tout à des resolutions generales, & faisant naître par chaque trait de plume des découvertes. Enfin elle est plus proportionnée à l'esprit borné de l'homme, en menageant admirablement sa capacité, & augmentant son étendue à l'infini par le bel ordre qu'elle met dans le grand nombre d'objets qu'il doit regarder d'une simple vûe, & dans tous les raisonnemens qu'il doit faire pour les comparer les uns avec les autres afin d'arriver à la verité, & par l'art d'abreger ses idées, & de lui representer une infinité d'objets sous l'expression la plus simple qui soit possible. Il n'en faut pas d'autre preuve que le prodigieux progrès qu'ont fait les Mathematiques depuis qu'on les a traitées par le calcul. Ceux qui veulent apprendre les Mathematiques à fond en peu de temps, d'une maniere aisée & qui leur fasse plaisir, entendre les excellens Ouvrages sur ces Sciences faits de notre temps, où elles sont traitées par le cal-

cul, & se mettre en état d'y faire eux-mêmes des découvertes, doivent commencer par apprendre le calcul, & se le rendre très familier. Mais il ne faut pas que le calcul les conduise comme des aveugles, ou comme des artisans qui suivent des Regles dont ils ne sçavent pas les raisons, ou comme par un heureux hazard, aux veritez que contiennent les Mathematiques, qui ne seroient pas des veritez pour ceux qui ne verroient pas clairement leurs liaisons & leur enchaînement necessaire avec les premiers principes connus de tout le monde; ils doivent apprendre en même temps les raisons sur lesquelles est fondé le calcul. Ils doivent voir clairement que les expressions litterales & numeriques, & toutes les operations du calcul sur ces expressions, sont des signes simples & faciles, déterminez par la science du calcul à marquer par ordre tous les raisonnemens clairs, distincts, solides, naturels & suivis, que fait l'esprit pour déduire des rapports connus des grandeurs, tous les autres rapports qu'on en peut déduire. Que ces calculs étant appliquez aux figures de la Geometrie, representent les rapports qui sont entre les lignes contenues dans ces figures, ceux qui sont entre les parties de ces figures comparées entr'elles ou avec les figures entieres dont elles sont les parties; ceux qui sont entre les figures mêmes comparées les unes aux autres: qu'ils representent de même les rapports que toutes les grandeurs particulieres peuvent avoir entr'elles, & qu'ils representent de plus les raisonnemens exacts que fait notre esprit dans les comparaisons de ces rapports pour aller des uns aux autres; qu'enfin dans la resolution de chaque question ils marquent distinctement tous les raisonnemens justes que fait l'esprit pour déduire ce que l'on veut connoître dans la question, de toutes les choses qui y sont connues.

La Science du calcul des grandeurs en general ; *qu'on donne ici, est faite pour les Commençans, pour ceux qui n'ont encore aucune connoissance des Mathematiques, & qui veulent les apprendre à fond. On à tâché de l'expliquer avec une telle clarté, qu'ils puissent l'apprendre d'eux-mêmes sans le secours d'un Maître. On n'y a oublié aucun des calculs qui sont necessaires pour entendre* l'Analyse Démontrée *& les nouvelles Methodes trouvées de notre temps, & qui sont expliquées dans l'Analyse Démontrée. On y a donné des démonstrations de tous les calculs: & comme la multiplication & la division des grandeurs litterales entieres doit convenir à toutes sortes de grandeurs, c'est à dire aux grandeurs rompues & aux grandeurs incommensurables, on à été obligé pour démontrer cette étendue, de donner dans* la premiere Section, *la notion des* rapports *& des* proportions, *& de démontrer les plus simples & les plus generales proportions d'où se déduisent toutes les autres. Les Commençans pourront les passer ces premieres proportions dans une premiere lecture, & sur tout les démonstrations particulieres pour les rapports incommensurables, le cas des incommensurables étant clairement contenu dans le cas des rapports commensurables par la notion de l'infini. On n'a mis ces démonstrations particulieres aux incommensurables, que pour ne laisser aucune proposition sans une démonstration dans la rigueur mathematique, à ceux mêmes qui auroient quelque peine dans ces premiers commencemens, d'admettre la notion de l'infini.*

Les Commençans pourront même, (afin de n'être pas rebutez par la theorie, c'est à dire par les démonstrations, & par tous les principes établis pour les démonstrations) se contenter dans une premiere lecture, d'apprendre bien le

seul calcul des grandeurs entieres & rompues, & de se le rendre très familier, c'est à dire l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, la formation des puissances, & l'extraction des racines des grandeurs numeriques & litterales entieres, & les mêmes operations sur les grandeurs rompues avec les reductions qui leur sont particulieres.

Quand ils se seront rendus ces calculs familiers, ils liront l'ouvrage tout de suite, en joignant la theorie à la pratique; ils apprendront tout ce qui regarde la comparaison des rapports simples & composez, & le calcul des grandeurs incommensurables.



AVERTISSEMENT

Sur la réduction des moindres especes aux plus grandes par rapport aux produits qui viennent de la multiplication des nombres de differentes especes les uns par les autres, expliquée dans l'article 87 *page* 62, *qui doit être ajoûté à la page* 108 *après la ligne* 2e.

QUAND on a deux nombres, qui contiennent chacun differentes especes, à multiplier l'un par l'autre; & qu'on les réduit chacun à la moindre espece, & qu'ensuite on multiplie ces deux nombres, ainsi réduits à la moindre espece, l'un par l'autre, suivant la regle de l'*art*. 87. Voici la methode pour réduire le produit qui est venu de cette multiplication à la plus grande espece que l'on cherche. Il faut prendre, 1°, l'unité de la plus grande espece de l'un des deux nombres, & la réduire à la moindre espece. (Dans l'exemple de l'*art* 87, il faut réduire 1 livre, qui est l'unité de la plus grande espece du premier nombre, en la plus petite espece qui est des deniers, & cette unité réduite sera le nombre 240.) 2°. Il faut de même réduire l'unité de la plus grande espece du second nombre, en la plus petite espece. (Dans l'exemple il faut réduire 1 toise, qui est l'unité de la plus grande espece du second nombre, en pouces qui est la plus petite espece du second nombre, & cette unité réduite sera 72 pouces) 3°. Il faut multiplier les deux nombres, ausquels ces deux unitez de la plus grande espece de chacun des deux nombres proposez sont réduites, l'un par l'autre. (Dans l'exemple il faut multiplier 240 par 72) Le produit qui viendra de cette multiplication (lequel dans l'exemple est 17280,) est le nombre par lequel il faut diviser le produit qu'on a trouvé par la regle de l'*art*. 87, (lequel produit dans l'exemple est 3707892.)

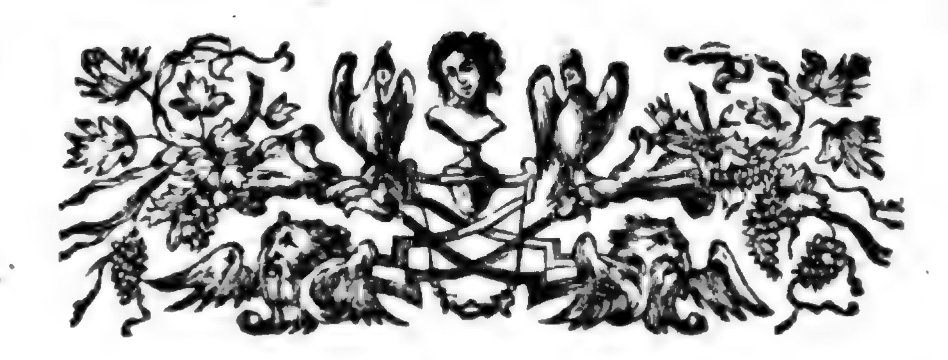
En faisant la division, le quotient qu'on trouvera exprimera le nombre de la plus grande espece que l'on cherche, c'est à dire, qu'on réduira par cette division le produit à la plus grande espece que l'on cherche. (Dans l'exemple on

trouvera le quotient entier 214 livres avec la fraction $\frac{9972}{17280}$.
Cette fraction se réduira aux moindres especes prises de suite par la methode de l'*art.* 274.)

Comme cette methode de multiplier les nombres qui contiennent differentes especes expliquée dans l'*art* 87, est très embarassante, il ne faut point du tout s'en servir, ni de la division des nombres qui contiennent differentes especes expliquée dans l'*art.* 137, dans laquelle pour réduire le quotient à la plus grande espece, il faut réduire l'unité du dividende à la plus petite espece, & réduire de même l'unité du diviseur à la plus petite espece; ensuite diviser l'unité du dividende réduite à la moindre espece par l'unité du diviseur aussi réduite à la moindre espece, ce qui donnera un quotient: Enfin, diviser le quotient que l'on aura trouvé par la methode de l'*art.* 137, par le quotient qu'on vient de former; & faisant la division, le quotient qu'on trouvera exprimera la plus grande espece que l'on cherche, c'est à dire, qu'on réduira par cette division le quotient à la plus grande espece que l'on cherche.

Mais quand on aura deux nombres, qui contiennent chacun differentes especes, à multiplier, ou à diviser l'un par l'autre, il faudra réduire chacun de ces nombres en parties décimales par la methode de l'*art.* 276; multiplier ensuite ou diviser ces deux nombres réduits en parties décimales l'un par l'autre; & l'on aura, dans les produits ou dans les quotients, les nombres entiers que l'on cherchoit, & de plus des parties décimales, qu'on réduira par l'article 276 aux moindres especes prises de suite des nombres proposez.

LA



LA SCIENCE DU CALCUL DES GRANDEURS EN GENERAL.

LIVRE I.

Où l'on explique le calcul des grandeurs entieres.

SECTION I.

Où l'on explique les noms des principales Propositions dont on se sert dans les Mathematiques, les axiomes generaux des ces sciences, les principes dont on déduira les premieres Regles du calcul, & enfin la division de ce Traité.

Explication des noms des principales Propositions des Mathematiques.

I.

DEFINITION est l'explication de ce que signifie un mot ; ou bien c'est l'expression dont on se sert pour attacher un nom à un objet dont on a une idée claire & distincte, & pour déterminer ce nom à signifier cet objet. Par exemple cette proposition : Un nombre entier est celui qui contient plusieurs fois exactement l'unité, est une définition. Quoique les définitions des noms soient ar-

bitraires, elles n'en ſont pas moins inconteſtables; car on ne peut pas conteſter à celui qui l'a fait, qu'il n'attache à un tel nom l'objet auquel il détermine ce nom.

2.

Axiome eſt une propoſition ſi évidente par elle-même, qu'elle n'a pas beſoin de preuve, comme celle-ci. Une choſe ne peut pas être & n'être pas en même temps; ou comme cette autre, le rien, ou ce qui ne participe point du tout à l'être, ne ſçauroit être apperçu. Car appercevoir rien, & ne point appercevoir, eſt évidemment la même choſe. Il ſuffit, afin qu'une propoſition ſoit un axiome, qu'en y apportant de l'attention on voye avec une entiere évidence la verité ou le rapport qu'elle exprime.

3.

Suppoſition ou *demande* eſt une propoſition qui n'eſt pas tout à fait ſi évidente qu'un axiome, mais qui neanmoins eſt inconteſtable; ainſi on ne peut pas s'empêcher de l'accorder. Par exemple, on ſuppoſe que tous ceux qui apprennent l'addition & la ſouſtraction des nombres, ſçavent ajouter enſemble tout nombre moindre que dix, avec tout autre nombre auſſi moindre que dix; & retrancher un nombre moindre que dix de tout autre nombre plus grand, & trouver le nombre qui reſte & qui en fait la difference. On ſuppoſe de même dans la Geometrie, que deux points étant donnez ſur un plan, on peut tirer avec une regle une ligne droite de l'un à l'autre. Comme auſſi, qu'un point étant donné ſur un plan, & une ligne droite qui part de ce point, on peut tracer avec le compas ouvert de la grandeur de cette ligne, une circonference qui ait ce point pour centre. On peut voir par là que ces ſortes de ſuppoſitions ou de demandes ſont inconteſtables, & n'ont pas beſoin de preuve. On n'en fait pas d'une autre ſorte dans les ſciences generales des Mathematiques, qui ont pour objet la grandeur en general, où tout doit être démontré dans la derniere rigueur. Mais dans les ſciences particulieres des Mathematiques, qui ont pour objet les grandeurs ſenſibles, on eſt quelquefois obligé de faire des ſuppoſitions qui ne ſont pas ſi inconteſtables que celles des ſciences generales : comme dans l'Aſtro-

nomie on eſt obligé, pour expliquer les mouvemens & les autres apparences des Aſtres, de ſuppoſer, ou que la Terre tourne autour du Soleil, ou que le Soleil tourne autour de la Terre ; parcequ'on ne peut pas avoir de démonſtration de l'une ni de l'autre de ces ſuppoſitions. On déduit enſuite des ſuppoſitions que l'on a faites par des conſequences évidentes tout ce que renferment ces ſciences particulieres; & les ſuppoſitions étant une fois admiſes, tout le reſte, qui en eſt une ſuite évidente, eſt démontré.

On n'admet ſans preuve dans les Mathematiques que les trois ſortes de propoſitions qu'on vient d'expliquer. Toute autre propoſition doit être démontrée en la déduiſant des axiomes, des définitions & des ſuppoſitions, ou bien la déduiſant d'autres propoſitions qui ont déja été démontrées, & qui par là ſont dévenues claires & inconteſtables. Voici l'explication des noms qu'on donne aux propoſitions qu'il faut démontrer.

Theorême eſt une propoſition qu'il faut démontrer, & qui ne preſcrit rien à faire, comme ſi l'on propoſoit de démontrer cette propoſition : Le nombre 9 étant ajouté à lui même tant de fois que l'on voudra, les chifres qui exprimeront cette addition, feront toujours enſemble exactement neuf une ou pluſieurs fois. Comme 2 fois 9 font 18 : or 1 & 8 font exactement 9. De même 3 fois 9 font 27 : or 2 & 7 font exactement 9, &c. cette propoſition ſeroit un theorême.

Problême eſt une propoſition qui preſcrit quelque choſe à faire, & il faut démontrer, quand on l'a réſolu, qu'on a fait ce qui étoit preſcrit : par exemple, voici un Problême. Pluſieurs grands nombres étant donnez, les ajouter tous enſemble, c'eſt à dire trouver le nombre qui doit venir de l'addition de tous ces nombres donnez.

Corollaire eſt une propoſition qui ſuit d'une autre. Ainſi quand on a démontré une propoſition, & qu'on en déduit enſuite d'autres propoſitions, on les appelle des Corollaires de cette propoſition.

Lemme eſt une propoſition qu'il faut démontrer; mais qu'on ne met dans le lieu où elle eſt, que pour ſervir de preuves à d'autres propoſitions qui la ſuppoſent, & on ne la mettroit pas ſi l'on n'en avoit pas beſoin pour démontrer ces autres propoſitions.

On ajoute quelquefois des *Remarques* après des propositions, les Anciens les nommoient des *Scholies* : ce sont ordinairement des éclaircissemens.

Les Axiomes generaux des Mathematiques :

1.

1. Un tout est égal à toutes ses parties prises ensemble ; il est plus grand que l'une de ses parties ; & supposé qu'il n'ait que deux parties, un tout moins l'une de ses parties est égal à l'autre partie.

2.

2. Les grandeurs égales à une même grandeur, ou à des grandeurs égales, sont égales entr'elles.

3.

3. Les grandeurs doubles, triples, &c. d'une même grandeur, ou de grandeurs égales, sont égales; comme aussi les grandeurs qui sont la moitié, le tiers, &c. d'une même grandeur, ou de grandeurs égales, sont égales; & reciproquement les grandeurs sont égales, dont d'autres grandeurs égales sont le double, le triple, &c. ou la moitié, le tiers, &c.

4.

4. Si l'on ajoute des grandeurs égales à des grandeurs égales, ou si de grandeurs égales l'on retranche d'autres grandeurs égales plus petites, les grandeurs qui viendront de ces additions ou de ces retranchemens seront égales.

5.

5. Si l'on ôte d'une grandeur la même grandeur ou une grandeur égale, il ne reste rien.

6.

6. Si des grandeurs sont égales, toute autre grandeur plus grande ou moindre, que l'une de ces grandeurs est aussi plus grande ou moindre que chacune des autres. Et si une grandeur est plus grande ou moindre qu'une autre, toutes les grandeurs égales à la premiere, sont plus grandes ou moindres que la seconde.

7.

7. Si à des grandeurs égales l'on ajoute des grandeurs inégales, ou si de ces grandeurs égales l'on en retranche d'inégales, les grandeurs qui en naîtront seront inégales; & celles ausquelles on aura ajouté les plus grandes, comme aussi celles dont on aura ôté les moindres, seront les plus grandes.

8.

8. Si à des grandeurs inégales l'on ajoute des grandeurs égales, ou si de ces grandeurs inégales l'on en retranche d'égales, les grandeurs qui en viendront seront inégales; & celles qui étoient les plus grandes avant l'addition ou le retranchement, le seront encore après.

Voilà les principaux axiomes des Mathematiques; quand on aura besoin des autres, ils se présenteront si clairement & si naturellement à l'esprit, qu'il est inutile de les mettre ici.

AVERTISSEMENT.

Les Chifres qu'on verra à la marge au commencement des principales propositions de ce Traité, ne sont marquez que pour les citer dans les endroits où ces propositions servent de preuves. Or pour les citer on met cette marque *; ainsi quand on trouvera dans la suite cette marque * dans le Traité, & à la marge vis à vis la même marque * avec un nombre; cela signifiera que la preuve que l'on cite est dans la proposition ou dans l'article à qui convient le nombre, qui est à la marge à côté de la marque *.

Principes dont on déduira les démonstrations des premieres Regles du Calcul pour les grandeurs numeriques.

DÉFINITIONS.

1.

On prend dans toutes les especes de grandeurs une de leurs parties qu'on détermine, à qui on attribue l'idée *de l'unité*: c'est à dire, on la considere par raport aux grandeurs de même espece, comme l'unité par raport aux nombres. Par exem-

ple, on prend dans les longueurs une longueur déterminée pour l'unité qu'on nomme un pied; dans les largeurs, une largeur d'un pied quarré; dans les solides, un corps solide d'un pied cubique; dans les poids on prend une livre; dans les temps, une heure; dans les mouvemens, un degré de mouvement; dans les vîtesses, un degré de vîtesse, & ainsi des autres.

2.

9. On compare ensuite les grandeurs avec leur unité, & on leur attribue les idées des nombres. Quand une grandeur contient son unité exactement plusieurs fois, on la nomme *un nombre entier*; ainsi 4 pieds, 4 livres, 4 heures, &c. sont des nombres entiers.

La maniere de marquer les nombres est arbitraire, on en voit de differentes parmi les differentes Nations, la plus commode, que l'on a reçue des Arabes, est de marquer les nombres par *les chifres*. La voici.

3.

10. 1 signifie *un*; 2, *deux*; 3, *trois*; 4, *quatre*; 5, *cinq*; 6, *six*, 7, *sept*; 8, *huit*; 9, *neuf*. Il n'y a que ces neuf caracteres qu'on nomme *chifres*, pour marquer les nombres, & ils suffisent pour cela, comme on le verra dans la définition suivante; mais on remarquera que l'on se sert encore d'un dixiéme caractere 0, qu'on nomme *zero*, & qui signifie *rien*; c'est à dire, que là où l'on marque 0, il n'y a aucun nombre, ni aucune unité, ni aucune grandeur.

4.

11. Pour marquer tous les nombres entiers, quelque grands qu'ils puissent être, avec les seuls dix caracteres précedens, on écrit ces nombres dans une ligne droite en allant de droite à gauche, & l'on marque dans le premier rang à droite le chifre qui exprime les unitez de ces nombres au dessous de dix; dans le second rang, le chifre qui exprime combien ces nombres contiennent de dixaines d'unitez au dessous de dix; dans le troisiéme rang, le chifre qui marque combien ils contiennent de dixaines de dixaines, qu'on nomme des centaines d'unitez, au dessous de dix; dans le quatriéme rang, le chifre

qui marque combien ils contiennent de dixaines de centaines qu'on nomme des mille, & ainsi de suite en allant de droite à gauche, comme on le voit dans cet exemple ; & l'on doit remarquer que quand il n'y a point de chifre à mettre dans un rang, & qu'il y en a cependant dans les rangs suivans vers la gauche, on marque o dans ce rang là, tant pour exprimer qu'il n'y a point de nombre convenable à ce rang, que pour distinguer l'ordre des rangs des chifres qui sont vers la gauche.

3 2 1, 9 8 7. 6 5 4. 3 2 1, 2 1 9. 8 0 7. 6 5 4, 3 2 9. 8 7 6. 5 4 3

Rang	Chifre	Nom
30e rang.	3	Centaines de 3-milliars.
29e rang.	2	Dixaine de 3 milliars.
28e rang.	1,	3-milliars.
27e rang.	9	Centaines de millions de 2-milliars.
26e rang.	8	Dixaines de millions de 2-milliars.
25e rang.	7.	Millions de 2-milliars.
24e rang.	6	Centaines de mille de 2-milliars.
23e rang.	5	Dixaines de mille de 2-milliars.
22e rang.	4.	Mille de 2-milliars.
21e rang.	3	Centaines de 2-milliars.
20e rang.	2	Dixaines de 2-Milliars.
19e rang.	1,	2-Milliars.
18e rang.	2	Centaines de millions de milliars.
17e rang.	1	Dixaines de millions de milliars.
16e rang.	9.	Millions de milliars.
15e rang.	8	Centaines de mille de milliars.
14e rang.	0	Dixaines de mille de milliars.
13e rang.	7.	Mille de milliars.
12e rang.	6	Centaines de milliars.
11e rang.	5	Dixaines de milliars.
10e rang.	4,	Milliars.
9e rang.	3	Centaines de millions.
8e rang.	2	Dixaines de millions.
7e rang.	9.	Millions.
6e rang.	8	Centaines de mille.
5e rang.	7	Dixaines de mille.
4e rang.	6.	Mille.
3e rang.	5	Centaines.
2e rang.	4	Dixaines.
1er rang.	3	Unitez.

Pour exprimer facilement un grand nombre, il n'y a qu'à le partager par des points de trois en trois rangs, en allant de droite à gauche, & ensuite par des virgules de neuf en neuf rangs aussi de droite à gauche; & remarquer, 1°, qu'en chaque ternaire le premier rang à droite ne contient que des unitez, qui retiennent le nom d'unitez dans le premier ternaire; mais que ces unitez se nomment mille dans le second ternaire, & millions dans le troisiéme. Que dans le second rang de chaque ternaire ce sont des dixaines, & dans le troisiéme rang des centaines. 2°, que dans le second novenaire (pour ainsi parler) les unitez se nomment milliars; dans le troisiéme, bi-milliars, qu'on a ainsi marquées 2-milliars; dans le quatriéme, tri-milliars, qu'on a ainsi exprimées 3-milliars, &c. Ainsi quelque nombre de rangs que puisse occuper un grand nombre, pourvû qu'on sçache son dernier rang à gauche, qui est, par exemple, le trentiéme, on voit tout d'un

coup que contenant trois novenaires, & de plus trois rangs du quatriéme novenaire, le dernier chifre à gauche exprime des centaines de 3-milliars. On peut ainsi énoncer le nombre qui précede : Trois cens vingt & un 3-milliars neuf cens quatre-vingt sept millions six cens cinquante & quatre mille trois cens vingt & un 2-milliars deux cens dix-neuf millions huit cens sept mille six cens cinquante & quatre milliars trois cens vingt-neuf millions huit cens septante six mille cinq cens quarante & trois unitez.

5.

12. On partage, pour la commodité des calculs, l'unité en dix parties ; chacune de ces dixiémes en dix parties, qui sont des centiémes de l'unité ; chaque centiéme en dix parties, qui sont des milliémes de l'unité ; chaque milliéme en dix autres, & ainsi de suite à l'infini. Quand un nombre contient un nombre entier d'unitez, & qu'il contient de plus de ces sortes de parties, qui sont des dixiémes de l'unité, des centiémes, des milliémes, &c. l'on ajoute les chifres qui marquent ces parties dans la même ligne au devant de l'unité, en allant dans ce cas de gauche à droite ; & quand il manque un chifre dans l'un des rangs, on marque 0 dans ce rang là, pour distinguer les rangs qui sont plus à droite.

Pour distinguer ces *parties décimales* des unitez entieres, on marque un point, ou une virgule, ou une petite ligne, ou un petit arc entre les unitez entieres & les parties décimales. On peut aussi marquer au haut du dernier chifre à droite des parties décimales, le chifre en petit caractere, qui exprime le rang où il est comme l'on voit ici, ce qu'on néglige ordinairement comme inutile.

Centaines, Dixaines, Unitez, Dixiémes, Centiémes, Milliémes, Dix milliémes, Cent milliémes, Millioniémes, &c.

3 4 5,3 7 0 4 5 6 8 9 1 0 4 3^{xII}

Corollaires

Corollaires de la quatriéme & cinquiéme Définition.

COROLLAIRE I.

13. DIX unitez d'un rang ne valent qu'une unité dans le rang qui est immédiatement plus à gauche. Dix centaines, par exemple, ne valent qu'un mille.

COROLLAIRE II.

14. UNE unité d'un rang vaut dix dans le rang qui est immédiatement plus à droite: par exemple, un mille vaut dix centaines.

Ces deux premiers Corollaires conviennent aux nombres entiers, & aux nombres qui contiennent des parties décimales.

COROLLAIRE III, *pour les nombres entiers.*

15. SI l'on recule d'un rang un nombre qui n'a que des entiers, on le fait valoir dix fois plus qu'il ne valoit; si on le recule de deux rangs, cent fois plus; si on le recule de trois rangs, mille fois plus, & ainsi de suite: par exemple, mettant deux zeros devant 53, on aura 5300, qui vaut cent fois plus que 53.

COROLLAIRE IV, *pour les nombres entiers.*

16. SI l'on ôte un rang à droite d'un nombre entier, on le fait valoir dix fois moins qu'il ne valoit; si l'on en ôte deux rangs, cent fois moins, & ainsi de suite. Ainsi ôtant deux rangs de 5300, on aura 53, qui vaut cent fois moins que 5300.

COROLLAIRE V.

Pour les nombres qui contienent des parties décimales.

17. POUR réduire un nombre entier en dixiémes, sans en changer la valeur, il n'y a qu'à ajouter un zero, en mettant un point entre le nombre & le zero que l'on ajoute. Pour le réduire en centiémes, il faut lui ajouter deux zeros; en milliémes, trois zeros, & ainsi de suite. De même, pour réduire un nombre qui exprime des parties décimales de l'unité, c'est à dire des dixiémes, centiémes, milliémes, &c. en parties décimales plus petites, il n'y a qu'à ajouter à ce nombre, qui

exprime des parties décimales, autant de zeros qu'il en faut pour lui donner le rang qui lui convient par raport aux parties décimales plus petites ausquelles on le veut réduire. Ainsi pour réduire o, 13^{ii}, c'est à dire treize centiémes en millioniémes, il faut écrire o, 130000^{vi}.

*11. Ce Corollaire est une suite de la cinquiéme définition *. Car il est évident que chaque unité d'un nombre entier contient dix dixiémes; qu'elle contient aussi cent centiémes, & de même mille milliémes, & ainsi de suite. Par conséquent en faisant valoir chaque unité d'un nombre dix dixiémes, ou cent centiémes, ou mille milliémes, &c on n'en change point la valeur. Or en mettant un zero, deux zeros, trois zeros, &c. devant un nombre, au devant du point qui distingue les
12. parties décimales, on fait valoir, par la cinquiéme définition, chacune des unitez de ce nombre, c'est à dire ce nombre là même, des dixiémes, des centiémes, &c. On doit seulement remarquer qu'il faut être exact à marquer le point ou la virgule qui sépare les unitez entieres des parties décimales; & quand il n'y a que des parties décimales sans aucun nombre entier, qu'on doit mettre au devant vers la gauche, le nombre de zeros qu'il faut pour occuper les rangs jusqu'au nombre entier, & écrire un point ou une virgule au devant de ces zeros vers la gauche, & un zero au de-là du point ou de la virgule vers la gauche, pour faire connoître le rang où commenceroit le nombre entier, comme dans ces exemples : o. 130000^{vi}. o. 000324^{vi}. Le premier contient cent trente mille millioniémes, & le second contient trois cens vingt-quatre millioniémes. Ainsi on remarquera qu'en ajoutant un zero, deux zeros, trois zeros, &c. au devant d'un nombre entier, sans mettre de point entre ce nombre & les zeros ajoutez, on fait valoir ce nombre dix fois plus, cent fois plus, mille fois plus, &c. qu'il ne valoit auparavant. Mais en mettant un point au devant de ce nombre, & écrivant au devant du point vers la droite un zero, deux zeros, trois zeros, &c. on ne change point la valeur de ce nombre; mais on le réduit par là à valoir des dixiémes, des centiémes, des milliémes, &c. de l'unité; c'est à dire, on exprime par là combien ce nombre vaut de dixiémes, de centiémes, de milliémes, &c. de l'unité; ou bien encore, on partage par là toutes les unitez de ce nombre en dixiémes, centiémes, &c. car chaque unité contient dix

dixiémes de l'unité, cent centiémes, mille milliémes, &c.

COROLLAIRE VI.

Pour les nombres qui contiennent des parties décimales.

18. Si dans un nombre décimal quelconque, par exemple, 132.456378^{vi}, on avance le point qui distingue les parties décimales d'avec les entiers d'un rang vers la droite, le nombre 1324.56378^{v} vaudra précisément dix fois plus que le précedent; car chacun des chifres vaudra par-là * dix fois plus qu'il ne valoit. Si l'on avance le point de deux rangs, le nombre 13245.6378^{iv} vaudra précisément cent fois plus qu'il ne valoit; car chacun des chifres vaudra par-là cent fois plus qu'il ne valoit. Si l'on avance le point de trois rangs, le nombre 132456.378^{iii} vaudra mille fois plus qu'il ne valoit, & ainsi de suite. * 15.

Si au contraire on recule le point qui distingue les entiers d'avec les parties décimales vers la gauche d'un rang, de deux rangs, de trois rangs, &c. le nombre proposé vaudra par ces changemens dix fois moins, cent fois moins, mille fois moins, &c. qu'il ne valoit. * * 16.

6ᵉ DE'FINITION.

19. Un nombre qui ne contient pas l'unité exactement; mais qui contient un certain nombre de parties égales, dans lesquelles on conçoit que l'unité est divisée, s'appelle un *nombre rompu*, il s'appelle encore *une fraction*; ainsi un nombre qui contient deux tiers de l'unité, est un nombre rompu.

On marque chaque nombre rompu par deux nombres entiers de cette maniere $\frac{2}{3}$. On titre une ligne, & l'on met au dessous le nombre qui exprime en combien de parties égales l'unité est divisée, & on appelle ce nombre le *dénominateur*; on écrit sur la ligne le nombre qui marque combien le nombre rompu contient de ces parties, & on nomme ce nombre le *numerateur*. Ainsi $\frac{2}{3}$ est une fraction, le dénominateur 3 marque que l'unité est partagée en trois parties égales qu'on nomme tiers, c'est à dire en trois tiers; & le numerateur 2 fait voir que la fraction $\frac{2}{3}$ contient deux de ces parties, c'est à dire deux tiers, ou deux fois $\frac{1}{3}$.

COROLLAIRE.

20. IL eſt évident que tous les nombres, ſoit entiers, ſoit rompus, ont entr'eux une meſure commune, qui eſt l'unité, ou quelqu'une des parties égales, dans leſquelles on peut concevoir que l'unitè eſt diviſée, par laquelle ils ſont exactement meſurez.

7e DE'FINITION.

21. ON démontrera dans la ſuite qu'il y a des grandeurs, qu'on peut repréſenter par des lignes droites, qui ſont telles qu'en prenant l'une de ces grandeurs pour l'unité, en quelque nombre de parties égales qu'on puiſſe la concevoir diviſée, jamais les autres n'auront pour meſure commune exacte aucune de ces parties égales. On nomme ces grandeurs *incommenſurables*, ce qui ſignifie qu'elles ne peuvent avoir aucune meſure commune. Les grandeurs incommenſurables ont des expreſſions particulieres que l'on expliquera dans la ſuite.

Principes pour les grandeurs litterales, *qu'on nomme auſſi* algebriques.

8e DE'FINITION OU SUPPOSITION.

22. ON peut exprimer une grandeur quelconque par une lettre de l'alphabet : par exemple, on peut repréſenter une ligne droite donnée quelconque par la lettre *a*; on peut exprimer une autre ligne droite differente par *b*. On peut de même exprimer un nombre quelconque donné par une lettre *a*, & un autre nombre par *b*. Il en eſt de même de toute autre grandeur.

Dans les Problêmes on repréſente les grandeurs connues par les premieres lettres de l'alphabet *a*, *b*, *c*, *d*, &c. & les grandeurs inconnues que l'on cherche, par les dernieres *z*, *y*, *x*, &c.

On nomme les grandeurs ainſi exprimées, *litterales*, & encore *algebriques*.

AVERTISSEMENT.

LES Commençans ont d'ordinaire de la peine à ſe fixer dans l'eſprit les grandeurs que l'on repréſente par les lettres;

parcequ'en effet ces expressions litterales ne marquent pas des grandeurs particulieres, mais des grandeurs considerées en general; & cela est cause que quand on leur apprend le calcul de ces lettres, ils s'imaginent ne le pas apprendre; & quoiqu'il soit le plus facile & le plus simple de tous les calculs qu'on peut imaginer, & qu'ils le conçoivent d'abord, ils s'imaginent ne le pas concevoir; parcequ'ils n'attachent pas les idées particulieres des grandeurs particulieres aux expressions litterales, & qu'à cause de cela ils n'en voyent pas l'utilité. Mais ils ne doivent pas se rebuter, ils verront dans la suite que la science de ce calcul litteral, & de la maniere de s'en servir, est la clef pour s'ouvrir l'entrée à toutes les découvertes; qu'on a le plaisir d'apprendre par ce moyen toutes les Mathematiques, comme si on les inventoit soi-même; que les Mathematiques sont devenues si faciles, par l'invention de ce calcul & de la maniere de l'employer, que chaque trait de plume donne naissance à des découvertes; qu'on a fait des progrès surprenans dans les Mathematiques depuis l'invention de ce calcul, & depuis qu'on l'applique à résoudre les Problêmes de ces sciences; qu'il fait trouver des résolutions simples & generales de tous les cas des Problêmes qu'on veut résoudre; & qu'il fait souvent découvrir avec une très grande facilité, sous une expression qui n'occupe pas une ligne, qui même quelquefois ne contient que quatre ou cinq lettres, la résolution d'une infinité de Problêmes. Ce calcul a l'avantage d'augmenter, pour ainsi dire, l'étendue de notre esprit, en lui représentant, sous des expressions simples & abregées, les objets les plus composez, & l'infini même : & outre cela il ne fatigue point l'imagination.

Pour ôter aux Commençans autant qu'il est possible la peine qu'ils pourroient trouver dans les calculs des expressions litterales, qui ne leur peut venir que de ce qu'ils n'attacheroient à ces expressions que les idées generales des grandeurs en general, il est bon de les avertir ici qu'ils peuvent attacher à chaque lettre une ligne droite qu'ils détermineront de la longueur qu'ils voudront, & supposer qu'une lettre représente une ligne droite, une autre lettre représente une autre ligne droite; & s'ils le trouvent plus commode, ils pourront supposer que l'une de ces lettres représente une ligne droite, qui contient un certain nombre de parties ega-

les comme un certain nombre de pouces, qu'une autre lettre repréſente une autre ligne droite qui a un autre nombre des mêmes parties égales; cela n'empêchera pas que les lettres ne leur repréſentent les grandeurs en general : car il eſt évident qu'il n'y a pas de grandeurs qu'on ne puiſſe repréſenter par des lignes droites.

9[e] DE'FINITION.

23. ON diſtingue les grandeurs en *poſitives* & *négatives*. Dans le commerce, par exemple, le bien qu'a un Marchand eſt une grandeur poſitive; les dettes qu'il a, ſont des grandeurs négatives. Dans les lignes & dans toutes les grandeurs qu'on peut repréſenter par les lignes, pour diſtinguer la maniere de prendre une ligne comme *CAB*, en allant de bas en haut, de la maniere de prendre la même ligne *BAC* dans le ſens contraire, en revenant de haut en bas, on nomme la ligne priſe dans l'un de ces ſens *poſitive*, & *négative* priſe en l'autre ſens. Ainſi ſi l'on ſuppoſe que *CAB* priſe en allant de *C* en *B* eſt *poſitive*, elle ſera *négative* priſe en ſens contraire en deſcendant de *B* en *C*. De même ſi l'on prend *FDE* pour *poſitive*, en allant de gauche à droite, elle ſera *négative*, en revenant de droite à gauche de *E* vers *F*.

B A C G F D E H

COROLLAIRE I.

24. D'où l'on voit que ces deux ſortes de grandeurs poſitives & négatives, ſont les unes aux autres des retranchemens mutuels : par exemple, la grandeur poſitive *CAB*, allant de *C* à *B*, étant poſée, ſi l'on met deſſus la négative plus petite *BA*, en retournant de *B* vers *C*, elle retranchera *BA* de la quantité poſitive *BAC*, & il ne reſtera plus de la poſitive que *CA*; & ſi l'on ajoute encore la négative *AC*, qui jointe à *BA* eſt égale à la poſitive *CB*, elle retranchera entierement la poſitive *CA*, & il reſtera zero. Si l'on met une grandeur négative *BG* plus grande que *CB*, ſur la poſitive *CB*, alors il reſtera la négative *CG*. De même ſi un Marchand a 100000 livres de bien, & qu'il ait des dettes, ſi les dettes ſont moindres que le bien, il lui reſte le ſurplus du

bien ſur les dettes; ſi elles ſont égales au bien, il ne lui reſte rien ; & ſi elles ſurpaſſent ſon bien, non ſeulement il n'a rien, mais il s'en manque le ſurplus des dettes ſur le bien qu'il n'ait quelque choſe.

COROLLAIRE II.

25. IL eſt évident que zero ou le rien eſt le terme entre les grandeurs poſitives & les négatives qui les ſepare les unes des autres. Les poſitives ſont des grandeurs ajoutées à zero ; les négatives ſont pour ainſi dire au deſſous de zero ou de rien; ou, pour mieux dire, zero ou le rien eſt entre les grandeurs poſitives & négatives; & c'eſt comme le terme entre les grandeurs poſitives & négatives, où commencent les unes & les autres. Par exemple dans les lignes le point C au deſſus duquel ſont les poſitives *CA*, *CB*, & au deſſous duquel ſont les négatives *CG*, eſt le terme qui les ſepare, auquel elles commencent, & d'où elles partent vers des parties oppoſées. On nomme ce terme *l'origine* des grandeurs poſitives & négatives; & à ce terme il n'y a ni grandeurs poſitives ni négatives, ainſi il y a zero ou rien. De même *F* eſt l'origine des grandeurs poſitives *FD*, *FE* qui vont à droite, & des négatives comme *FH* qui vont à gauche, & au point *F* il n'y a ni grandeurs poſitives ni négatives; ainſi il y a zero. On remarquera que c'eſt une choſe arbitraire que de prendre les poſitives dans lequel on voudra des ſens oppoſez des grandeurs poſitives & négatives, & les négatives dans l'autre ſens; mais quand dans un Problême on les a déterminées dans l'un de ces deux ſens, il faut les conſerver dans tout le Problême.

COROLLAIRE III.

26. LES grandeurs poſitives, ajoutées les unes aux autres, ne font qu'une grandeur poſitive plus grande qui les contient toutes; & de même les négatives, ajoutées enſemble, font une grandeur négative qui les contient toutes ; & ce n'eſt qu'en ajoutant enſemble des poſitives & des négatives qu'elles ſe diminuent ou ſe font des retranchemens mutuels.

COROLLAIRE IV.

27. IL ſuit de tout ce que l'on vient de dire des grandeurs poſitives & négatives, que pour ôter une grandeur poſitive, il

n'y a qu'à y mettre la même grandeur négative : & que pour ôter de même une grandeur négative, il n'y a qu'à mettre la même grandeur positive. Une personne qui n'a rien aura 10000 livres si on lui donne ces 10000 livres; mais il se retranchera 10000 livres, s'il n'a rien, lorsqu'il fera une dette de 10000 livres.

10e DÉFINITION, *où l'on explique les signes* + & —:

28. On marque le signe +, qui signifie *plus*, devant les grandeurs positives; le signe —, qui signifie *moins*, devant les négatives. L'on met toujours le signe — devant les négatives; mais quand il y a plusieurs grandeurs jointes ensemble par les signes + & —, & que la premiere est positive, on sous-entend le signe + devant cette premiere sans le mettre, comme aussi quand une grandeur positive est seule. (Quand on parle des signes dans le calcul des grandeurs, on entend toujours les signes + & —). Par exemple 4 + 3 — 2 font 5. De même $a + b - c$ exprime la grandeur qui resulte, en joignant ensemble les deux grandeurs positives representées par $a + b$, avec la grandeur négative representée par $-c$.

11e DÉFINITION.

29. Le signe + marque aussi l'*addition*, & le signe — la *soustraction* ou le retranchement : c'est à dire, pour marquer qu'il faut ajouter ensemble plusieurs grandeurs ; on les écrit les unes devant les autres, en mettant audevant de chacune le signe +. Par exemple 3 + 4 + 5 signifie que les grandeurs 3, 4, 5 sont ajoutées ensemble, ce qui fait 12. Pour retrancher une grandeur d'une autre grandeur, on écrit la grandeur dont on doit faire la soustraction la priemere avec son signe, on écrit ensuite la grandeur qu'il faut retrancher en marquant au devant le signe —, par exemple 5 — 4 signifie que le nombre 4 est retranché de 5, ce qui fait 1. Cela ne cause point d'équivoque par rapport aux grandeurs positives marquées par +, & aux grandeurs négatives marquées par — ; car plusieurs grandeurs positives jointes ensemble, précedées chacune du signe +, sont ajoutées ensemble; & quand il y a des grandeurs négatives, précedées chacune
*24. du signe —, jointes aux positives, elles en sont retranchées. *

30. La seule chose à remarquer en cela sur les grandeurs négatives,

gatives, eſt que ſi l'on mettoit deux ſignes devant une grandeur négative, comme $+ - 3$, & $- - 3$, le premier ſigne $+$ dans $+ - 3$ marqueroit l'addition de la grandeur négative $- 3$, ce qui ſignifieroit ſimplement $- 3$; car pour ajouter une grandeur négative, il faut ſimplement l'écrire avec ſon ſigne $-$ *: le premier ſigne $-$ dans $- - 3$ marqueroit la ſouſtraction de la grandeur négative $- 3$, ce qui ſignifieroit $+ 3$; car pour retrancher une grandeur négative, il faut * l'écrire avec le ſigne $+$. * 26. * 27.

31. D'où l'on voit que le ſigne $-$ devant une grandeur, ne marque qu'une oppoſition. Si cette grandeur devant laquelle eſt le ſigne $-$ eſt poſitive ou négative, le ſigne $-$ marque qu'il faut prendre la grandeur oppoſée. Ainſi $- + a = - a$, & $- - a = + a$.

12ᵉ DÉFINITION.

32. CETTE marque $=$ ſignifie que les grandeurs qui ſont des deux côtez de cette marque ſont égales, & on l'appelle la marque ou *le ſigne de l'égalité*. Ainſi $3 + 4 = 9 - 2$ ſignifie que les grandeurs 3 & 4 ajoutées enſemble ſont égales à 9 dont on a retranché 2. $a + b = c + d$ ſignifie que les deux grandeurs a & b jointes enſemble ſont égales aux deux grandeurs c & d auſſi jointes enſemble. Les grandeurs qui ſont de chaque côté du ſigne $=$, s'appellent les *membres* de l'égalité. $a + b$ eſt le premier membre; $c + d$ eſt le ſecond membre.

33. Cette autre marque $>$ ou $<$, qu'on peut nommer la marque *d'inégalité*, ſignifie que les grandeurs qui ſont des deux côtez de cette marque ſont inégales, & que la plus grande eſt du côté de l'ouverture, & la plus petite du côté de la pointe. Ainſi $a > b$ ſignifie que a eſt plus grande que b, & $b < a$ ſignifie que b eſt moindre que a.

13ᵉ DÉFINITION.

34. LA comparaiſon que l'on fait de deux grandeurs de même eſpece, comme de deux lignes, de deux temps, de deux mouvemens, &c. ſe nomme *un rapport*, & encore *une raiſon*. On en diſtingue de deux ſortes.

Lorſqu'on compare une grandeur avec une autre de même eſpece, en conſiderant l'excès de la plus grande ſur la moindre, c'eſt à dire, la difference qu'il y a de la plus grande à la

moindre, cela s'appelle *un rapport arithmetique*, ou *une raison arithmetique*. Ainsi la comparaison de 5 à 3, en considerant que 2 est leur difference ou l'excès de 5 sur 3, est un rapport arithmetique.

35. La comparaison que l'on fait de deux grandeurs de même espece, en considerant combien la premiere contient de fois la seconde, ou combien elle est contenue de fois dans la seconde, si elle est la plus petite, s'appelle *un rapport geometrique*, ou *une raison geometrique*.

Quand l'une des grandeurs ne contient pas exactement l'autre, ou n'y est pas contenue exactement, alors on conçoit l'une des deux partagée en un nombre déterminé, tel qu'on voudra, de parties égales entr'elles, & la comparaison qu'on fait de deux grandeurs, en considerant combien l'une contient de fois une des parties égales contenue dans l'autre un certain nombre de fois, est ce qu'on nomme *un rapport geometrique*, ou *une raison geometrique*. Quand on parle de *rapports* ou de *raisons*, sans ajouter le mot de geometrique ou d'arithmetique, on entend toujours les rapports geometriques. Par exemple si l'on compare une ligne de six pieds, qu'on supposera representée par *a*, avec une ligne de deux pieds qu'on supposera representée par *b*, en considerant qu'elle la contient trois fois, ce sera un rapport geometrique, ou simplement un rapport. Si l'on compare aussi une ligne *a* de six pieds avec une ligne *d* de cinq pieds, en considerant que *a* contient six fois la partie un pied qui est cinq fois dans *b*; ce sera encore un rapport.

On marque un rapport geometrique comme une fraction en tirant une ligne, & écrivant sur cette ligne le premier terme du rapport, & le second terme sous la ligne. Ainsi $\frac{6}{2}$ marque le rapport de 6 à 2. De même $\frac{a}{b}$ marque le rapport de la grandeur representée par *a* à la grandeur representée par *b*, & on nomme *antecedent* le premier terme *a*, & *consequent* le second terme *b*. On nomme aussi, comme dans les fractions, le premier terme *a* le *numerateur*, & le second *b* le *dénominateur*; & l'on regarde un rapport $\frac{a}{b}$ comme une fraction litterale.

36. Quand il arrive qu'en concevant l'un des termes d'un rapport partagé en tel nombre fini & déterminé qu'on voudra de parties égales, l'autre terme ne contient jamais exacte-

ment un nombre précis de fois une de ces parties égales, mais qu'il la contient un certain nombre de fois avec un reste; on dit que ces deux grandeurs ont un rapport geometrique *incommensurable*.

14e DÉFINITION.

37. QUAND on a un rapport $\frac{a}{b}$, le rapport $\frac{b}{a}$ s'appelle le rapport *inverse* du premier, lequel premier est appellé *direct*, eu égard au second.

15e DÉFINITION.

38. QUAND l'antecedent & le consequent d'un rapport sont égaux, on le nomme *un rapport d'égalité*, quand ils sont inégaux, on le nomme *un rapport d'inégalité*.

AXIOME.

39. DANS les rapports d'inégalité plus l'antecedent est grand par rapport au consequent, & plus le rapport est grand: & plus l'antecedent est petit par rapport au consequent, & plus le rapport est petit. Ainsi une ligne de 100 toises a un plus grand rapport à une ligne de 20 toises qu'à une ligne de 50 toises; & une ligne de 20 toises a un moindre rapport à une ligne de 100 toises qu'à une ligne de 50 toises.

COROLLAIRE I.

40. D'où il suit que le rapport d'une grandeur à zero est infiniment grand, puisqu'une grandeur réelle est infiniment grande par rapport à rien; & que le rapport de zero à une grandeur est infiniment petit, par une raison contraire.

REMARQUE.

ON peut remarquer sur ce premier Corollaire qu'on ne peut pas faire la comparaison ou le rapport d'une grandeur à une chose qui n'est pas de même nature; par exemple, on ne peut pas comparer une ligne avec un corps solide. Ainsi à parler exactement on ne peut pas comparer une grandeur avec le neant qui ne participe point à l'être, bien loin d'être de la même nature ou de la même espece d'être, qu'est la grandeur qu'on lui compare. Mais toute grandeur étant conçue divisible à l'infini, on peut concevoir une partie de cette grandeur

qui ſoit ſi petite qu'elle ne differe, pour ainſi dire, preſque pas du neant, & qui ſoit telle que cette grandeur comparée à cette partie ſoit infiniment grande par rapport à elle, & que cette partie comparée à cette grandeur ſoit infiniment petite; c'eſt cette partie infiniment petite qu'on nomme zero, & qu'on regarde comme zero dans ce premier Corollaire.

COROLLAIRE II.

41. SI une même grandeur, qu'on nommera A, étant comparée à deux autres qu'on nommera B & C, a un plus grand rapport à la premiere B qu'à la ſeconde C, il eſt évident que B eſt plus petite que C. Si B & C étant comparées à A, le rapport de B à A eſt plus petit que celui de C à A, il eſt clair que B eſt moindre que C. Enfin ſi B eſt moindre que C, le rapport de B à A eſt moindre que le rapport de C à A.

COROLLAIRE III.

42. SI $\frac{A}{B}$ exprime un rapport d'inégalité, on peut le rendre plus petit qu'il n'eſt de deux façons, 1°. en diminuant l'antecedent A d'une grandeur C, ſans diminuer le conſequent B. 2°. en augmentant le conſequent B d'une grandeur C, ſans augmenter l'antecedent. Ainſi $\frac{A-C}{B}$ & $\frac{A}{B+C}$ ſont de moindres rapports que $\frac{A}{B}$. D'où l'on voit qu'il faut faire le contraire pour rendre le rapport $\frac{A}{B}$ plus grand qu'il n'eſt.

REMARQUE.

ON doit remarquer qu'un rapport pouvant être augmenté & diminué, & pouvant être egal ou inégal à un autre rapport, eſt une grandeur; & que par conſequent les rapports égaux peuvent être regardez comme des grandeurs égales, & les rapports inégaux comme des grandeurs inégales. Par exemple les rapports de 1 à 2, de 2 à 4, ſont des grandeurs égales; les rapports de 1 à 2, de 1 à 3, ſont des grandeurs inégales.

Pour concevoir cela clairement, il faut remarquer qu'un rapport peut être regardé de deux façons, comme un rapport & comme une grandeur, ce qu'on entendra mieux par des exemples; une ligne d'un pied comparée à une ligne de deux pieds, en eſt la moitié; une ligne d'un pied comparée à une

ligne de trois pieds, en eſt le tiers. Quand on ne conſidere que cette comparaiſon de l'antecedent au conſequent, on ne regarde que le rapport de l'un à l'autre. Le rapport lui-même peut auſſi être regardé comme une grandeur, voici comment. Quand on compare le rapport lui-même à l'unité, par exemple quand on compare le rapport $\frac{1}{2}$ une moitié, ou $\frac{1}{3}$ un tiers avec l'unité; une moitié contient une des parties dont l'unité en contient deux; un tiers contient une des parties dont l'unité en contient trois. Il eſt évident qu'en regardant ainſi un rapport, c'eſt une grandeur, & que $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{4}$ ſont deux grandeurs égales; que $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ ſont deux grandeurs inégales.

AXIOME.

43. Si un rapport $\frac{A}{B}$ eſt plus grand qu'un autre rapport $\frac{C}{D}$, il eſt plus grand que tout autre rapport égal à $\frac{C}{D}$, ou moindre que $\frac{C}{D}$.

16ᵉ DÉFINITION.

44. QUAND on compare les rapports des grandeurs entr'eux, la comparaiſon de deux rapports égaux, ou l'égalité de deux rapports s'appelle *une proportion arithmetique*, quand les rapports égaux ſont arithmetiques; elle ſe nomme *une proportion geometrique*, ou ſimplement *une proportion*, quand les rapports égaux ſont geometriques. Ainſi la difference de 4 à 6 qui eſt deux, étant égale à la difference de 8 à 10, les quatre nombre 4, 6, 8, 10 ſont une proportion arithmetique. Le rapport geometrique de 8 à 4 étant égal au rapport geometrique de 2 à 1, les quatre nombres 8, 4, 2, 1 ſont une proportion geometrique, ou ſimplement une proportion.

On marquera une proportion arithmetique de cette maniere 4 . 6 : 8 . 10, ce qui ſignifiera que la difference de 4 & de 6 eſt égale à la difference de 8 & de 10.

On marquera une proportion geometrique de l'une ou l'autre de ces manieres, $\frac{8}{4} = \frac{2}{1}$; 8 . 4 :: 2 . 1. On l'énonce de toutes ces façons : les quatre grandeurs 8, 4, 2, 1 ſont proportionnelles, ou ſont en proportion, ou ſont une proportion : le rapport de 8 à 4 eſt égal au rapport de 2 à 1; ou la raiſon de 8 à 4 eſt égale à la raiſon de 2 à 1; le premier terme 8 eſt au ſecond 4, comme le troiſiéme 2 eſt au quatriéme 1; 8 & 4 ſont entr'eux comme 2 & 1.

Le premier & le dernier terme d'une proportion s'appellent *les extrêmes*; le second & le troisiéme, *les moyens*. Le premier & le troisiéme se nomment aussi *les antecedents*; le second & le quatriéme *les consequents*.

17e DÉFINITION.

45. UNE partie d'une grandeur qui est contenue dans cette grandeur plusieurs fois exactement, s'appelle une partie *aliquote* de cette grandeur; & cette grandeur s'appelle *multiple* de son aliquote, & l'on nomme aussi l'aliquote *sous-multiple* de cette grandeur. Ainsi l'unité est une aliquote de tous les nombres entiers. Un pied est une aliquote de trois pieds, de quatre pieds, &c. trois pieds est multiple d'un pied, & un pied est sous-multiple de trois pieds. De même une ligne de cinq pieds est une aliquote d'une ligne de quinze pieds.

Une grandeur étant conçue partagée dans un nombre quelconque de parties égales, si une autre grandeur est conçue partagée dans le même nombre de parties égales entr'elles, quoiqu'elles soient inégales aux parties égales de la premiere, on nomme ces parties égales de la premiere & de la seconde, *parties pareilles* ou semblables, ou *aliquotes pareilles* ou semblables de ces deux grandeurs, & ces grandeurs sont nommées *équimultiples* de ces parties. Ainsi un pied & une toise sont les parties pareilles ou aliquotes pareilles, la premiere de trois pieds, la seconde de trois toises. Une ligne de trois pieds & une ligne de trois toises sont équimultiples, la premiere d'un pied, la seconde d'une toise. De même trois pieds & trois toises sont les parties semblables de 15 pieds & de 15 toises.

Axiomes sur les aliquotes.

46. TOUTE grandeur peut être conçue partagée en tel nombre de parties égales qu'on voudra.

L'aliquote d'une grandeur est aussi l'aliquote de toutes les grandeurs multiples de cette grandeur. Ainsi un pied qui est aliquote de 3 pieds, est aussi aliquote de deux fois 3 pieds, de trois fois 3 pieds, &c.

18ᵉ DE'FINITION, *où l'on donne une notion distincte de ce qui fait une proportion geometrique, il faut se la rendre très familiere.*

47. QUATRE grandeurs, qu'on peut représenter par quatre lignes droites, dont la premiere sera nommée *a*, la seconde *b*, la troisiéme *c*, & la quatriéme *d*, sont en proportion : lorsque les antecedents, c'est à dire la premiere *a* & la troisiéme *c*, étant conçues partagées dans le même nombre d'aliquotes *semblables*, ou de parties égales semblables, chaque consequent contient le même nombre de parties égales de son antecedent ; c'est à dire la seconde *b* contient autant d'aliquotes de la premiere *a*, que la quatriéme *d* contient d'aliquotes semblables de la troisiéme *c*.

Ainsi une ligne *a* de 5 toises est à une ligne *b* de 3 toises, comme une ligne *c* de 5 pieds est à une ligne *d* de 3 pieds.

De même une ligne *a* de 5 toises est à une ligne *b* de 3 toises, comme une ligne *c* de 20. toises ou de 5 fois 4 toises est à une ligne *d* de 12 toises ou de 3 fois 4 toises.

COROLLAIRE.

48. IL est évident que ce seroit la même notion, si l'on disoit que quatre grandeurs représentées par *a*, *b*, *c*, *d* sont en proportion, lorsque les conséquents, c'est à dire, la seconde *b* & la quatriéme *d* étant conçues partagées dans le même nombre d'aliquotes semblables, chaque antecedent contient le même nombre de parties égales de son consequent : c'est à dire, que la premiere *a* contient autant d'aliquotes de son consequent *b*, que la troisiéme *c* contient d'aliquotes semblables de son consequent *d*.

49. On exprimera ici une proportion de ces deux manieres generales, 1°, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, les quatre lettres *a*, *b*, *c*, *d* pouvant représenter quatre grandeurs quelconques à qui convient la notion generale de proportion qu'on vient de donner. 2°. Par le moyen des aliquotes. Pour cela on supposera que *x* représente la partie égale ou l'aliquote qui est exactement contenue plusieurs fois dans chacun des termes *a* & *b* du premier raport $\frac{a}{b}$; que *n* représente le nombre de fois que l'aliquote *x* est dans l'antecedent *a*, & *m* le nombre de fois que la même aliquote *x* est dans le consequent *b*. Ainsi supposé que *a* contienne *x*, 5 fois, 10 fois, 100, &c. au lieu d'écrire 5*x*, 10*x*, 100*x*, &c.

ce qui feroit une expreſſion particuliere, on écrira nx, & de cette façon nx repréſente d'une maniere generale tous les nombres poſſibles d'aliquotes, dans leſquelles on peut concevoir que a eſt diviſée, & l'on a $a = nx$; & de même mx repréſente le nombre de fois que le conſequent b contient la même aliquote x, quelque nombre entier que puiſſe être m: par conſéquent $b = mx$. On ſuppoſera de même que y repréſente l'aliquote ſemblable de l'antecedent c; & comme y doit être dans c le même nombre de fois marqué par n que x eſt dans a, & dans d le même nombre de fois marqué par m que x eſt dans b, l'on aura $c = ny$, & $d = my$. Ainſi l'expreſſion generale d'une proportion par le moyen des aliquotes, ſera $\frac{nx}{mx} = \frac{ny}{my}$.

Ainſi chaque proportion particuliere, comme $\frac{5 \text{ pieds}}{3 \text{ pieds}} = \frac{5 \text{ toiſes}}{3 \text{ toiſes}}$, ſera repréſentée, 1°, par $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. 2°, par $\frac{nx}{mx} = \frac{ny}{my}$, & n vaut ici 5; m, 3; x, un pied; y, une toiſe.

Quand on aura trois rapports égaux, on les exprimera de cette maniere $\frac{nx}{mx} = \frac{ny}{my} = \frac{nz}{mz}$. On peut, pour fixer l'imagination, appliquer cette expreſſion à trois rapports particuliers égaux, comme à $\frac{5 \text{ pieds}}{3 \text{ pieds}} = \frac{5 \text{ toiſes}}{3 \text{ toiſes}} = \frac{5 \text{ lieues}}{3 \text{ lieues}}$.

On peut remarquer que quand $n = m$, les rapports égaux $\frac{nx}{mx} = \frac{ny}{my} = \frac{nz}{mz}$ deviennent $\frac{nx}{nx} = \frac{ny}{ny} = \frac{nz}{nz}$ qui ſont des rapports d'égalité, dont chacun eſt égal à $\frac{1}{1}$, puiſque chaque conſequent eſt contenu une fois dans ſon antecedent.

Application de la notion de proportion, expliquée dans la définition précedente, aux grandeurs incommenſurables.

50. DEUX rapports incommenſurables * qu'on repréſentera
*36. par $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ſont égaux ou ſont une proportion, lorſqu'en concevant l'antecedent a, partagé en quelque nombre entier que ce puiſſe être de parties égales entr'elles, & qu'en concevant l'antecedent c auſſi partagé dans le même nombre d'autres parties égales entr'elles, il arrive toujours que le conſequent b contient autant de parties égales de ſon antecedent a, avec un petit reſte qu'on nommera R, que le conſequent d contient de parties ſemblables de ſon antecedent c, avec un petit reſte qu'on appellera R.

Explication. a, b, c, d repréſentent quatre lignes droites,
*36. on ſuppoſe que le rapport $\frac{a}{b}$ des deux premieres eſt * incommenſurable,

menſurable, comme auſſi le rapport $\frac{c}{d}$ des deux dernieres, & que ces deux rapports ſont égaux. Voici la maniere dont on conçoit égaux ces deux rapports incommenſurables.

1°. On conçoit la premiere grandeur *a* partagée en tel nombre d'aliquotes qu'on voudra : par exemple, en cent aliquotes, dont chacune ſe nommera *X*, & que la ſeconde grandeur *b* contient tel nombre qu'on voudra de ces aliquotes, par exemple 50, & de plus un petit reſte R moindre qu'une de ces aliquotes. On conçoit en même temps la troiſiéme grandeur *c* partagée en autant d'aliquotes, dont chacune ſe nommera *Y*, qu'il y en a dans *a*, c'eſt à dire en 100 *Y*; & que la quatriéme grandeur *d* contient autant de ces aliquotes *Y*, que *b* contient d'aliquotes *X*, & qu'il y a de plus un petit reſte *R* moindre que *Y* : ainſi $\frac{a}{b} = \frac{100X}{50X+R}$, & $\frac{c}{d} = \frac{100Y}{50Y+R}$.

2°. On peut concevoir chaque *X* partagée en tel nombre qu'on voudra d'aliquotes, dont chacune ſera nommée *x*, plus petites chacune que R, par exemple en 1000*x*, & en même temps chaque *Y* partagée dans le même nombre d'aliquotes, dont chacune s'appellera *y*, c'eſt à dire en 1000*y*. Le conſequent *b* doit par la ſuppoſition contenir, 1°, cinquante fois mille *x*. 2°, mais comme *x* eſt ſuppoſée moindre que R, *x* doit être en R un certain nombre de fois, qu'on ſuppoſera être dix fois, avec un nouveau petit reſte qu'on nommera r. Ainſi $b = 50000x + 10x + r$. Le ſecond conſequent *d* doit auſſi contenir cinquante fois mille *y* plus dix *y* plus un nouveau reſte qu'on nommera *r*, & l'on aura après ce partage $\frac{a}{b} = \frac{100000x}{50010x+r}$, & $\frac{c}{d} = \frac{100000y}{50010y+r}$.

3°. On peut concevoir que le partage des aliquotes *x* & *y* eſt continué en un même nombre, tel qu'on voudra, d'aliquotes pareilles plus petites, & le partage de celles-ci en un même nombre, tel qu'on voudra, d'autres aliquotes pareilles plus petites, & ainſi à l'infini, & dans chaque partage le reſte r du partage précedent des *x*, & le reſte *r* du partage précedent des *y* doivent donner chacun un même nombre d'aliquotes pareilles avec un nouveau petit reſte, & toujours de même à l'infini.

Nommant *n* tel nombre entier qu'on voudra, tant grand qu'il puiſſe être, & prenant ce nombre pour exprimer le nombre des aliquotes de *a*, dont chacune ſera nommée *X*, on aura $a = nX$.

Nommant aussi Y l'aliquote semblable de c, on aura $c = nY$.

Nommant m le nombre entier qui exprime combien de fois ces aliquotes pareilles X & Y sont contenues dans les consequens b & d, R le petit reste de b, & R le petit reste de d, on aura $b = mX + \mathrm{R}$, & $d = mY + R$, & l'expression des deux rapports incommensurables égaux par le moyen des aliquotes, sera $\frac{nX}{mX+\mathrm{R}} = \frac{nY}{mY+R}$.

Cette expression peut servir pour tous les partages qu'on peut concevoir à l'infini des aliquotes X & Y en d'autres nouvelles plus petites, & de celles-ci en d'autres nouvelles à l'infini, en supposant que X exprime l'aliquote de chaque partage pour le premier rapport, & Y l'aliquote semblable du même partage pour le second rapport; que n représente le nombre des aliquotes pareilles des antecedens, m le nombre des aliquotes pareilles des consequens, & R le petit reste du consequent du premier rapport, & R le petit reste du consequent du second rapport.

Il ne peut arriver dans aucun de ces partages à l'infini, que le reste R du premier consequent donne un nombre d'aliquotes X, different du nombre des aliquotes pareilles Y que donnera le reste R du second consequent; car si l'un de ces deux restes, par exemple R, donnoit dans le partage suivant une seule aliquote de plus que l'autre, l'on auroit dans ce partage pour l'expression de la proportion $\frac{nX}{mX+\mathrm{R}}$
* 39. $= \frac{nY}{mY+Y+R}$. Or il est évident * que le premier de ces rapports est plus grand que le second; car en mettant dans le consequent $mX + \mathrm{R}$, X plus grande par la supposition que
* 39. le petit reste R; à la place de R, on auroit * $\frac{nX}{mX+\mathrm{R}} > \frac{nX}{mX+X}$;
* 47. & $\frac{nX}{mX+X}$ * $= \frac{nY}{mY+Y}$, donc $\frac{nX}{mX+\mathrm{R}}$ surpasse * $\frac{nY}{mY+Y}$. Or $\frac{nY}{mY+Y}$ sur-
& 49. passe * $\frac{nY}{mY+Y+R}$; donc $\frac{nX}{mX+R}$ surpasse $\frac{nY}{mY+Y+R}$. Ainsi dans
* 39.
* 39. chaque partage à l'infini, chacun des restes R & R doit fournir pour le partage suivant un même nombre d'aliquotes pareilles, afin que les deux rapports incommensurables $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ soient égaux.

Mais après des partages infinis on conçoit que les restes R & R sont enfin épuisez, en fournissant toujours un même nombre d'aliquotes pareilles dans chaque partage.

51. D'où l'on peut voir que la notion de deux rapports égaux ou d'une proportion, peut être commune aux rapports commensurables & incommensurables; sçavoir, que deux rapports sont égaux, quand les antecedens étant conçus partagez dans le même nombre entier d'aliquotes semblables *X* & *Y*, quel que puisse être ce nombre, chacun des consequens contient le même nombre des aliquotes pareilles de son antecedent; mais dans les rapports commensurables, le même nombre des aliquotes semblables *X* & *Y* des antecedens est fini, & le même nombre des mêmes aliquotes semblables *X* & *Y* des consequens est aussi fini: au lieu que ce qui fait deux rapports incommensurables égaux, est qu'en concevant les deux antecedens partagez dans le même nombre infini d'aliquotes pareilles *X* & *Y*, chacun des consequens contient l'aliquote pareille de son antecedent le même nombre infini de fois. Ainsi l'expression $\frac{nX}{mX} = \frac{nY}{mY}$ peut être commune à deux rapports égaux commensurables, & à deux rapports incommensurables, en supposant que les nombres représentez par *n* & *m* sont finis pour les deux premiers, & infinis pour les seconds.

Ainsi ce que l'on démontrera dans la suite, par le moyen de cette expression de deux rapports égaux, conviendra à deux rapports égaux commensurables, & à deux rapports égaux incommensurables.

REMARQUE.

Ce seroit la même notion de deux rapports incommensurables égaux, que de dire, qu'en quelque même nombre d'aliquotes que ce puisse être qu'on conçoive partagez les consequens de ces deux rapports, leurs antecedens doivent contenir chacun le même nombre d'aliquotes semblables de son consequent avec un petit reste.

Corollaires qu'il faut se rendre très familiers.

1.

52. Les rapports égaux à un même rapport, ou à des rapports égaux, sont égaux entr'eux. Ce Corollaire est un axiome après ce qui précede.

2.

53. Une même grandeur *A* ne sçauroit avoir le même rapport à d'autres grandeurs *B* & *C*, que ces autres là ne soient éga-

les ; & plusieurs grandeurs B & C ne sçauroient avoir le même rapport avec une même grandeur A, qu'elles ne soient aussi égales ; & des grandeurs égales étant comparées à des grandeurs égales, elles ont des rapports égaux ; si $a=c$, & $b=d$, les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sont égaux. Ce Corollaire est très évident.

3.

54. Lorsque les trois premiers termes a, b, c d'une proportion sont donnez, la grandeur du quatriéme d est déterminée, c'est à dire, il ne peut y avoir pour le quatriéme terme plusieurs grandeurs differentes, dont les unes soient plus grandes, les autres plus petites; mais il n'y a qu'une même grandeur qui puisse être le quatriéme terme d; & toutes les grandeurs qui peuvent être le quatriéme terme, sont égales & peuvent être prises pour la même. Car le premier rapport $\frac{a}{b}$ étant déterminé, le rapport de c au quatriéme terme d est égal au rapport de a à b. Or une même grandeur c ne peut pas avoir
*53. un même rapport * à des grandeurs inégales, mais seulement à des grandeurs égales qui peuvent être prises chacune pour la même grandeur.

Il est évident par la même preuve, que pourvû que trois termes d'une proportion soient determinez ou donnez, il n'importe pas que ce soient les trois premiers, le quatriéme, qui est celui qui reste, est toujours determiné. Ainsi la proportion étant $a \,.\, b :: c \,.\, d$. 1°. Si b, c, d sont trois grandeurs déterminées, a est aussi déterminée. 2°. Si a, c, d sont déterminées, b l'est aussi. 3°. Si a, b, d, sont déterminées, c l'est aussi. 4°. Si a, b, c sont déterminées, d l'est aussi : car dans tous ces cas il y a un des deux rapports de la proportion qui est déterminé, le second rapport doit être égal à ce premier : ainsi un des termes de ce second rapport étant déterminé, l'autre terme est nécessairement déterminé.

4.

55. Quand deux ou plusieurs rapports, soit commensurables, soit incommensurables, sont égaux, comme $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$; leurs rapports inverses $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{f}{e}$, sont aussi égaux.

Il n'y a qu'à exprimer ces rapports égaux par le moyen des aliquotes, pour voir que la notion des rapports égaux convient à leurs rapports inverses ; car ces rapports égaux se-

ront * $\frac{nX}{mX} = \frac{nY}{mY} = \frac{nZ}{mZ}$, & leurs rapports inverſes ſeront *47.
$\frac{mX}{nX} = \frac{mY}{nY} = \frac{mZ}{nZ}$, auſquels convient la notion des rapports égaux. * *47.

Si l'on vouloit une démonſtration particuliere pour les rapports incommenſurables, la voici.

Soient les deux rapports incommenſurables égaux repreſentés par $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, il faut démontrer que leurs rapports inverſes $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$ ſont auſſi égaux, & qu'on ne ſçauroit les ſuppoſer inégaux, qu'on ne tombe dans une contradiction. Car ſuppoſant que l'un des deux, lequel on voudra comme le premier $\frac{b}{a}$, eſt moindre que l'autre $\frac{d}{c}$; qu'on ajoute à b la grandeur z, qui ſoit telle que $\frac{b+z}{a} = \frac{d}{c}$; que l'on conçoive le conſequent a partagé en tel nombre n de parties égales qu'on voudra, dont chacune, qui ſera nommée X, ne ſurpaſſe pas z; que m marque le nombre de fois que l'aliquote X eſt dans b avec un reſte; & comme on ſuppoſe qu'elle ne ſurpaſſe pas z, elle ſera au moins une fois dans z exactement, ou avec un reſte; & pour abreger, on nommera R la ſomme de ces deux reſtes, s'il y en a deux; ainſi $\frac{b+z}{a} = \frac{mX + X + R}{nX}$. Que l'on conçoive c partagée dans le même nombre n de parties égales, dont chacune ſera nommée Y, ainſi $c = nY$. Il eſt évident * *50.
que Y ſera contenue dans d le nombre de fois qui eſt marqué par m, avec un reſte R. Ainſi $\frac{d}{c} = \frac{mY + R}{nY}$; mais $\frac{mX + X + R}{nX}$
$>$ * $\frac{mX + R}{nX}$; & $\frac{mX + R}{nX} =$ * $\frac{mY + R}{nY}$. Donc $\frac{mX + X + R}{nX}$ (qui eſt *39. *48.
égal par la ſuppoſition à $\frac{b+z}{a}$) eſt plus grand que $\frac{mY + R}{nY}$, ou ſon & 50.
égal $\frac{d}{c}$. Or le même rapport ne peut pas être égal à un autre & en même temps plus grand que cet autre là. On tombe donc dans une contradiction, en ſuppoſant que les rapports inverſes $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$ ſont inégaux.

COROLLAIRE V.

56. LORSQUE pluſieurs rapports, ſoit commenſurables, ſoit incommenſurables, ſont égaux, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, la ſomme des antecedens $a + c + e$ eſt à la ſomme des conſequens $b + d + f$, comme un ſeul antecedent a eſt à ſon conſequent b; c'eſt à dire $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$. Il n'y a qu'à exprimer ces rapports égaux par leurs aliquotes, pour voir clairement que la notion * des rapports égaux leur convient. On aura $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ *47.

* 47. $=\frac{nX+nY+nZ}{mX+mY+mZ}$, & $\frac{a}{b}=\frac{nX}{mX}$. Or $\frac{nX+nY+nZ}{mX+mY+mZ}=\frac{nX}{mX}$ *; car il eſt évident que l'aliquote $X+Y+Z$ eſt dans $nX+nY+nZ$ le nombre de fois qui eſt repreſenté par n, & dans $mX+mY+mZ$ le nombre de fois marqué par m; & l'aliquote pareille X eſt dans nX le nombre de fois qui eſt marqué par n, & dans mX le nombre de fois qui eſt marqué par m.

Par exemple, ſi n vaut 10, & ſi m vaut 5, l'on aura $\frac{10X+10Y+10Z}{5X+5Y+5Z}=\frac{10X}{5X}$. Il eſt évident que $X+Y+Z$ eſt dix fois dans $10X+10Y+10Z$, & cinq fois dans $5X+5Y+5Z$. Ainſi $X+Y+Z$ & X ſont les aliquotes pareilles des antecedens qui ſont contenues le même nombre de fois dans les conſequens.

La démonſtration eſt generale par l'article 51, tant pour les rapports commenſurables, que pour les incommenſurables : en voici cependant une particuliere pour les rapports incommenſurables. On peut exprimer les rapports incom-

* 50. menſurables égaux de cette maniere * $\frac{a}{b}=\frac{nX}{mX+R}$, $\frac{c}{d}=\frac{nY}{mY+R}$, $\frac{e}{f}=\frac{nZ}{mZ+r}$. Il faut donc démontrer que $\frac{nX+nY+nZ}{mX+mY+mZ+R+R+r}=\frac{nX}{mX+R}$, ce qui eſt facile; car $X+Y+Z$ & X, ſont les aliquotes ſemblables des antecedens qui y ſont contenues le même nombre de fois qui eſt marqué par n, tel qu'il puiſſe être : or la premiere $X+Y+Z$ eſt contenue dans le premier conſequent le nombre de fois qui eſt marqué par m, & il y a de plus le reſte $R+R+r$; la ſeconde X eſt contenue dans le ſecond conſequent le même nombre de fois marqué par m, & il y a de

* 50. plus le reſte R. Par conſequent $\frac{nX+nY+nZ}{mX+mY+mZ+R+R+r}$ * $=\frac{nX}{mX+R}$.

COROLLAIRE VI.

57. LORSQUE deux rapports, ſoit commenſurables, ſoit incommenſurables, ſont égaux, comme $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; la difference des antecedens $a-c$ eſt à la difference des conſequens $b-d$, comme un ſeul antecedent a eſt à ſon conſequent b. Il faut démontrer que $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$. *Par l'article* 49, $\frac{a}{b}=\frac{nX}{mX}$, & $\frac{c}{d}=\frac{nY}{mY}$. Ainſi $\frac{a-c}{b-d}=\frac{nX-nY}{mX-mY}$. Mais $X-Y$ eſt une aliquote de $nX-nY$, qui y eſt contenue le nombre de fois qui eſt repreſenté par n, & qui eſt tel qu'on voudra ; & X eſt l'aliquote

ſemblable de nX, qui y eſt contenue le même nombre de fois marqué par n; & la premiere de ces aliquotes pareilles, ſçavoir $X - Y$ eſt contenue dans $mX - mY$ le nombre de fois qui eſt exprimé par m, & l'aliquote pareille X eſt contenue dans mX le même nombre de fois. Donc * $\frac{nX - nY}{mX - mY} = \frac{nX}{mX}$. * 51.

Démonſtration particuliere pour les rapports incommenſurables. $\frac{a}{b} = \frac{nX}{mX + R}$; $\frac{c}{d} = \frac{nY}{mY + R}$. Donc * $\frac{nX - nY}{mX - mY + R - R} = \frac{nX}{mX + R}$. * 50.
Car $X - Y$, & X aliquotes pareilles des antecedens ſont contenues la premiere dans le premier conſequent, la ſeconde dans le ſecond conſequent, le même nombre de fois chacune avec un petit reſte.

REMARQUES.

1.

58. ON énonce les deux derniers Corollaires précedens de cette autre façon. Un rapport $\frac{a}{b}$ demeure toujours le même ſi l'on ajoute à l'antecedent a, du rapport $\frac{a}{b}$, une grandeur c, & qu'on ajoute en même temps au conſequent b une grandeur d; ou bien ſi l'on ôte de a la grandeur c, & de b la grandeur d, & que les grandeurs ajoutées ou rétranchées c & d ſoient entr'elles comme a eſt à b: c'eſt à dire, ſi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$, & encore $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$.

2.

59. MAIS un rapport $\frac{a}{b}$ ne demeurera plus le même, ſi l'on ajoute une grandeur c à un ſeul de ſes deux termes; ou ſi on l'en retranche, ſans rien ajouter à l'autre, ou ſans en rien retrancher : c'eſt à dire que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b}$ & $\frac{a}{b} > \frac{a}{b+c}$; & de même $\frac{a}{b} > \frac{a-c}{b}$, & $\frac{a}{b} < \frac{a}{b-c}$. Cela eſt évident *. * 42.

3.

60. SI l'on ajoute la grandeur e à l'antecedent a du rapport $\frac{a}{b}$, ou ſi l'on en retranche la grandeur e, & qu'on ajoute en même temps au conſequent b la grandeur f, ou qu'on l'en retranche; & que les grandeurs e & f ne ſoient pas entr'elles comme a eſt à b; le rapport n'eſt plus le même : c'eſt à dire, ſi $\frac{a}{b}$ n'eſt pas égal à $\frac{e}{f}$, neceſſairement $\frac{a}{b}$ ne ſera pas égal à $\frac{a+e}{b+f}$, ni à $\frac{a-e}{b-f}$. Car en concevant a & e partagées dans le même

nombre n d'aliquotes ſemblables qui ſoient X & Y, l'on aura $a = nX$, & $e = nY$. Or ſi m marque le nombre de fois que l'aliquote X eſt dans b, le même nombre m ne pourra pas marquer le nombre de fois que Y eſt dans f, puiſqu'il fau-
*47. droit * qu'on eût ſuppoſé les deux rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{e}{f}$ égaux, afin que cela arrivât, & on les a ſuppoſé inégaux. Ainſi ce ſera neceſſairement un autre nombre, qu'on nommera p, qui marquera combien de fois Y eſt dans f, & l'on aura $b = mX$, & $f = pY$. Par conſequent l'on aura $\frac{a}{b} = \frac{nX}{mX}$, $\frac{a+e}{b+f} = \frac{nX+nY}{mX+pY}$, $\frac{a-e}{b-f} = \frac{nX-nY}{mX-pY}$. Or il eſt évident que X, $X + Y$, $X - Y$ ſont les aliquotes pareilles des antecedens nX, $nX + nY$, $nX - nY$; & que l'aliquote X n'eſt pas dans le conſequent mX le même nombre de fois que les aliquotes pareilles $X + Y$ & $X - Y$ ſont dans les conſequens $mX + pY$, $mX - pY$. Par conſequent le rapport $\frac{nX}{mX}$ ou $\frac{a}{b}$ n'eſt pas égal au rapport $\frac{nX+nY}{mX+pY}$ ou à ſon égal $\frac{a+e}{b+f}$, ni à $\frac{nX-nY}{mX-pY}$, ou à ſon égal $\frac{a-e}{b-f}$.

COROLLAIRE VII.

61. SUPPOSE' que $\frac{X}{Y}$ repréſente un rapport quelconque: deux grandeurs, dont l'une contient exactement l'antecedent X un nombre de fois quelconque repreſenté par n, & dont l'autre contient le conſequent Y le même nombre de fois marqué par n, ont le même rapport que X à Y; comme auſſi deux grandeurs dont l'une eſt contenue autant de fois dans X, que l'autre eſt contenue dans Y; c'eſt à dire $\frac{X}{Y} = \frac{2X}{2Y} = \frac{3X}{3Y} = \frac{4X}{4Y} =$ &c. comme auſſi $\frac{X}{Y} = \frac{\frac{1}{2}X}{\frac{1}{2}Y} = \frac{\frac{1}{3}X}{\frac{1}{3}Y} = \frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y} =$ &c. ce qu'on peut ainſi marquer en general $\frac{X}{Y} = \frac{nX}{nY}$, en ſuppoſant que n repréſente un nombre quelconque entier ou rompu.

Démonſtration. Il eſt évident que tous ces rapports ſont égaux $\frac{X}{Y} = \frac{X}{Y} = \frac{X}{Y} = \frac{X}{Y} = \frac{X}{Y} =$ &c. donc la ſomme des antecedens de tel nombre de ces rapports qu'on voudra, par exemple $5X$, eſt à la ſomme du même nombre de conſéquens,
*56. $5Y$ * comme un ſeul antecedent X eſt à un ſeul conſequent Y. Ainſi $\frac{X}{Y} = \frac{5X}{5Y} = \frac{10X}{10Y} = \frac{nX}{nY}$.

On

On démontrera la même chose des grandeurs contenues le même nombre de fois, l'une dans X, & l'autre dans Y.

Par exemple, que $\frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y}=\frac{X}{Y}$: car $\frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y}=\frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y}=\frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y}=\frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y}$.

Donc la somme des antecedens qui est quatre quarts de X, c'est à dire X entiere, est à la somme des consequens, qui est quatre quarts de Y, c'est à dire Y entiere, * comme un quart * 56.
de X est à un quart de Y; ainsi $\frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y}=\frac{X}{Y}$

COROLLAIRE VIII.

62. QUAND deux rapports sont égaux comme $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; le rapport des antecedens est égal à celui des consequens, c'est à dire $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

Démonstration $\frac{a}{b}=$ * $\frac{nX}{mX}$, & $\frac{c}{d}=$ * $\frac{nY}{mY}$. Ainsi $\frac{a}{c}=\frac{nX}{nY}$, * 49 & 51.
& $\frac{b}{d}=\frac{mX}{mY}$. Mais $\frac{nX}{nY}=$ * $\frac{X}{Y}$, & $\frac{mX}{mY}=$ * $\frac{X}{Y}$. Donc $\frac{nX}{nY}=\frac{mX}{mY}$: * 61.
c'est à dire $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, *ce qu'il falloit démontrer*.

18e DÉFINITION.

QUAND on a une proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ qu'on appellera directe, la proportion $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ qui s'en déduit nécessairement, s'appelle *alterne*: & comme elle est de grand usage, il faut se la rendre si familiere, qu'on la reconnoisse d'abord, sans qu'il soit besoin de marquer ce nom d'*alterne* pour en faire souvenir.

Démonstration particuliere de la proportion alterne de deux rapports égaux incommensurables qu'on representera par $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Il faut démontrer que $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. *Par l'article* 50 $\frac{a}{b}=\frac{nX}{mX+R}$ & $\frac{c}{d}=\frac{nY}{mY+R}$. Ainsi il faut démontrer que $\frac{nX}{nY}=\frac{mX+R}{mY+R}$. Il est déja évident par la démonstration précedente & *par l'article* 61, que $\frac{nX}{nY}=\frac{mX}{mY}$; puisque l'un & l'autre est égal à $\frac{X}{Y}$. Ainsi il faut démontrer que $\frac{R}{R}=\frac{X}{Y}$; car alors la somme des antecedens $mX+R$ des deux rapports égaux $\frac{mX}{mY}$ & $\frac{R}{R}$, sera à la somme des consequens $mY+R$, comme * mX est à mY, ou comme nX est à nY. * 56.

Le rapport $\frac{R}{R}$ ne peut être ni plus grand ni plus petit que $\frac{X}{Y}$;

*42. ainsi il lui est égal. 1°, s'il étoit plus grand, qu'on le diminue * en ajoutant au consequent R une grandeur z qui soit telle que $\frac{R}{R+z} = \frac{X}{Y}$. Qu'on conçoive X & Y partagées en un même nombre quelconque, qu'on nommera p, d'aliquotes pareilles x
*46. & y, & que y ne surpasse pas z, ce qui est possible *; ainsi
*61. $\frac{X}{Y}$ * $= \frac{px}{py}$. Il est évident *par l'article* 50 que x sera dans R tout autant de fois, avec un petit reste r, que y sera dans R avec un petit reste r; & nommant ce nombre q, on aura $\frac{R}{R} = \frac{qx+r}{qy+r}$. Mais ayant supposé $y < z$ ou $y = z$, y sera dans z au moins une fois; & s'il y a un reste, on ne fera de ce reste & du petit reste r, qu'un seul reste que l'on supposera representé par la même lettre r, & l'on aura $R + z = qy + y + r$. Ainsi $\frac{R}{R+z} = \frac{qx+r}{qy+y+r}$.

On va démontrer que $\frac{R}{R+z} = \frac{qx+r}{qy+y+r}$, qu'on suppose égal à $\frac{X}{Y}$, ne peut pas lui être égal, qu'il est plus petit; & qu'ainsi la supposition que $\frac{R}{R}$ est plus grand que $\frac{X}{Y}$ conduit necessairement à cette contradiction que $\frac{R}{R+z}$ est égal à $\frac{X}{Y}$, & qu'il est en même temps plus petit.

*61. x & y étant les aliquotes pareilles de X & Y, l'on aura * $\frac{x}{y} = \frac{qx}{qy} = \frac{px}{py} = \frac{X}{Y} = \frac{qx+x}{qy+y}$. Or $qx + x$ surpasse $qx + r$; car on
*39. suppose le reste r moindre que x: ainsi le rapport $\frac{qx+x}{qy+y}$ * sur-
*39. passe le rapport $\frac{qx+r}{qy+y}$; & $\frac{qx+r}{qy+y}$ * étant plus grand que $\frac{qx+r}{qy+y+r}$;
*43. $\frac{qx+x}{qy+y}$ surpasse * à plus forte raison le rapport $\frac{qx+r}{qy+y+r}$. Donc puisque $\frac{X}{Y} = \frac{qx+x}{qy+y}$ il s'ensuit que $\frac{qx+x}{qy+y}$ surpassant $\frac{qx+r}{qy+y+r}$; le rapport $\frac{X}{Y}$ surpasse aussi $\frac{qx+r}{qy+y+r}$ égal par la supposition à $\frac{R}{R+z}$. On arrive donc à une contradiction en supposant que $\frac{R}{R+z}$ étoit égal à $\frac{X}{Y}$. Cela vient de ce qu'on a supposé $\frac{R}{R}$ plus grand que $\frac{X}{Y}$; ainsi $\frac{R}{R}$ ne peut pas être plus grand que $\frac{X}{Y}$.

2°. Si $\frac{R}{R}$ étoit plus petit que $\frac{X}{Y}$, qu'on ajoute à R la grandeur z, de façon que $\frac{R+z}{R}$ soit égal à $\frac{X}{Y}$; qu'on conçoive, comme dans le cas précedent, X & Y partagées en aliquotes pareilles x & y, dont le nombre soit p, & que chaque x ne surpasse pas z, & l'on aura $\frac{X}{Y} = \frac{px}{py}$.

Comme x doit être dans R autant de fois, avec un petit reste r, que y est dans R avec un petit reste r, *par l'article* 50, nommant q le nombre qui marque combien de fois x est dans R, & y dans R, on aura $\frac{R}{R} = \frac{qx + r}{qy + r}$.

Mais ayant supposé $x < z$ ou $x = z$, x sera dans z au moins une fois, & s'il y a un reste, on ne fera de ce reste & du reste r qu'un seul reste qu'on representera, pour abreger, par la même lettre r, & ce reste r sera moindre que x, puisque s'il étoit plus grand on auroit une x de plus, dans $R + z$ avec un reste r; ainsi $\frac{R + z}{R} = \frac{qx + x + r}{qy + r}$.

On va démontrer que $\frac{R + z}{R} = \frac{qx + x + r}{qy + r}$, qu'on suppose égal à $\frac{X}{Y}$, est plus grand que $\frac{X}{Y}$; & que la supposition de $\frac{R}{R}$ moindre que $\frac{X}{Y}$ conduit necessairement à cette contradiction que $\frac{R + z}{R}$ est égal à $\frac{X}{Y}$, & en même temps plus grand que $\frac{X}{Y}$.

x & y étant les aliquotes pareilles de X & de Y, tous les
* 61. rapports suivans sont égaux * $\frac{x}{y} = \frac{qx}{qy} = \frac{px}{py} = \frac{X}{Y} = \frac{qx + x}{qy + y}$.
Mais r étant moindre que y par la supposition, $qy + r$ est
* 39. moindre que $qy + y$; & le rapport $\frac{qx + x}{qy + r}$ * surpasse $\frac{qx + x}{qy + y}$; or
* 39. $\frac{qx + x + r}{qy + r}$ surpasse * $\frac{qx + x}{qy + r}$. Donc à plus forte raison $\frac{qx + x + r}{qy + r}$ surpasse $\frac{qx + x}{qy + y} = \frac{X}{Y}$. Donc $\frac{R + z}{R} = \frac{qx + x + r}{qy + r}$ surpasse $\frac{X}{Y}$. On n'a donc pas pû supposer $\frac{R + z}{R} = \frac{X}{Y}$, puisqu'on vient de demontrer que $\frac{R + z}{R}$ surpasse $\frac{X}{Y}$. Cela vient de ce qu'on a supposé $\frac{R}{R}$ moindre que $\frac{X}{Y}$. Ainsi la supposition de $\frac{R}{R}$ inégal à $\frac{X}{Y}$ menant à une contradiction, il s'ensuit que $\frac{R}{R} = \frac{X}{Y}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE IX.

63. SUPPOSÉ les deux rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$, & encore les deux rapports égaux $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$, je dis que l'on aura cette proportion $\frac{a}{b + c} = \frac{d}{e + f}$.

Démonstration. On peut exprimer les deux rapports égaux
* 49. $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ * par ces deux autres $\frac{nx}{mx} = \frac{ny}{my}$; & quand les rapports
* 50. $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ * sont incommensurables, par ceux-ci * $\frac{nx}{mx + r} = \frac{ny}{my + r}$, on peut de même exprimer les deux rapports égaux $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$

par ceux-ci $\frac{nx}{px} = \frac{ny}{py}$, & dans les incommenſurables par $\frac{nx}{px + R}$
*47. $= \frac{ny}{py + R}$. Or il eſt évident que * $\frac{nx}{mx + px} = \frac{ny}{my + py}$, & dans les
*50. incommenſurables $\frac{nx}{mx + r + px + R} =$ * $\frac{ny}{my + r + py + R}$. Donc en remettant, dans ces deux rapports égaux, a au lieu de nx; d au lieu de ny; b au lieu de mx; c au lieu de px; e au lieu de my, & f au lieu de py; l'on aura $\frac{a}{b + c} = \frac{d}{e + f}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Si l'on avoit tel nombre qu'on voudra de ces rapports égaux deux à deux $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$; $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$; $\frac{a}{g} = \frac{d}{h}$; $\frac{a}{i} = \frac{d}{k}$, &c. Il eſt évident, en continuant la même démonſtration, que l'on déduiroit de ces rapports égaux deux à deux, cette proportion $\frac{a}{b + c + g + i} = \frac{d}{e + f + h + k}$.

19e DÉFINITION.

64. LORSQUE dans une proportion le ſecond & le troiſiéme terme ſont égaux : c'eſt à dire que le ſecond terme ſert de conſequent au premier rapport, & d'antecedent au ſecond rapport, & que la proportion n'a par conſequent que trois termes : on l'appelle *une proportion continue*, & le terme moyen s'appelle *moyen proportionnel*. On marque ainſi cette proportion, quand c'eſt une proportion arithmetique continue. ∸ 3 . 5 . 7 . C'eſt à dire la difference de 3 à 5 eſt égale à la difference de 5 à 7. De même ∸ a . $a + d$. $a + 2d$. C'eſt à dire la difference de a à $a + d$, eſt égale à la difference de $a + d$ à $a + 2d$. Le terme $a + d$ eſt moyen proportionnel arithmetique entre a & $a + 2d$.

On marque ainſi une proportion geometrique continue ∺ 8 . 4 . 2. C'eſt à dire, 8 eſt à 4, comme 4 eſt à 2. Le terme 4 eſt un moyen proportionnel geometrique entre 8 & 2. De même ∺ a . b . c ſignifie que a eſt à b, comme b eſt à c.

Quand une proportion continue s'étend à plus de trois termes, on l'appelle *une progreſſion*.

Ainſi ∸ 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17 eſt une progreſſion arithmetique. De même ∸ a . $a + d$. $a + 2d$. $a + 3d$. $a + 4d$. $a + 5d$. $a + 6d$. $a + 7d$ eſt une progreſſion arithmetique.

Mais ∺ 64. 32. 16. 8. 4. 2. 1 eſt une progreſſion geometrique.

Tous les termes qui ſont entre le premier & le dernier s'appellent *moyens proportionnels*.

Division de cet Ouvrage.

On partagera cette ſcience du calcul des grandeurs en general en quatre Livres. On expliquera dans le premier le calcul des grandeurs entieres ; dans le ſecond, le calcul des fractions, tout ce qui regarde les rapports ſimples & composez, & les proportions ; & le calcul des grandeurs incommenſurables. Dans le troiſiéme, les proprietez des progreſſions arithmetique & geometrique, avec l'uſage de leur union dans les calculs ; la formule pour élever les grandeurs complexes à toutes les puiſſances poſſibles ; les proprietez des nombres figurez ; les logarithmes, leur uſage, & une méthode facile de les conſtruire. Dans le quatriéme, on fera voir l'uſage du calcul pour apprendre les Mathematiques en les découvrant ſoi-même ; c'eſt à dire, on donnera les principales Regles de la maniere d'employer le calcul dans les découvertes, & on les appliquera à la réſolution de pluſieurs Problêmes.

SECTION II.

Où l'on explique l'addition & la ſouſtraction des grandeurs entieres.

Addition des grandeurs entieres.

DÉFINITION I.

Ajouter pluſieurs grandeurs données, c'eſt trouver la grandeur totale qui les contient toutes ; cette grandeur totale s'appelle leur *ſomme*.

SUPPOSITION I.

On ſuppoſe que l'on ſçait ajouter enſemble les nombres moindres que dix, c'eſt à dire, qui ne contiennent que des unitez ſans dixaines.

L'Addition des nombres entiers.

PROBLÊME I.

65. *Ajouter enſemble tant de nombres entiers qu'on voudra, & en trouver la ſomme.*

Regle ou operation. 1°. Il faut écrire tous les nombres,

qu'on veut ajouter, les uns ſous les autres, obſervant exactement d'écrire toutes les unitez de ces nombres les unes ſous les autres dans un même rang, qui eſt le premier ; toutes les dixaines les unes ſous les autres dans le ſecond rang ; toutes les centaines dans le troiſiéme rang, & ainſi de ſuite. Cette pratique eſt abſolument neceſſaire pour ne pas ſe tromper. Il faut enſuite tirer une ligne ſous ces nombres, & ce ſera ſous cette ligne qu'on écrira la ſomme que l'on cherche.

2°. Il faut ajouter enſemble tous les chifres du premier rang, qui eſt le rang des unitez, & il peut arriver tous ces cas, 1°. Si la ſomme eſt moindre que dix, il faut l'écrire ſous la ligne qu'on a tirée, dans le rang des unitez. 2°. Si le rang des unitez ne contenoit que des zeros, il faudroit écrire o dans le rang des unitez. 3°. Si la ſomme des unitez contient exactement une ou pluſieurs dixaines ſans unitez jointes aux dixaines, il faut écrire o dans la ſomme au rang des unitez, & retenir les dixaines pour les ajouter aux dixaines du ſecond rang. 4°. Si la ſomme contient une ou pluſieurs dixaines & de plus des unitez, il faut écrire les unitez dans la ſomme au rang des unitez, & retenir les dixaines pour les ajouter avec les dixaines du ſecond rang. 5°. Enfin, ſi la ſomme contenoit des centaines, il faudroit les retenir pour les ajouter avec le rang des centaines; mais ce cas n'arrive que quand il faut ajouter beaucoup de nombres.

3°. Il faut pratiquer dans le ſecond rang ce que l'on vient de preſcrire pour le premier, en regardant ce ſecond rang comme ſi c'étoit des unitez ; faire enſuite la même choſe par ordre dans le troiſiéme rang, dans le quatriéme, & dans tous les autres ; & le nombre que l'on aura écrit ſous la ligne ſera la ſomme de tous les nombres qu'on vouloit ajouter. Ceci s'eclaircira par l'exemple ſuivant.

Exemple de l'Addition des nombres entiers.

POUR ajouter les trois nombres *A*, *B*, *C*, 1° Je les écris les uns ſous les autres, de maniere que les unitez ſoient exactement dans le premier rang, les dixaines dans le ſecond, & ainſi de ſuite, & je tire une ligne au deſſous.

A	940253	
B	870412	
C	790274	
D	2600939	ſomme.

2°. J'ajoute les unitez du premier rang, en diſant 3 + 2

font 5. 5 + 4 font 9. Ainſi la ſomme du rang des unitez eſt *9*, que j'écris ſous la ligne dans le premier rang.

3° J'ajoute de même les dixaines en diſant 5 + 1 font 6. 6 + 7 font 13. J'écris les trois unitez de 13 dans la ſomme au ſecond rang, & je retiens une dixaine pour l'ajouter avec le troiſiéme rang.

4°. J'ajoute les centaines ou les chifres du troiſiéme rang, en diſant 1 que je retenois + 2 font 3. 3 + 4 font 7. 7 + 2 font *9*, j'écris 9 dans la ſomme au troiſiéme rang.

5°. J'ajoute les chifres du quatriéme rang, en diſant 0 + 0 + 0 = 0, j'écris 0 au quatriéme rang de la ſomme.

6°. J'ajoute les chifres du cinquiéme rang, en diſant 4 + 7 font 11. 11 + *9* font 20; j'écris 0 dans la ſomme au cinquiéme rang, & je retiens 2.

7°. Je dis 2 que je retenois + 9 font 11. 11 + 8 font 19. 19 + 7 font 26, j'écris 6 dans la ſomme au ſixieme rang; & n'y ayant plus de rang à ajouter, j'écris dans la ſomme les deux dixaines de 26, c'eſt à dire j'écris 2 au ſeptiéme rang, & la ſomme *D* des nombres *A* + *B* + *C*, eſt deux millions ſix cens mille neuf cens trente & neuf.

Démonſtration de l'Addition. Il eſt évident, par l'operation même, que le nombre *D*, qu'on trouve par la pratique de l'Addition, contient * la ſomme de toutes les unitez, de toutes les dixaines, de toutes les centaines, &c. des nombres qu'il falloit ajouter. Le nombre *D* eſt donc la ſomme des nombres propoſez, *qu'il falloit trouver*. * 11 & 13

REMARQUES.

1.

On pourroit dans chaque rang, faire l'addition en allant de bas en haut : cela eſt arbitraire.

2.

Quand on a beaucoup de nombres ſéparez à ajouter, on peut partager l'addition totale en pluſieurs additions particulieres, ajoutant d'abord les dix premiers nombres, enſuite les dix ſuivans, & ainſi de ſuite. Après quoi il faut ajouter toutes les ſommes trouvées par ces additions particulieres, en une ſeule ſomme, qui ſera la ſomme de tous les nombres propoſez.

Exemple de l'addition des nombres qui contiennent des parties décimales.

L'ADDITION des nombres *A*, *B*, *C*,
* 12. qui contiennent des parties décimales, * se fait comme l'addition des nombres entiers. Il faut seulement observer d'écrire dans le même rang les parties décimales qui se répondent, & quand quelqu'un des nombres qu'on doit ajouter, n'est pas reduit aux plus petites parties décimales des autres nombres, l'y reduire par le moyen des zeros, comme on le voit au nombre *C*.

A	321, 02974^{v}
B	5273, 10852
C	62, 01000
D	5657, 04826^{v}

On commencera donc par le rang des moindres parties, & l'on dira $4 + 2 = 6$; il faut écrire 6^{v} dans la somme. Ensuite on dira $7 + 5 = 12$; il faut écrire 2 dans la somme, & ajouter la dixaine qu'on a retenue au rang suivant, en disant $1 + 9 + 8 = 18$; il faut écrire 8 dans la somme, & dire ensuite $1 + 2 + 0 + 1 = 4$; il faut écrire 4 dans la somme. On dira ensuite $0 + 1 + 9 = 10$; il faut écrire 0 dans la somme avec un point ou une virgule qui le précede, pour distinguer les parties décimales des nombres entiers, & retenir 1 pour le rang des unitez entieres. Après quoi on ajoutera les unitez entieres, en disant $1 + 1 + 3 + 2 = 7$, il faut écrire 7 dans la somme, & continuer l'addition comme dans l'exemple précedent.

La démonstration est semblable à celle des nombres entiers.

Exemple de l'addition des nombres de differente espece.

LA grandeur que l'on prend pour servir de mesure dans chacune des grandeurs sensibles & qu'on a nommée l'unité, a été partagée par l'usage en d'autres parties égales plus petites contenues un certain nombre de fois dans l'unité. Ces premieres parties de l'unité ont aussi été partagées en d'autres plus petites, & celles-ci en d'autres encore plus petites, & ainsi de suite. Par exemple, dans le Commerce on prend la livre pour l'unité qui sert de mesure aux monnoyes, on la partage en vingt sous, & chaque sou en douze deniers.

Dans la Geometrie pratique on prend la toise pour l'unité qui sert de mesure aux longueurs, on la divise en six pieds, &

& chaque pied en douze pouces, & chaque pouce en douze lignes. Les meſures des autres grandeurs ſenſibles ont auſſi leurs diviſions particulieres qu'on peut apprendre de l'uſage. Les nombres qui contiennent pluſieurs fois la grandeur qui ſert d'unité & de meſure à quelque grandeur ſenſible, & qui contiennent de plus les differentes parties de cette unité, s'appellent communément *les nombres de differentes eſpeces*. Voici un exemple de l'addition de ces nombres qui ſervira de regle aux Commençans pour les autres nombres de differentes eſpeces.

Pour ajouter les nombres *A*, *B*, *C*, 1°, on les écrira les uns ſous les autres, obſervant de mettre les mêmes eſpeces dans le même rang, & l'on tirera une ligne.

A	32 toiſ.	5 pieds	11 pouces	9 lig.
B	25	4	6	10
C	12	3	8	11
D	71 toiſ.	2 pieds	3 pouces	06 lig.

2°. On commencera par la moindre eſpece, & l'on dira 9 lig. + 10 + 11 = 30 lignes, qui valent 2 pouces 6 lignes, on écrira dans la ſomme, 6 lignes au rang des lignes, & l'on retiendra 2 pouces pour le rang des pouces. 3°. On dira au rang des pouces, 2 pouces + 11 + 6 + 8 = 27 pouces, qui valent 2 pieds 3 pouces; on écrira 3 pouces au rang des pouces, & on retiendra 2 pieds. 4°. On dira au rang des pieds, 2 pieds + 5 + 4 + 3 = 14 pieds, qui valent 2 toiſes 2 pieds; on écrira 2 pieds au rang des pieds, & l'on retiendra 2 toiſes pour les ajouter aux toiſes dont on fera l'addition, comme celle des nombres, entiers, & l'on trouvera la ſomme *D*.

La démonſtration eſt ſemblable à celle de l'Addition des nombres entiers.

L'Addition des grandeurs entieres litterales,

DEFINITION.

PLUSIEURS grandeurs jointes enſemble par les ſignes + ou —, ou par tous les deux, ſont nommées grandeurs *complexes*, & chacune de ces grandeurs priſe ſéparement s'appelle *incomplexe*. Ainſi $a + b$, $a + b - c$ ſont des grandeurs *complexes*; & a, $+ b$, $- c$, priſes ſéparément, ſont chacune une grandeur *incomplexe*.

On nommera grandeurs *ſemblables* les grandeurs incomplexes qui ont préciſément les mêmes lettres, quoiqu'il y ait differens nombres & differens ſignes au devant de chacune. Ainſi $+ a$, $+ a$, $- a$, $+ 3a$, $- 5a$, ſont des grandeurs ſem-

blables. De même *aab*, $-$ *aab*, $+$ 3*aab*, $-$ 5*aab*, font des grandeurs femblables; mais *aa*, & *aab*, ne font pas femblables: de même *aa*, & *aaa*, font diffemblables.

L'Addition des grandeurs litterales incomplexes:

PROBLÊME II.

66. *FAIRE l'Addition des grandeurs litterales incomplexes.*

POUR ajouter les grandeurs femblables, fi elles font toutes pofitives, on écrit une feule fois cette grandeur avec le figne $+$, & l'on marque au devant de la grandeur le nombre qui exprime combien de fois elle eft ajoutée. Ainfi $+a+a+a = 3a$. $+aab+aab = 2aab$.

On ajoute de même les grandeurs négatives femblables, en mettant au devant de la fomme le figne $-$, ainfi $-a-a-a = -3a$. $-aab-aab = -2aab$.

Quand les grandeurs femblables pofitives ou négatives, font précedées de nombres, on ajoute auffi ces nombres. Ainfi $+3ac+5ac = +8ac$; $-10ab-14ab = -24ab$.

Enfin, quand les grandeurs femblables font en partie pofitives, en partie négatives, on ajoute en une fomme les pofitives, on ajoute en une autre fomme les négatives, & l'on ôte la moindre fomme de la plus grande, & l'on écrit le refte avec le figne de la plus grande des deux fommes. Ainfi $3ab+4ab-2ab-ab = +4ab$. De même $+3a+2a-7a = -2a$.

Pour ajouter les grandeurs diffemblables, il faut fimplement les écrire de fuite avec leur figne.

Ainfi la fomme de $+3aab$ & de $-4acc$, eft $+3aab-4acc$. De même $5a+3b$ eft la fomme de $+5a$, & de $+3b$.

L'Addition des grandeurs litterales complexes.

PROBLÊME III.

67. POUR *ajouter les grandeurs complexes*, 1°. *Si les grandeurs à ajouter ne contiennent que plufieurs fortes de grandeurs femblables, on écrira les grandeurs femblables les unes fous les autres dans les rangs correfpondans, & on en trouvera la fomme par* 66 *& comme dans les nombres.* 2°. *S'il y a des grandeurs diffemblables, on les joindra les unes aux autres avec leurs fignes; mais il eft inutile d'y obferver les rangs.*

PAR exemple, pour ajouter les grandeurs complexes A, B, C, qui ont toutes des grandeures ſemblables, 1°, on écrira les grandeurs ſemblables dans les mêmes rangs correſpondans, & on tirera une ligne au deſſous. 2°. On fera l'addition de chaque rang, comme dans les grandeurs incomplexes, & comme dans les nombres, & l'on écrira la ſomme de chaque rang ſous la ligne dans le rang correſpondant, avec le ſigne qui lui convient, & l'on aura la ſomme D.

A	$5ab$	$+ 7ac$	$- 3bc$	$+ cc$
B	$- 4ab$	$+ 3ac$	$- 7bc$	$+ 3cc$
C	$+ 3ab$	$- 5ac$	$+ 2bc$	$- 2cc$
D	$+ 4ab$	$+ 5ac$	$- 8bc$	$+ 2cc$

Pour ajouter les grandeurs complexes E, F, G, qui contiennent quelques grandeurs ſemblables avec des diſſemblables, 1°, on écrira dans les rangs correſpondans les grandeurs ſemblables, & enſuite les grandeurs diſſemblables qu'on n'a miſes dans un même rang que pour garder l'uniformité. On tirera enſuite une ligne au deſſous. 2°. On écrira ſous la ligne la ſomme de chaque rang des grandeurs ſemblables dans les rangs correſpondans, & on y joindra dans la même ligne les grandeurs diſſemblables les joignant enſemble avec leurs ſignes, & l'on aura la ſomme H. L'on peut remarquer que la ſomme du ſecond rang étant zero, on peut écrire o dans la ſomme; mais d'ordinaire on ne l'écrit pas, parceque cela eſt inutile, zero dans un rang ne ſervant pas ici à faire valoir les grandeurs des autres rangs, comme dans les nombres.

E	$3aa$	$- 2ab$	$+ cd$		
F	$- 5aa$	$+ 12ab$	$- cc$		
G	$+ 7aa$	$- 10ab$	$- dd$		
H	$+ 5aa$	0	$+ cd$	$- cc$	$- dd$

Pour ajouter des grandeurs complexes toutes diſſemblables, il faut ſimplement les joindre les unes aux autres dans une même ligne avec leurs ſignes, & ce ſera la ſomme qu'on cherche. Ainſi M eſt la ſomme des deux grandeurs complexes K & L.

$$\begin{array}{ll} K & 3a - 2b + c \\ L & 4d + 2e - f \\ \hline M & 3a - 2b + c + 4d + 2e - f \end{array}$$

La démonſtration de l'addition des grandeurs litterales eſt évidente par les articles 26, 24, 28 & 29.

La Soustraction des grandeurs entieres.

DE'FINITION.

SOUSTRAIRE une grandeur d'une autre plus grande c'est retrancher la primiere de la seconde, & marquer le reste, qui est la difference de ces grandeurs.

SUPPOSITION.

ON suppose que l'on sçait ôter un nombre au dessous de dix de tout autre nombre plus grand, & en marquer le reste ou la difference.

La Soustraction des nombres entiers.

PROBLÊME IV.

68. *SOUSTRAIRE un nombre entier tel qu'on voudra d'un autre nombre entier plus grand tel qu'on voudra, & en marquer la difference.*

REGLE. 1°. Il faut écrire le moindre nombre sous le plus grand, les unitez sous les unitez, les dixaines sous les dixaines, & ainsi de suite, & tirer une ligne au dessous. 2°. Il faut commencer par le rang des unitez, & aller par ordre au rang des dixaines, puis au rang des centaines, & ainsi de suite, & ôter dans chaque rang le chiffre de dessous celui qui est sur lui, & marquer le reste sous la ligne dans la même rang. 3°. Quand le chifre de dessous dans un rang surpasse celui de dessus, il faut ajouter une dixaine au chifre de dessus, ôter le chiffre de dessous du chiffre de dessus augmenté d'une dixaine, & écrire le reste dans le même rang sous la ligne, & il faut ajouter la même dixaine qu'on a ajoutée au chifre de dessus de ce rang, au chifre de dessous qui est immédiatement plus à gauche que celui qu'on vient de sou-
* 13. straire: cette dixaine ne l'augmentera que d'un *, & continuer la soustraction. 4°. Quand dans un rang il y a zero dessus & dessous, comme aussi quand le nombre à ôter se trouve égal à celui de dessus, il faut écrire zero pour le reste, afin de conserver les rangs des chifres qui sont vers la gauche. Ceci s'éclaircira par l'exemple suivant.

EXEMPLE.

A	840061057	
B	609345043	
C	230716014	Reste ou difference.

Pour ôter le nombre *B* du nombre *A*, 1°, il faut écrire le nombre *B* sous le nombre *A*, les unitez sous les unitez, les dixaines sous les dixaines, & ainsi de suite, & tirer une ligne au dessous. 2°. Il faut commencer par le rang des unitez, & dire 7 — 3 = 4, il faut écrire 4 dans la difference au rang des unitez; & dire au rang des dixaines 5 — 4 = 1, il faut écrire 1 au second rang de la difference; & dire au troisiéme rang 0 — 0 = 0, il faut écrire 0 au troisiéme rang, pour marquer le rang des chifres qui seront vers la gauche; puis dire au quatriéme rang, on ne peut pas ôter 5 de 1, ainsi il faut ajouter 10 à 1, & dire 11 — 5 = 6; il faut écrire 6 dans le quatriéme rang; & à cause de la dixaine ajoutée à 1 du quatriéme rang, il faut ajouter 1 au chifre 4 de dessous du cinquiéme rang, qui vaudra à présent 5 à cause de cette unité ajoutée, laquelle vaut une dixaine au quatriéme rang, & seulement un au cinquiéme rang.

Continuant la soustraction, on dira au cinquiéme rang 6 — 5 = 1, il faut écrire 1 au cinquiéme rang dans la difference, & passer au sixiéme rang où 0, qui est le chifre de dessus, étant moindre que 3 qui est au dessous, il faut ajouter 10 à 0, & dire 10 — 3 = 7, il faut écrire 7 dans le reste au sixiéme rang, & ajouter 1 au chifre de dessous du septieme qui est 9, ce qui le fera valoir 10: cela se fait à cause de la dixaine ajoutée au chifre de dessus du sixiéme rang. Il faut passer au septiéme rang, & ajouter une dixaine à 0 qui est le chifre de dessus, ce qui le fera valoir 10, & dire 10 — 10 = 0, il faut écrire 0 dans le reste au septiéme rang, & ajouter 1 à 0 chifre de dessous du huitiéme rang, à cause de la dixaine ajoutée au chifre de dessus du septiéme rang. Cette unité ajoutée à 0 le fera valoir 1. On dira après cela au huitiéme rang 4 — 1 = 3, il faut écrire 3 dans le reste au huitiéme rang. Enfin on passera au neuviéme rang, où l'on dira 8 — 6 = 2, il faut écrire 2 dans le reste au neuviéme rang, & ce rang étant le dernier, la soustraction est achevée, & le nombre C est la difference des deux nombres *A* & *B* qu'il falloit trouver.

Démonstration. Il est évident par l'operation faite par parties que le nombre *C* contient exactement les unitez, les dixaines, &c. qui restent après avoir retranché les unitez du nombre *B* des unitez du nombre *A*, les dixaines de *B* des dixaines de *A*, &c. & que *C* est par conséquent le nombre qui reste après avoir ôté le nombre *B* du nombre *A*.

REMARQUES.

1.

Si l'on avoit plusieurs nombres à ôter de plusieurs autres nombres, il faudroit ajouter les premiers dans une somme, & les seconds dans une autre somme, & ôter la premiere somme de la seconde, & le reste seroit celui que l'on cherche.

2.

69. Il faut quelquefois soustraire un nombre d'un autre plus petit; cela arrive dans le Commerce où les dettes se trouvent quelquefois surpasser le bien, & dans plusieurs calculs mathematiques; dans ce cas il faut ôter le moindre nombre du plus grand, & marquer le signe — devant le reste, pour faire voir que c'est une grandeur négative.

3.

70. Les démonstrations de l'addition & de la soustraction font voir évidemment que les Regles que l'on a données pour ces operations, font trouver les nombres que l'on cherche, porvû qu'on ait exactement suivi ces Regles. Mais il peut arriver dans la pratique que l'on se trompe, & que sans y penser l'on prenne un nombre pour un autre, c'est à dire qu'on n'observe pas exactement les regles. Pour s'assurer que dans la pratique l'on a suivi les Regles, l'on peut se servir des deux moyens suivans qu'on nommera *les preuves* de l'addition & de la soustraction, pour les distinguer des démonstrations.

Le premier moyen est de réiterer le calcul plusieurs fois & de differentes manieres quand cela se peut; si l'on trouve toujours la même grandeur, on est moralement assuré que l'on ne s'est pas trompé. Ce moyen de s'assurer de l'exactitude d'un calcul peut servir pour tous les calculs qu'on enseignera dans cet Ouvrage.

Le ſecond moyen propre à l'addition & à la ſouſtraction eſt de ſe ſervir de la ſouſtraction pour s'aſſurer qu'on a bien fait l'addition ; & de ſe ſervir de l'addition pour s'aſſurer qu'on a bien fait la ſouſtraction.

A	940253
B	870412
C	790274
D	2600939

Par exemple, pour s'aſſurer que le nombre *D* eſt la ſomme des trois nombres *A*, *B*, *C*, il faut ſouſtraire les trois nombres *A*, *B*, *C*, de leur ſomme *D*; & s'il ne reſte rien, c'eſt une marque que *D* eſt la ſomme de ces trois nombres. S'il reſtoit quelque choſe, ce ſeroit une marque qu'on ſe ſeroit trompé; il faudroit dans ce cas recommencer l'addition.

On peut ſouſtraire les trois nombres *A*, *B*, *C* de la ſomme *D*, de la maniere ſuivante, où il ne faut rien écrire. On commence par le dernier rang le plus à gauche, & l'on dit $9 + 8 + 7 = 24$: or 26 de la ſomme *D*, $- 24 = 2$, ainſi il reſte 2 de 26. Il faut imaginer 2 au lieu de 6 dans le ſixiéme rang de la ſomme.

Il faut paſſer au cinquiéme rang, & dire $4 + 7 + 9 = 20$, or 20 de la ſomme *D*, $- 20 = 0$; ainſi il ne reſte que 0 dans le cinquiéme rang de la ſomme. Dans le quatriéme rang il faut dire $0 + 0 + 0 = 0$, or 0 de la ſomme *D*, $- 0 = 0$. Ainſi il ne doit reſter dans le quatriéme rang de la ſomme *D* que 0. Dans le troiſiéme rang on dira $2 + 4 + 2 = 8$. Or 9 de la ſomme *D*, $- 8 = 1$, ainſi il faut imaginer 1 au lieu de 9 dans le troiſiéme rang de la ſomme *D*.

On dira dans le ſecond rang $5 + 1 + 7 = 13$. Or 13 de la ſomme *D*, $- 13 = 0$; ainſi il doit reſter 0 dans le ſecond rang de la ſomme, où il faut imaginer 0 au lieu de 3.

Enfin on dira dans le premier rang $3 + 2 + 4 = 9$. Or 9 de la ſomme *D*, $- 9 = 0$.

Les nombres *A*, *B*, *C* étant ſouſtraits de la ſomme *D*, il ne reſte rien: *D* eſt donc la ſomme de ces trois nombres.

A	840061057	
B	609345043	
C	230716014	Reſte ou difference.

Dans la ſouſtraction, pour s'aſſurer que (*C*) eſt ce qui reſte, aprés avoir ôté le nombre *B* du nombre *A*, il faut ajouter le reſte *C* avec le nombre *B*, & la ſomme doit être exactement le nombre *A*. Cette addition ſe fait de la ma-

niere ſuivante ſans rien écrire. On commence par le premier rang, & l'on dit 4 + 3 = 7 du nombre *A*. On dira dans le ſecond rang 1 + 4 = 5 du nombre *A*. Dans le troiſiéme rang 0 + 0 = 0 du nombre *A*. Dans le quatriéme rang 6 + 5 = 11, on prendra 1 du quatriéme rang du nombre *A* pour l'unité de 11, & on retiendra la dixaine de 11 pour l'ajouter dans le cinquiéme rang où l'on dira 1 + 1 + 4 = 6 du cinquiéme rang de *A*. On dira dans le ſixiéme rang 7 + 3 = 10, on prendra 0 du ſixiéme rang de *A* pour 0 de 10, & on retiendra la dixaine de 10 pour l'ajouter au ſeptiéme rang où l'on dira 1 + 0 + 9 = 10 : on prendra 0 du ſeptiéme rang de *A* pour 0 de 10, & on retiendra la dixaine de 10 pour l'ajouter au huitiéme rang, où l'on dira 1 + 3 + 0 = 4 du huitiéme rang de *A*. Enfin on dira au dernier rang 2 + 6 = 8 du dernier rang de *A*.

D'où l'on voit que la ſomme du reſte *C* & du nombre *B* étant égale au nombre *A*, le nombre *C* eſt la difference des nombres *A* & *B*.

Exemple de la Souſtraction des nombres qui contiennent des parties décimales.

QUAND l'un des deux nombres donnez de la Souſtraction contient des parties décimales plus petites que l'autre, il faut réduire cet autre aux moindres parties décimales du
* 17. premier * en lui ajoutant des zeros, ce qui n'en change point la valeur. Il faut enſuite écrire le plus petit nombre au deſſous du plus grand, de maniere que les mêmes eſpeces décimales ſoient les unes ſous les autres dans un même rang; & que les nombres entiers ſoient diſpoſez, les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous le dixaines, &c. Enfin il faut faire la ſouſtraction de la même maniere que dans les nombres entiers, comme on le voit dans cet exemple, où l'on trouve en ôtant le nombre *E* du nombre *D*, que le nombre *F* eſt le reſte.

D	$351,034700^{vi}$
E	239,142583
F	$111,892117^{v}$

La démonſtration eſt ſemblable à celle des nombres entiers.

Exemple

Exemple de la Soustraction des nombres de differentes especes.

A	35 toif.	3 pieds	4 pouc.	8 lig.
B	15	5	6	9
C	19	3	9	11

POUR ôter un nombre *B*, qui contient differentes especes, d'un plus grand *A*, qui contient aussi differentes especes, il faut écrire le moindre *B* sous le plus grand *A*, de maniere que les especes correspondantes soient dans le même rang les unes sous les autres ; tirer une ligne au dessous, & commencer la Soustraction par le rang de la moindre espece, en disant 9 lignes surpassant 8 lignes, il faut ajouter 1 pouce ou 12 lignes à 8 lignes, ce qui les fera valoir 20 lignes ; & l'on dira ensuite 20 lignes — 9 lignes = 11 lignes; il faut écrire 11 lignes dans le reste *C* au rang des lignes : il faut, à cause des 12 lignes ajoutées à 8 lignes, ajouter 1 pouce à 6 pouces du nombre *B*, ce qui fera 7 pouces.

Mais 7 pouces surpassant 4 pouces, il faut ajouter 1 pied ou 12 pouces à 4 pouces, ce qui fera 16 pouces, & dire 16 pouces — 7 pouces = 9 pouces, il faut écrire 9 pouces dans le reste, & ajouter 1 pied à 5 pieds du nombre *B*, ce qui fera 6 pieds, & cela à cause de 1 pied ajouté à 4 pouces du nombre *A*.

Mais 6 pieds surpassant 3 pieds, il faut ajouter 1 toise ou 6 pieds à 3 pieds, ce qui fera 9 pieds, & dire 9 pieds — 6 pieds = 3 pieds ; il faut écrire 3 pieds dans le reste, & ajouter 1 toise à 5 toises de *B*, à cause de la toise ajoutée à 3 pieds. Ainsi au lieu de 5 toises il faut concevoir 6 toises, & achever la Soustraction des toises entieres, comme dans le Soustraction des nombres entiers, & l'on trouvera le reste *C*.

La démonstration est semblable à celle des nombres entiers.

La Soustraction des grandeurs entieres litterales.

PROBLÊME.

71. *OTER les grandeurs litterales données complexes ou incomplexes d'autres grandeurs litterales données complexes ou incomplexes, & marquer la difference.*

REGLE *ou operation*. Il faut changer les signes * des grandeurs à soustraire, & ensuite les ajouter * par les regles de *27. *66. & 67.

l'Addition des grandeurs litterales entieres, aux grandeurs dont il faut les retrancher, & dont on n'aura point changé les signes, & la somme de cette Addition sera la difference.

EXEMPLES.

POUR ôter $-3ab$ de $+4ab$, il faut changer le signe de
*27. $-3ab$ *, & l'on aura $+3ab$. Il faut ensuite ajouter $+3ab$ à $+4ab$, & l'on aura la difference $+7ab$.

Pour ôter $+3ab$ de $+4ab$, il faut changer le signe de $+3ab$, & l'on aura $-3ab$. Il faut ensuite ajouter $-3ab$ à $+4ab$, & l'on aura la difference $+ab$.

Pour ôter $-4ac$ de $+7ab$, il faut écrire $7ab+4ac$.

Pour soustraire la grandeur complexe $5xx-3ax-3aa$ de $4xx-5ax+ab$, il faut changer les signes de la premiere, & faire ensuite l'addition comme elle est ici marquée, & l'on trouvera la difference $-xx-2ax+ab+3aa$.

$$\begin{array}{l} 4xx-5ax+ab \\ -5xx+3ax+3aa \\ \hline -xx-2ax+ab+3aa \end{array}$$

Ces exemples suffisent pour faire clairement concevoir la regle : les Commençans pourront en faire tant d'exemples qu'ils voudront.

La démonstration est évidente par l'article 27.

SECTION III.

Où l'on explique la Multiplication des grandeurs entieres.

DÉFINITION.

DEUX nombres étant donnez comme 3 & 4; si l'on dit 3 fois 4, cela fait 12, c'est ce qu'on appelle *multiplier* 4 par 3.

Le nombre 12 qui vient de la multiplication de 4 par 3, s'appelle *le produit*; le nombre 4, *le multiplié*; le nombre 3, *le multiplicateur* ou bien *le multipliant*. Les nombres 3 & 4, qui étant multipliez l'un par l'autre font le produit 12, s'appellent *les côtez* du produit, & encore *les dimensions* ou *les multiplicateurs* du produit. On se sert de cette marque × pour representer en abregé qu'une grandeur est multipliée par une autre; ainsi $4\times 3=12$, signifie en abregé que 4 mul-

tiplié par 3 fait 12, ou que 3 fois 4 c'eſt 12. De même $b \times a$ marque que la grandeur repréſentée par b eſt multipliée par la grandeur repréſentée par a. Ainſi 4×3 marque le produit de 4 multiplié par 3. De même $b \times a$ marque le produit de la grandeur b multipliée par a.

Définition generale de la Multiplication par rapport à toutes ſortes de grandeurs. Il faut ſe la rendre très familiere.

72. MULTIPLIER une grandeur quelconque qu'on repréſentera par b, par une autre grandeur quelconque a, c'eſt trouver une grandeur qu'on nommera c, qui ſoit à la grandeur *multipliée b*, comme la grandeur *multipliante a* eſt à l'unité.

D'où l'on voit qu'il y a une proportion dans toute multiplication, dont le premier terme eſt l'unité, le ſecond terme eſt le multiplicateur, le troiſiéme terme eſt le multiplié, & le quatriéme terme eſt le produit. Cette proportion ſe peut exprimer ainſi $1 . a :: b . c$, ou $\frac{1}{a} = \frac{b}{c}$. Les trois premiers termes $1, a, b$, de cette proportion ſont donnez, & la multiplication fait trouver le quatriéme c, qu'on peut repréſenter par $b \times a$.

COROLLAIRE I.

73. IL ſuit de-là qu'il eſt indifferent de prendre le multiplié pour le multiplicateur, & le multiplicateur pour le multiplié; c'eſt à dire, que le produit de b multiplié par a eſt la même grandeur que le produit de a multiplié par b; car dans le premier cas, on a la proportion $1 . a :: b . c$, & dans le ſecond cas, on a ſon alterne * $1 . b :: a . c$; & dans l'une & dans l'autre les trois premiers termes étant determinez, le quatriéme eſt * toujours la même grandeur. Ainſi $a \times b = b \times a$. *62. *54.

COROLLAIRE II.

74. IL ſuit auſſi de la définition de la Multiplication, que quand le multiplicateur ſurpaſſe l'unité, le produit ſurpaſſe le multiplié; & que quand le multiplicateur eſt moindre que l'unité, le produit eſt moindre que le multiplié.

COROLLAIRE III.

75. QUAND deux grandeurs a & b ſont multipliées ſéparément par une même grandeur, c'eſt à dire par le même

multiplicateur qu'on nommera m, les deux produits qui en viennent qu'on peut repréſenter, le premier par $m \times a$, le ſecond par $m \times b$, ont le même rapport que les deux grandeurs a & b.

Il faut démontrer que $a . b :: m \times a . m \times b$, ou bien $\frac{a}{b} = \frac{m \times a}{m \times b}$.

Démonſtration. Dans la multiplication de a par m, l'unité eſt au multiplicateur m, comme le multiplié a eſt au produit $m \times a$. *Par l'article* 72, ainſi $1 . m :: a . m \times a$. Par la même raiſon dans la multiplication de b par m, l'unité eſt au multiplicateur m, comme le multiplié b eſt au produit $m \times b$. Ainſi $1 . m :: b . m \times b$.

Donc le rapport de a à $m \times a$, & celui de b à $m \times b$,
*52. étant égaux au rapport de 1 à m *, ils ſont égaux entr'eux. Ainſi $a . m \times a :: b . m \times b$; donc, l'on aura auſſi la proportion
*62. alterne * $a . b :: m \times a . m \times b$, ou bien $\frac{a}{b} = \frac{m \times a}{m \times b}$. *Ce qu'il falloit démontrer*.

AVERTISSEMENT.

Ce troiſiéme Corollaire eſt d'un ſi grand uſage dans ce traité, & dans toutes les Mathematiques, que les Commençans ne ſçauroient ſe le rendre trop familier.

COROLLAIRE IV.

76. Il ſuit du troiſiéme Corollaire que deux grandeurs égales, comme par exemple $a \times b$, & $b \times a$, étant multipliées ſéparément par une même grandeur m, ou ce qui revient au même, par des grandeurs égales, les produits $m \times a \times b$, &
*75. $m \times b \times a$ ſont égaux. Car * $\frac{a \times b}{b \times a} = \frac{m \times a \times b}{m \times b \times a}$. Mais les deux termes du premier de ces rapports ſont égaux; les deux termes du ſecond rapport ſont donc égaux.

Application de la définition generale à la multiplication des nombres entiers.

77. Multiplier un nombre entier donné par un autre nombre entier donné, c'eſt trouver un troiſiéme nombre qui contienne le nombre multiplié autant de fois que le multiplicateur contient l'unité. Ainſi multiplier 4 par 3, c'eſt trouver 12, qui contient autant de fois 4 que 3 contient 1,

*61. & l'on a cette proportion 1 . 3 :: 4 . 12, & par conséquent * son alterne 1 . 4 :: 3 . 12.

D'où l'on voit que la multiplication d'un nombre entier comme 4, par un autre nombre entier comme 3, est l'addition du multiplié 4 réiterée autant de fois que l'unité est contenue dans le multiplicateur 3, car 1 . 3 :: 4 . 4 + 4 + 4 = 12.

SUPPOSITION OU DEMANDE.

78. ON suppose qu'on sçait les produits des neuf chifres 1, 2, 3, &c. multipliez les uns par les autres. On a mis ici la table qui contient tous ces produits pour les Commençans. La maniere de s'en servir est de prendre le chifre qui sert de multiplicateur dans la premiere colonne à gauche. Par exemple, si on veut multiplier 8 par 7, il faut prendre 7 dans la celule *a* de la premiere colonne. Il faut ensuite choisir la colonne au haut de laquelle se trouve le multiplié qui est ici 8; & la cellule *c* de cette colonne, qui se trouve vis-à-vis du multiplicateur 7, contient le produit 56 de 8 multiplié par 7. Il en est de même des autres.

Table de la Multiplication.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7 a	14	21	28	35	42	49	56 c	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

AVERTISSEMENT.

LES Commençans doivent apprendre par cœur cette table & se la rendre très familiere, s'ils veulent pratiquer facilement la Multiplication & la Division des nombres entiers; car les difficultez qu'ils pourront trouver dans la pratique de l'une & de l'autre, ne viendront que de ce qu'ils n'auront pas cette table assez familiere.

La Multiplication des nombres entiers.

PROBLÊME.

79. *MULTIPLIER un nombre entier quelconque qu'on nommera* b, *par un autre nombre entier qu'on appellera* a, *& en trouver le produit, qu'on marquera par* c.

38063	*b*
5042	*a*
76126	*d*
152252	*e*
....0	*f*
190315	*g*
191913646	*c*

REGLE *ou operation*. 1°. Il faut écrire le multiplicateur *a* sous le nombre à multiplier *b*, observant d'écrire les unitez de *a* sous les unitez de *b*, les dixaines de *a* sous le dixaines de *b*, & ainsi de suite. Il faut tirer une ligne au dessous.

*73. Comme il est indifferent * de prendre le multiplié pour le multiplicateur, & le multiplicateur pour le multiplié; il faut écrire, pour la facilité du calcul, le plus grand des deux nombres donnez le premier, & le moindre nombre au dessous, il sera le multiplicateur : neanmoins quand le plus petit des deux nombres donnez contient les plus grands chifres comme, 9, 8, 7, 6, & que le plus grand ne contient que les moindres chifres 1, 2, 3, 4, 5, ou qu'il contient plusieurs zeros, il faut écrire, pour la facilité du calcul, le plus petit nombre le premier, & écrire au dessous le plus grand qu'on prendra pour le multiplicateur.

2°. Il faut multiplier les unitez, les dixaines, les centaines, &c. du nombre à multiplier *b* par les chifres des unitez du multiplicateur *a*, & en écrire le produit *d* sous la ligne, en mettant les unitez du produit *d* au rang des unitez, les dixaines de ce produit au rang des dixaines, & ainsi de suite.

3°. Il faut de même multiplier le nombre *b* par le chifre des dixaines du multiplicateur *a*; mais il faut ne commencer à écrire le premier chifre à droite, du produit *e* qui en viendra, qu'au rang des dixaines.

4°. Il faut multiplier de la même maniere le nombre *b* successivement par les chifres des centaines, des mille, des dixaines de mille, &c. du multiplicateur *a*, en commençant d'écrire le premier chifre à droite de chacun des produits *f*, *g*, &c. qui viendront de ces multiplications, au rang du chifre qui sert de multiplicateur à chacun de ces produits; c'est à dire, le premier chifre du produit *f*, du nombre *b* multiplié par le chifre des centaines, ne doit s'écrire qu'au troisiéme rang, qui est le rang des centaines : de même le premier chifre du produit *g* du nombre *b* multiplié par le chifre des mille du multiplicateur *a*, ne doit s'écrire qu'au quatriéme rang qui est celui des mille, & ainsi de suite.

Quand il y a un zero dans le multiplicateur *a*, il suffit

d'écrire un zero pour le produit particulier du nombre *b* multiplié par zero, & il faut écrire ce zero au même rang où se trouve le zero du multiplicateur, c'est à dire au troisiéme rang, si le zero du multiplicateur est au troisiéme rang. Et s'il y avoit plusieurs zeros au multiplicateur, il suffiroit d'écrire autant de zeros aux rangs qui leur convienent pour le produit de chacun de ces zeros multipliant le nombre *b*.

5°. Enfin il faut tirer une ligne au dessous des produits particuliers qu'on vient de trouver; ajouter tous ces produits particuliers, & en écrire la somme *c* au dessous de la ligne qu'on vient de tirer. Cette somme *c* sera le produit du nombre *b* multiplié par le nombre *a*.

Ce qu'on vient de prescrire s'éclaircira par les exemples.

EXEMPLE I.

38063	*b*
5042	*a*
76126	*d*
152252	*e*
....0	*f*
190315	*g*
191913646	*c*

POUR multiplier 38063 par 5042, 1°, j'écris le premier nombre *b*, & au dessous le second *a*, les unitez sous les unitez, les dixaines sous les dixaines, &c. & je tire une ligne.

2°. Je multiplie le nombre *b* par le chifre 2 des unitez du multiplicateur *a*, en disant 2 fois 3 font 6, j'écris 6 sous la ligne au rang des unitez; & je dis ensuite 2 fois 6 font 12, j'écris 2 sous la ligne au rang des dixaines, & je retiens 1 pour le rang suivant; puis je dis 2 fois $0 = 0$; (car 0 ou rien multiplié tant de fois qu'on voudra n'est que zero ou rien) j'écris 1 que j'avois retenu au rang des centaines du produit *d*; & je dis 2 fois $8 = 16$, j'écris 6 au quatriéme rang du produit *d*, & je retiens 1; enfin je dis 2 fois 3 font 6 & 1 que je retenois font 7, j'écris 7 au cinquiéme rang, & le nombre *d* est le produit particulier du nombre *b* multiplié par le chifre 2 des unitez du multiplicateur *a*.

3°. Je multiplie le nombre *b* par le chifre 4 des dixaines du multiplicateur *a*, en disant $4 \times 3 = 12$, j'écris 2 au produit *e* au rang des dixaines; parceque le multiplicateur 4 vaut des dixaines, & je retiens 1 pour le rang suivant. Puis je dis $4 \times 6 = 24$, 24 & 1 que je retenois font 25, j'écris 5 au produit *e*, & je retiens 2. Et je dis $4 \times 0 = 0$; 0 & 2 que je retenois font 2, j'écris 2 au produit *e*. Je dis ensuite 4×8

$= 32$, j'écris 2 au produit *e*, & je retiens 3. Enfin je dis $4 \times 3 = 12$; 12 & 3 que je retenois font 15, j'écris 15 au produit *e*, & le nombre *e* eſt le produit du nombre *b* multiplié par le chifre 4 des dixaines du multiplicateur *a*.

4°. Je multiplie le nombre *b* par le chifre des centaines ou du troiſiéme rang du multiplicateur *a*; mais o ſe trouvant dans ce troiſiéme rang, & le produit d'un nombre multiplié par o ou rien, étant o ou rien, il faut écrire un zero au troiſiéme rang ſous les produits précedens pour occuper le troiſiéme rang, & pour faire ſouvenir qu'il faudra écrire le premier chifre du produit ſuivant au quatriéme rang.

Je paſſe donc à la multiplication du nombre *b* par le chifre 5 du quatriéme rang du multiplicateur *a*, & je dis $5 \times 3 = 15$; j'écris 5 au quatriéme rang du produit *g*, & je retiens 1; puis je dis $5 \times 6 = 30$; $30 + 1$ que je retenois $= 31$, j'écris 1 dans le produit *g*, & je retiens 3 pour le rang ſuivant, & je dis $5 \times 0 = 0$; $0 + 3 = 3$; j'écris 3 au produit *g*, & je dis $5 \times 8 = 40$; j'écris o au produit *g*, & je retiens 4, je dis enfin $5 \times 3 = 15$, & $15 + 4 = 19$, j'écris 19 au produit *g*, & le nombre *g* eſt le produit du nombre *b* multiplié par le chifre 5 du quatriéme rang du multiplicateur *a*.

5°. Enfin je tire une ligne ſous les produits que je viens de trouver, & je fais l'addition de tous ces produits particuliers $d + e + f + g$, & leur ſomme *c* eſt le produit total du nombre *b* multiplié par le multiplicateur *a*.

EXEMPLE II.

	9687	*b*
	30201	*a*
	9687	
	193740	
	290610	
	292557087	*c*

POUR multiplier les nombres *a* & *b* l'un par l'autre; & pour en trouver le produit, j'écris le nombre *b* le premier, quoiqu'il ſoit le plus petit, & j'écris au deſſous le nombre *a* que je prens pour le multiplicateur; parceque le nombre *a* contenant pluſieurs zeros & les moindres chifres, la multiplication en ſera plus facile à faire. Je tire une ligne, & je fais enſuite la multiplication du nombre *b* ſucceſſivement par les chifres des unitez, des dixaines, &c. du multiplicateur *a*, comme dans l'exemple précedent, & j'écris les produits de toutes ces multiplications particulieres, comme on le voit dans le ſecond exemple. Je tire une ligne au deſſous; je

je fais l'addition de tous les produits particuliers, & j'en écris la somme *c* sous la ligne que je viens de tirer, & cette somme *c* est le produit total qui vient de la multiplication du nombre *b* par le nombre *a*.

La maniere d'abreger la multiplication dans un cas qui est de grand usage.

80. QUAND l'un des deux nombres donnez à multiplier l'un par l'autre, ne contient que l'unité précedée d'un ou de plusieurs zeros, comme 10, 100, 1000, 10000, &c. il faut prendre ce nombre 10, 100, &c. pour le multiplicateur, & écrire simplement devant l'autre, le nombre des zeros du multiplicateur, & il deviendra par là le produit que l'on cherche. Ainsi pour multiplier 379 par 10, il faut écrire 3790 pour le produit. Pour multiplier le même nombre 379 par 100, par 1000, par 10000, &c. il faut écrire pour le produit 37900, 379000, 3790000, &c. En voici la raison: Multiplier un nombre par 10, par 100, par 1000, &c. c'est trouver le nombre qui le contient 10 fois, 100 fois, &c. ou ce qui revient au même; c'est trouver le nombre qui vaut 10 fois plus, 100 fois plus, 1000 fois plus, &c. que le nombre proposé. Or * en mettant * 15.
0 devant le nombre proposé 379, on le fait valoir 10 fois plus qu'il ne valoit; en mettant 00, on le fait valoir 100 fois plus; en mettant 000, on le fait valoir 1000 fois plus, &c. Par conséquent en écrivant 0, 00, 000, &c. devant un nombre donné, on le multiplie par 10, par 100, &c.

COROLLAIRE I.

81. DANS la multiplication d'un chifre du multiplié *b* par un chifre du multiplicateur *a*, il y a devant leur produit autant de rangs, qu'il y en a ensemble devant le chifre multipliant, & devant le chifre multiplié.

Par exemple, quand on multiplie un chifre 3 qui est au quatriéme rang, & qui a trois rangs devant lui, par un chifre 2 qui est au troisiéme rang, & qui a deux rangs devant lui; il y a devant leur produit 6, trois rangs plus deux rangs, c'est à dire cinq rangs, & ce produit est au sixiéme rang.

3000
200
600000

Cela eſt évident ; car multiplier 3000 par 200, eſt la même choſe que de multiplier 3000 par 100, moitié de 200, puis de multiplier encore 3000 par 100, & d'ajouter enſuite en une ſomme les deux produits qui ſont chacun 300000 ; & cette ſomme eſt le produit de 3000 par 200. Or par *l'article* 80, dans chacun des produits de 3000 multiplié par 100, qui eſt 300000, il y a cinq rangs devant le produit 3 fait de 3 multiplié par 1 ; & dans la ſomme 600000 de ces deux produits, il y a le même nombre de rangs, c'eſt à dire cinq rangs devant 6, qui eſt le produit de 3 par 2. Donc, &c.

3000	3000
100	100
300000	300000

300000
300000
600000

COROLLAIRE II.

82. LE Corollaire précedent fournit une maniere d'abreger la multiplication, quand le multiplié *b* & le multiplicateur *a* ſont des nombres qui contiennent chacun pluſieurs zeros au devant des chifres. Car pour multiplier *b* 530000 par *a* 24000, il ſuffit de multiplier 53 par 24, & d'ajouter à leur produit 1272 autant de zeros qu'il y en a devant les deux nombres 53 & 24, c'eſt à dire ſept zeros, & 12720000000 ſera le produit du nombre *b* multiplié par le nombre *a*.

Démonſtration du Problême.

*81. IL eſt évident par le premier Corollaire * & par l'operation même, qu'en ſuivant ce qui eſt preſcrit dans la regle de
*79. la multiplication *, le nombre *c* contient le multiplié *b* autant de fois que l'unité eſt contenue dans les chifres des unitez, des dizaines, des centaines, &c. du multiplicateur *a*, c'eſt à dire autant de fois que l'unité eſt contenue dans le multiplicateur *a*. Donc le nombre *c*, que fait découvrir la Re-
*79. gle * de la multiplication, eſt ** le produit du nombre *b* par
**77. le nombre *a*. *Ce qu'il falloit démontrer*.

REMARQUE.

83. SI l'on avoit plus de deux nombres entiers à multiplier les uns par les autres, il faudroit d'abord multiplier les deux premiers l'un par l'autre, & multiplier enſuite le produit des

deux premiers par le troisiéme, puis le produit des trois premiers par le quatriéme, & ainsi de suite; & le dernier produit qu'on trouveroit, seroit le produit de tous les nombres donnez les uns par les autres.

La multiplication des nombres qui contiennent des parties décimales.

84. La multiplication de deux nombres *b* & *a*, qui contiennent des parties décimales, se fait comme la multiplication de deux nombres entiers. Il faut écrire ces nombres *b* & *a* l'un sous l'autre comme s'ils étoient entiers; il faut ensuite multiplier le nombre *b* par le nombre *a*, comme dans les nombres entiers, & en écrire le produit *c*. La seule Regle particuliere à la multiplication de ces nombres, est que pour distinguer, dans le produit, les parties décimales d'avec les entiers, il faut mettre autant de rangs dans le produit *c*, pour les parties décimales, qu'il y en a dans les nombres *b* & *a* pris ensemble. Par exemple, il y a trois rangs de parties décimales dans *b*, & deux rangs dans *a*, ce qui fait ensemble cinq rangs; il faut mettre dans le produit *c* le point qui distingue les parties décimales avant le cinquiéme rang, de façon qu'il y ait cinq rangs de parties décimales dans le produit *c*.

I. EXEMPLE.

1.234^{iii}	*b*
2.13^{ii}	*a*
3702	
1234	
2468	
2.62842^{v}	*c*

Il y a plusieurs cas de la multiplication des nombres qui contiennent des parties décimales, dans lesquels le produit ne contient que des parties décimales sans entiers, comme on le voit dans le second & dans le troisiéme exemple. Dans ce cas, la multiplication se fait de la même maniere que dans le premier exemple, il faut seulement avoir soin de bien distinguer par des zeros les rangs des parties décimales, & de mettre le point qui distingue les parties décimales d'avec les entiers à la gauche au devant

II. EXEMPLE.

4.0942
0.0231
40942
122826
81884
0.09457602^{viii}

III. EXEMPLE.

0.00324
0.00032
648
972
0.0000010368^{x}

de tous ces rangs, & un zero plus à gauche que n'eſt ce point, pour diſtinguer la place des entiers, & mettre ce point dans le produit de façon qu'il y ait autant de rangs vers la droite après le point, qu'il y a de rangs de parties décimales dans le multiplicateur & dans le multiplié pris enſemble ; c'eſt à dire, il doit y avoir huit rangs après le point vers la droite dans le ſecond exemple, & onze rangs dans le troiſiéme exemple.

Démonſtration de la multiplication des nombres qui contiennent des parties décimales.

I. EXEMPLE.

1.2 3 4'''	b
2. 1 3''	a
3 7 0 2	
1 2 3 4	
2 4 6 8	
2. 6 2 8 4 2 v	c

85. ON ſe ſervira du premier exemple pour faire la démonſtration, & on va démontrer
*84. que le produit *c*, trouvé par la regle *, eſt le veritable produit de *b* multiplié par *a*. Pour rendre la démonſtration plus diſtincte, on nommera b le nombre entier 1234, & *b* le nombre décimal 1.234. On nommera a le nombre entier 213, & *a* le nombre décimal 2. 13. On appellera c le nombre entier 262842, & *c* le nombre décimal 2.62842.

*79. 1°. Il eſt évident * que 262842 (c) eſt le produit des nombres entiers 1234 (b) & 213 (a) multipliez l'un par l'au-
*79. tre. Par conſequent * 262842 (c) = 213 × 1234 (a × b.)

Le produit de 1. 234 (*b*) par 213 (a) peut être repré-
*75. ſenté par a × *b*. Or * $\frac{b}{b} = \frac{a \times b}{a \times b}$. C'eſt à dire $\frac{1234}{1.234} = \frac{213 \times 1234}{213 \times 1.234}$. dans le premier rapport le ſecond terme qui eſt le nombre
*18. décimal 1. 234 (*b*) vaut * mille fois moins que le premier terme qui eſt le nombre entier 1234 (*b*.) Donc, dans le ſecond rapport le produit a × *b*, qui en eſt le ſecond terme, doit valoir mille fois moins que le produit a × b, qui eſt 262842 (c.) Or pour faire valoir 262842 mille
*18. fois moins qu'il ne vaut, il faut écrire * 262. 482. Ainſi l'on a déja démontré qu'en multipliant un nombre décimal 1. 234 (*b*) par un nombre entier 213 (a,) le produit 262. 482, qui eſt repréſenté par a × *b*, doit avoir autant de rangs de parties décimales, qu'en a le nombre décimal à multiplier, qui eſt 1. 234 (*b*.)

2°. Le produit du nombre décimal 1. 234 (*b*) multiplié par le nombre décimal 2. 13 (*a*,) peut être repréſenté par *a* × *b*.

Or * $\frac{b}{a} = \frac{a \times b}{a \times b}$: & dans le premier rapport le consequent 2.13 (a) * vaut cent fois moins que l'antecedent 213 (a.) Donc le consequent $a \times b$ du second rapport doit valoir cent fois moins que l'antecedent 262.842 ($a \times b$.) * 75. * 18.

Mais pour faire valoir 262.842 ($a \times b$) cent fois moins qu'il ne vaut *, il faut reculer vers la gauche le point de deux rangs, & écrire 2.62842 ($c = a \times b$.) Par consequent 2.62842 (c) est le veritable produit du nombre décimal 1.234. (b) multiplié par le nombre décimal 2.13 (a.) Et l'on a démontré qu'il faut prendre dans le produit de deux nombres qui contiennent chacun des parties décimales, autant de rangs pour le parties décimales qu'il y en a dans les nombres multipliez l'un par l'autre pris ensemble. * 18.

Usage de la multiplication pour les nombres de differentes especes.

86. DANS les nombres de differentes especes, la multiplication sert à réduire les plus grandes especes aux moindres. Cette réduction se fait en multipliant le nombre de l'espece qu'on veut réduire à une moindre par le nombre qui exprime combien de fois cette moindre espece est contenue dans la plus grande qu'on veut réduire à cette moindre espece, le produit sera cette plus grande espece réduite à cette moindre espece.

Par exemple, pour réduire une longueur de 10 toises en pieds, il faut multiplier 10 toises par le nombre 6, qui exprime combien de fois un pied est dans une toise, & le produit sera 60 pieds. Ainsi 10 toises valent 60 pieds.

Pour réduire 60 pieds en pouces, il faut multiplier 60 pieds par le nombre 12, qui exprime combien de fois un pouce est dans une toise, & le produit sera 720 pouces. Ainsi 60 pieds réduits en pouces valent 720 pouces.

Pour réduire 10 toises immediatement en pouces, il faut multiplier 10 toises par le nombre 72 qui exprime combien de fois un pouce est dans une toise, & l'on aura le produit 720 pouces pour la valeur de 10 toises réduites en pouces.

De même dans le Commerce, pour réduire un nombre des livres comme 10 livres, en sous; il faut multiplier 10 livres par 20, & le produit 200 sous sera la valeur de 10 livres ré-

duites en ſous. Pour réduire immédiatement 10 livres en deniers, il faut multiplier 10 livres par le nombre 240, qui exprime combien de fois un denier eſt dans une livre, & le produit 2400 deniers ſera la valeur de 10 livres réduites en deniers.

Cette réduction des plus grandes eſpeces aux moindres eſt évidente par elle-même.

La Multiplication des nombres de differentes eſpeces.

REGLE GENERALE.

87 POUR multiplier un nombre *b*, qui contient differentes eſpeces par un autre nombre *a*, qui contient auſſi differentes eſpeces, la regle generale eſt qu'il faut réduire l'un & l'autre chacun à ſa moindre eſpece, & multiplier enſuite les deux nombres réduits aux moindres eſpeces l'un par l'autre; le nombre qui viendra de cette multiplication ſera le produit des deux nombres *b* & *a* réduits à la moindre eſpece. On réduira enfin ce produit aux plus grandes eſpeces qu'il contient par le moyen de la Diviſion, comme on l'enſeignera dans la ſection où l'on expliquera la Diviſion.

EXEMPLE.

SUPPOSE' qu'on ait fait le prix d'une toiſe de maçonerie à 20 liv. 5 ſous 6 deniers; combien faut-il payer, pour 10 toiſes 3 pieds 6 pouces? Il eſt viſible qu'il faut multiplier les 10 toiſes 3 pieds 6 pouces par 20 liv. 5 ſols 6 deniers pour en ſçavoir le prix. Selon la regle il faut réduire 20 livres 5 ſous 6 deniers en déniers, & l'on trouvera 4866 deniers. Il faut auſſi réduire en pouces les 10 toiſes 3 pieds 6 pouces, & l'on trouvera 762 pouces. Enfin il faut multiplier 762 pouces par 4866 deniers, & l'on trouvera pour le produit 3707892 deniers; c'eſt le prix de 10 toiſes 3 pieds 6 pouces. On apprendra dans la Diviſion le moyen de trouver les livres, les ſous & les deniers que contient ce produit.

Cet exemple ſuffit pour faire concevoir clairement la multiplication des nombres de differentes eſpeces.

La Multiplication des grandeurs litterales.

DE'FINITION.

88. POUR marquer que deux grandeurs litterales *a* & *b* ſont multipliées l'une par l'autre, on les joint immédiatement. Ainſi *ab* marque le produit de *b* multipliée par *a*. De même *abc* marque le produit des trois grandeurs *a*, *b*, *c* multipliées les unes par les autres. *abcd* marque le produit des quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, multipliées les unes par les autres, & ainſi des autres.

On peut auſſi exprimer le produit de deux grandeurs *a* & *b*, en ſe ſervant de cette marque × de la multiplication, & le produit ſera $a \times b$; mais dans le calcul litteral il eſt plus court de ſe ſervir de la premiere maniere, & l'on n'employe d'ordinaire la marque × dans la multiplication des grandeurs litterales, que quand les grandeurs ſont complexes, & encore ne s'en ſert-on que quand l'on a beſoin de diſtinguer les grandeurs complexes multipliées les unes par les autres, qui ſe confondroient par la multiplication; & quand on employe la marque × pour la multiplication des grandeurs complexes, on tire une ligne ſur chacune des grandeurs complexes multipliées les unes par les autres, de cette façon $\overline{ab + bc} \times \overline{ac + cd}$; ce qui ſignifie que la grandeur complexe $\overline{ab + bc}$, qui eſt ſous la premiere ligne, eſt multipliée par la grandeur complexe $\overline{ac + cd}$ qui eſt ſous la ſeconde ligne.

Quand il n'y a que deux grandeurs *a* & *b* multipliées l'une par l'autre, on dit que le produit *ab* eſt *de deux dimenſions*, quelques uns le nomment auſſi produit *plan*, ou ſimplement *le plan* des grandeurs *a* & *b*; quand il y a trois grandeurs, on dit que le produit *abc* eſt *de trois dimenſions;* quelques-uns nomment auſſi le produit *abc le ſolide* des trois grandeurs *a*, *b*, *c;* quand il y a quatre grandeurs, on dit que le produit *abcd* eſt *de quatre dimenſions;* & ainſi à l'infini. On nomme auſſi les grandeurs multipliées les unes par les autres *les côtez*, & encore *les dimenſions* ou *les multiplicateurs* du produit.

89. Quand les dimenſions d'un produit ſont égales, c'eſt à dire quand c'eſt la même grandeur qui eſt multipliée par elle-même, comme *aa*, *aaa*, *aaaa*, &c. on nomme le produit *une*

puissance de la grandeur *a* qui est multipliée par elle même; & la grandeur *a*, qui est ainsi multipliée par elle même, s'appelle *la racine* de cette puissance. *aa* est la seconde puissance de *a*; *aaa* en est la troisiéme puissance; *aaaa* la quatriéme puissance, & ainsi de suite; *a* est aussi la racine deuxiéme de *aa*, la racine troisiéme de *aaa*; & ainsi de suite.

Pour abreger, au lieu d'écrire dans chaque puissance d'une grandeur comme *aa*, *aaa*, *aaaa*, cette grandeur *a* autant de fois que la puissance a de dimensions égales, on écrit la grandeur *a* une seule fois, & l'on écrit au haut de cette grandeur vers la droite, en moindre caractere, le nombre qui exprime combien de fois cette puissance contient la lettre *a*, de cette maniere a^2, a^3, a^4, a^5, &c. Ces nombres 2, 3, 4, 5, &c. écrits au haut de la grandeur *a*, s'appellent *les exposans* des puissances de la grandeur *a*. Ainsi a^2 est la seconde puissance de *a*; a^3 en est la troisiéme puissance; a^4 la quatriéme puissance; & ainsi à l'infini. Et la grandeur *a* est la racine deuxiéme de a^2, la racine troisiéme de a^3, &c. Une grandeur litterale, qui n'est multipliée par aucune autre; se nomme *grandeur lineaire*; ainsi *a*, *b*, $a + b$, &c. sont des grandeurs lineaires.

Neanmoins on ne laisse pas de nommer une grandeur lineaire *a*, la premiere puissance de cette grandeur, & on lui donne l'unité pour exposant, de cette maniere a^1; ce qui signifie simplement *a*. On distingue aussi les puissances d'une grandeur *par degrez*; & l'on dit que a^1 est la puissance de *a* *du premier degré*; a^2 la puissance *du second degré*; a^3 la puissance de *a* *du troisiéme degré*; & ainsi de suite.

COROLLAIRE.

90. L'UNITE' étant multipliée par elle-même, le produit est
*72. l'unité; * car 1 . 1 :: 1 . 1. D'où l'on voit que toutes les puissances de l'unité sont toujours chacune l'unité.

REMARQUES.

I.

CES manieres de marquer la multiplication des grandeurs litterales en les joignant ensemble, ou en mettant entre-deux le signe de la multiplication; comme aussi la maniere d'exprimer

primer les puissances des grandeurs par les nombres qui en sont les exposans, sont des signes arbitraires : c'est pourquoi on les a fixez à cela par des définitions de nom, comme l'on a déterminé le signe + pour marquer l'addition des grandeurs litterales comme dans $a + b$, le signe — pour en marquer la soustraction ou le retranchement comme dans $a - b$. C'est de la même maniere qu'on a déterminé les caracteres des neuf chifres à exprimer les nombres jusqu'à neuf, & qu'on a employé la disposition de ces chifres en differens rangs successivement de droite à gauche, à faire valoir ces chifres selon la progression ∺ 1. 10. 100. 1000, &c. Cela est cause que ces expressions n'ont pas besoin de démonstration. Cependant ces expressions servent à apprendre facilement toutes les Mathematiques, & à découvrir la résolution de leurs Problêmes d'une maniere aisée, courte & generale.

2.

On doit remarquer que l'expression a^3, par exemple, est bien differente de $3a$; car supposant $a = 3$, l'expression a^3 marque le produit $3 \times 3 \times 3 = 27$, & l'expression $3a$ marque la somme $3 + 3 + 3 = 9$.

COROLLAIRE I.

91. PUISQUE ab * est le produit de b par a, l'on a cette proportion * $1 . a :: b . ab$, & son alterne $1 . b :: a . ab$. Et generalement, en partageant un produit quelconque abc en deux parties a & bc, qui étant multipliées l'une par l'autre forment ce produit abc, l'on aura toujours cette proportion $1 . a :: bc . abc$, & son alterne $1 . bc :: a . abc$. * 72. * 74.

COROLLAIRE II.

92. TOUTE grandeur a peut être regardée comme étant le produit de cette grandeur a par l'unité. C'est à dire, on peut regarder a comme égale à $1 \times a$; de même on peut considerer abc comme égale à $1 \times abc$. Car * $1 . 1 :: a . 1 \times a$. De même $1 . 1 :: abc . 1 \times abc$. Ce qu'on peut aisément appliquer à toutes les grandeurs. * 171

THEOREME.

93. QUAND on multiplie plusieurs grandeurs comme *a*, *b*, *c*, les unes par les autres, quelqu'ordre qu'on observe, le produit est toujours le même. C'est à dire les produits *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* sont des grandeurs égales; & de même tous les produits qu'on peut former de quatre grandeurs sont égaux; tous les produits qu'on peut faire de cinq grandeurs sont égaux; & ainsi à l'infini.

Préparation pour la démonstration. Une même grandeur *a* ne peut être prise qu'une fois. Deux grandeurs *a* & *b* peuvent recevoir des arrangemens, *ab*, *ba*. Trois grandeurs *a*, *b*, *c* peuvent recevoir 2 fois 3 ou 6 arrangemens; car chacune de trois étant mise dans le premier rang, les deux autres peuvent recevoir deux arrangemens, ce qui fait 2 fois 3 ou 6 arrangemens que voici : *abc*, *acb*; *bac*, *bca*; *cab*, *cba*. Quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d* peuvent recevoir 4 fois 6 ou 24 arrangemens : car chacune étant mise au premier rang, les trois autres peuvent recevoir six arrangemens, ce qui en fait 4 foi 6 ou 24 que voici : *abcd*, *abdc*, *acbd*, *acdb*, *adbc*, *adcb*. *bacd*, *badc*, *bcad*, *bcda*, *bdac*, *bdca*. *cabd*, *cadb*, *cbad*, *cbda*, *cdab*, *cdba*. *dabc*, *dacb*, *dbac*, *dbca*, *dcab*, *dcba*. D'où l'on voit clairement que cinq grandeurs pourront recevoir 5 fois 24 ou 120 arrangemens; six en pourront recevoir 6 fois 120, ou 720; sept, 7 fois 720, &c. & que pour trouver le nombre de ces arrangemens, il n'y a qu'à prendre successivement les produits des nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9, &c. Par exemple, pour avoir le nombre des arrangemens de sept gandeurs, il faut prendre le produit de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$. Et pourvû qu'on aille de suite, on marquera facilement tous ces arrangemens.

Il faut, pour démontrer le Theorême, faire voir que les produits qui naissent de tous les arrangemens de deux grandeurs litterales *a* & *b*, sont égaux; que tous ceux qui viennent de trois *a*, *b*, *c* sont égaux, & de même ceux qui viennent de quatre *a*, *b*, *c*, *d* &c.

L'on a déja démontré (*dans l'article* 73) que les produits *ab*, *ba* sont égaux; on va démontrer l'égalité des six produits qui peuvent se former de trois grandeurs *a*, *b*, *c*, l'égalité des produits qui peuvent se former de quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*; & ainsi à l'infini.

Démonstration du Théorême.

IL est évident que $a \times bc = a \times cb$ *; & de même * $b \times ac$ = $b \times ca$; & $c \times ab = c \times ba$. *73. & 76. *73.

Ainsi en démontrant que $abc = bca$, & $acb = cba$; on démontrera que les six produits sont égaux. En voici les démonstrations. 1re. $a \times bc =$ * $bc \times a$, & $a \times cb =$ * $cb \times a$. *73.

2e. $1 . a :: bc . a \times bc$ *; donc l'on aura l'alterne $1 . bc :: a . bc \times a$. Or les trois premiers termes de ces deux proportions sont les mêmes, les quatriémes sont donc aussi les mêmes *. Ainsi $abc = bca$. *72. *54.

De même * $1 . a :: cb . a \times cb$; par consequent l'on aura la proportion alterne $1 . cb :: a . cb \times a$. Les trois premiers termes sont les mêmes dans ces deux proportions : donc $acb = cba$. *Cette 2e démonstration n'est que la premiere plus étendue.* *72.

On a donc démontré que les six produits qu'on peut former des trois grandeurs a, b, c, sont égaux : voici la démonstration pour les produits qui peuvent être formez de quatre grandeurs, ensuite de cinq grandeurs, &c.

Parmi les 24 produits qu'on peut former des 4 grandeurs a, b, c, d, il est évident, par la démonstration précedente pour les produits des trois grandeurs, & *par l'article 76*, où l'on a démontré que les grandeurs égales étant multipliées par la même grandeur, les produits sont égaux ; il est, dis-je, évident que les six produits dans lesquels chacune des lettres a, b, c, d occupe le premier rang, sont égaux entr'eux. Et il est facile de prouver, comme dans les démonstrations qui précedent pour les produit des trois grandeurs, qu'il y a un produit dans les six, dont a occupe la premiere place, égal à un des six produits, où chacune des trois autres grandeurs b, c, d occupe la premiere place.

1re *Démonstration.* $a \times bcd$ * $= bcd \times a$; $abd \times c =$ * $c \times abd$; $acb \times d =$ * $d \times acb$. *73. *73.

2e. *Pour les deux premiers produits.* On a cette proportion $1 . a :: bcd . a \times bcd$. Et son alterne $1 . bcd :: a . bcd \times a$. Par consequent $abcd = bcda$. Ce qu'on peut si facilement étendre aux autres produits, qu'il est inutile de s'y arrêter.

Il est clair que les mêmes démonstrations peuvent s'appliquer de la même maniere à prouver l'égalité de tous les produits qui peuvent se former de cinq grandeurs a, b, c, d, e;

& ensuite à tous ceux qui peuvent être formez de six grandeurs a, b, c, d, e, f; & ainsi de suite à l'infini.

REMARQUE.

QUOIQU'IL soit indifferent d'avoir égard à l'ordre des grandeurs litterales dans les produits qui en sont formez, il est bon neanmoins de s'accoutumer à mettre dans les produits les lettres suivant le rang qu'elles occupent dans l'alphabet; ainsi il est bon d'écrire *abcd*, plûtôt que *bdca*; & ainsi des autres. Cet ordre auquel on est accoutumé par l'alphabet soulage la mémoire, & peut prévenir beaucoup d'erreurs dans les calculs.

La Multiplication des grandeurs litterales incomplexes.

PROBLÊME II.

94. QUAND on veut multiplier une grandeur incomplexe, comme $+ 3a$ par une autre grandeur incomplexe $- 4bc$; il y a trois choses à faire pour en former le produit; 1°. Il faut trouver le produit des lettres, & cela n'a aucune difficulté; car il n'y a qu'à joindre les lettres, & le produit en sera *abc*. 2°. Il faut multiplier, par la regle de la multiplication des nombres entiers, les nombres qui précedent les grandeurs litterales dans le multiplié $3a$, & dans le multiplicateur $4bc$, & en écrire le produit devant celui des lettres & l'on aura $12abc$. 3°. Il faut trouver quel doit être le signe qui doit préceder le produit, en voici la regle.

Regle pour le signe du produit dans la Multiplication.

95. QUAND les signes du multiplicateur & du multiplié sont tous deux +, ou tous deux —, le signe du produit doit être +. Ainsi $+ 3a \times + 4bc = + 12abc$, & $- 3a \times - 4bc = + 12abc$.

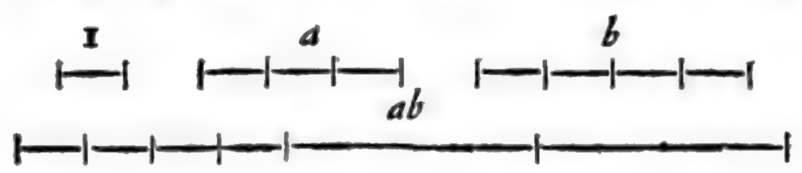
Quand les signes du multiplicateur & du multiplié sont differens, & que l'un est + & l'autre —, le signe du produit doit être —. Ainsi $+ 3a \times - 4bc = - 12abc$, & $- a \times + 4bc = - 12abc$.

Supposition pour la démonstration.

L'UNITE' positive est toujours le premier terme de la proportion, dont les deux grandeurs multipliées l'une par l'autre sont le second & le troisiéme terme, & dont le produit est le quatriéme terme.

Démonstration de la Regle sur les signes des produits.

QU'ON conçoive que l'unité 1, la grandeur *a* qui est le multiplicateur, la grandeur *b* qui est le multiplié, & la grandeur *ab* qui est le produit, sont quatre lignes droites, & pour une plus grande facilité que *a* contient trois fois la li-



gne 1; que *b* contient quatre fois la ligne 1: la ligne qui est le produit *ab* doit contenir trois fois le multiplié *b*. Ainsi $a = 3$, $b = 4$, $ab = 12$.

I. CAS.

Quand l'unité positive est par addition dans le multiplicateur.

L'UNITE' est supposée toujours positive dans la multiplication. Quand le multiplicateur a +, 1°. Si le multiplié a aussi +, le produit aura +; 2°. Si le multiplié a —, le produit aura —.

Le multiplié *b* (4) doit être dans le produit *ab* (12) autant de fois & de la même maniere que l'unité positive + 1 est dans le multiplicateur *a* (3.) Or + 1 peut être dans le multiplicateur *a* (3) par addition ou par retranchement. C'est par addition quand le multiplicateur *a* (3) est positif, c'est à dire quand c'est + *a* (+ 3.) Ainsi quand le multiplié + *b* (+ 4) est aussi positif, devant être aussi par addition dans le produit; ce produit est par consequent positif, c'est à dire + *ab* (+ 12.) D'où l'on voit que *quand le multiplié* + b, *& le multiplicateur* + a *ont tous deux* +, *le produit doit avoir* +. De même quand le multiplié — *b* (— 4) est negatif, il doit être par addition dans le produit. Et l'addition de trois fois — *b* (— 4) est * — 12, & en lettres — *ab*. D'où l'on *26.

voit que *quand le multiplicateur a le signe + & le multiplié le signe —, le produit doit avoir le signe —.*

II. CAS.

Quand l'unité positive est retranchée du multiplicateur.

QUAND le multiplicateur a —; 1°. Si le multiplié a —, le produit aura +: 2°. Si le multiplié a +, le produit aura —.

L'unité positive + 1 peut être, pour ainsi dire, par retranchement dans le multiplicateur, ou plûtôt elle peut être retranchée du multiplicateur, & elle en est toujours retranchée quand le multiplicateur — *a* (— 3) est négatif. Donc si le multiplié — *b* (— 4) est aussi negatif, il doit être autant retranché du produit que l'unité positive + 1 est retranchée du multiplicateur — *a* (— 3.) Or pour retrancher une grandeur
* 27. qui a le signe —, il faut * l'écrire avec le signe +. Donc pour retrancher — 4 trois fois, il faut écrire + 12; ainsi *le produit* + ab (+ 12) *doit avoir le signe + quand le multiplicateur & le multiplié ont tous deux le signe —.* De même quand le multiplicateur — *a* (— 3) a le signe —, & le multiplié + *b* (+ 4) a le signe +, le multiplié doit être autant retranché du produit, que l'unité positive + 1 est retranchée du multiplicateur négatif — *b* (— 3.) Or pour retrancher une
* 27. grandeur qui a le signe +, il faut l'écrire * avec le signe —; donc pour avoir le produit de + *b* (+ 4) par — *a* (— 3,) il faut retrancher trois fois + 4; c'est à dire, il faut écrire le produit — 12, & en lettres — *ab*. Donc *quand le multiplicateur a le signe —, & le multiplié le signe +, le produit doit avoir le signe —.*

La multiplication des grandeurs litterales doit être generale, & convenir non-seulement aux nombres entiers, mais encore à toutes sortes de grandeurs, c'est à dire aux nombres rompus, & aux grandeurs incommensurables: c'est pourquoi après avoir fait la démonstration de la regle pour le signe du produit, par rapport aux nombres entiers, comme étant la plus facile, on va la rendre generale pour toutes sortes de grandeurs.

On peut concevoir que les quatre lignes droites 1, *a*, *b*, *ab*, dont la premiere est toujours prise pour l'unité positive, représentent deux rapports égaux quelconques; c'est à dire que $\frac{1}{a} = \frac{b}{ab}$. Et l'unité étant le premier terme de la pro-

portion, le quatriéme terme, c'est à dire la ligne *ab* * est le produit du second & du troisiéme termes multipliez l'un par l'autre. *72.

Par consequent si l'on conçoit le premier terme 1 & le troisiéme *b* partagé en un même nombre *n* de parties égales, quel que soit ce nombre, (nommant *x* chaque partie égale de 1, & *y* chaque partie égale de *b*) le premier consequent *a* * doit contenir autant de *x* que le second *ab* contient de *y*; (on nommera ce nombre *m*) & s'il y a un petit reste de plus dans *a* *, il doit y avoir de même un petit reste dans *ab* de plus que les parties égales *y*. Et quand ces restes s'y trouvent, la proportion $\frac{1}{a} = \frac{b}{ab}$ convient aux grandeurs incommensurables: & *ab* est * le produit des grandeurs incommensurables *a* & *b*. Ou bien (pour comprendre les grandeurs incommensurables avec les commensurables *) quand le nombre *n* des *x* comprises dans l'unité, & des *y* comprises dans *b*, est le même nombre fini pour les grandeurs commensurables, & infini pour les incommensurables; *a* doit contenir *x* un certain nombre de fois qu'on nommera *m*, & *ab* doit contenir *y* le même nombre de fois *m*, & ce nombre *m* est fini quand les grandeurs sont commensurables, & infini quand elles sont incommensurables. *47. *50. *72. *51.

I. CAS.

OR quand le multiplicateur *a* est positif, *x* (aliquote positive de l'unité) est contenue par addition dans le multiplicateur; donc, 1°, si le multiplié + *b* est positif, & par consequent les *y* de *b* positives, ces *y* doivent être contenues par addition dans le produit *ab*; par consequent le produit *ab* doit avoir +. Donc, 2°, si le multiplié — *b* est négatif, & par consequent, les parties égales *y* qui le composent, négatives, ces *y* negatives doivent être contenues par addition dans le produit *ab*, qui aura par consequent * le signe —. *16 & 27.

II. CAS.

MAIS quand le multiplicateur — *a* est négatif; *x* (aliquote positive de l'unité) est retranchée du multiplicateur — *a* autant de fois que l'exprime le nombre *n*. Donc, 1°, si le multiplié — *b* est aussi négatif, & par consequent les *y* de — *b* négatives, ces — *y* négatives dans — *b* doivent être retranchées dans le produit *ab*; & par consequent le pro-

*26 & 27. duit *ab* * doit avoir le ſigne +. Donc, 2°, ſi le multiplié + *b* eſt poſitif, & par conſequent les *y*, que contient + *b*, poſitives; ces *y* poſitives dans + *b*, doivent être retranchées *26 & 27. dans le produit *ab*; & par conſequent le produit *ab* * doit avoir le ſigne —.

COROLLAIRES *ſur les ſignes des produits.*

1.

96. LORSQUE le multiplicateur a le ſigne —, le produit a toujours un ſigne different du ſigne du multiplié.

2.

97. Quand le multiplicateur a le ſigne +, le produit a le même ſigne que le multiplié.

3.

98. Quand il y a pluſieurs grandeurs multipliées les unes par les autres, ſi elles ont chacune le ſigne —, & qu'elles ſoient en nombre pair comme deux, quatre, ſix, &c. le produit aura toujours le ſigne +; & ſi elles ſont en nombre impair, comme trois, cinq, ſept, &c. il aura le ſigne —. Si parmi ces grandeurs multipliées les unes par les autres quelques-unes ont le ſigne —, & d'autres le ſigne +, quand le nombre de celles qui ont le ſigne — eſt pair, le produit aura le ſigne +; quand le nombre de celles qui ont le ſigne — eſt impair, le produit aura le ſigne —.

4.

99. Toute puiſſance paire poſitive d'une grandeur comme $+a^2$, $+a^4$, $+a^6$, $+a^8$, &c. peut avoir pour racine la grandeur $+a$ poſitive, & la même grandeur $-a$ négative. Car par exemple, $+a \times +a \times +a \times +a = +a^4$, & $-a \times -a \times -a \times -a = +a^4$. Mais une puiſſance impaire négative d'une grandeur *a* comme $-a^3$, $-a^5$, &c. a toujours pour racine cette grandeur $-a$ négative; & une puiſſance impaire poſitive a toujours pour racine la grandeur *a* poſitive.

5.

100. On ne ſçauroit ſuppoſer aucune grandeur réelle qui puiſſe être

être la racine de la puiſſance paire d'une grandeur, quand cette puiſſance a le ſigne —; par exemple, on ne ſçauroit ſuppoſer de racine réelle à aucune des puiſſances — a^2, — a^4, — a^6, — a^8, &c. Car cette racine réelle qu'on ſuppoſeroit, auroit neceſſairement l'un des ſignes + ou —; or en ſuppoſant que cette grandeur ait +, ſa puiſſance paire aura +; en ſuppoſant que cette grandeur ait —, ſa puiſſance paire aura toujours le ſigne +. Donc, &c.

Suppoſé qu'on imagine la racine 2ᵉ de — a^2, la racine 4ᵉ de — a^4, la racine 6ᵉ de — a^6, &c. cette racine eſt *une grandeur impoſſible*, & on l'appelle à cauſe de cela *une racine imaginaire*.

Exemples de la Multiplication des grandeurs incomplexes.

POUR multiplier $+15a^2b$ par $-10abc$, 1°, je dis + par — donne le ſigne — pour le produit. 2°. $10 \times 15 = 150$. 3°. $a^2b \times abc = a^3b^2c$. J'écris donc le produit $-150a^3b^2c$. On fera de même les autres multiplications qu'on voit ici.

EXEMPLE I.	EXEMPLE II.	EXEMPLE III.
$+15a^2b$	$-a^3x^2$	$-abc$
$-10abc$	$-ax$	$+5a^2c$
$-150a^3b^2c$	$+a^4x^3$	$-5a^3bc^2$

La Multiplication des grandeurs litterales complexes.

PROBLÊME

MULTIPLIER *une grandeur litterale complexe par une autre grandeur litterale complexe.*

101. REGLE *ou operation*. 1°. Il faut écrire la premiere grandeur complexe à multiplier, écrire au deſſous le multiplicateur, & tirer une ligne au deſſous. 2°. Il faut, comme dans la multiplication des nombres, multiplier toute la grandeur à multiplier par la premiere grandeur incomplexe du multiplicateur, par la ſeconde grandeur incomplexe du multiplicateur, par la troiſiéme, & ainſi de ſuite, & en écrire les produits ſous la ligne les uns ſous les autres, & tirer une ligne au deſſous de ces produits. 3°. Il faut faire l'addition de tous ces produits particuliers, & la ſomme qu'on trouvera ſera le produit des deux grandeurs complexes données, mul-

tipliées l'une par l'autre. Quoiqu'il ne soit pas nécessaire de mettre de l'ordre dans les grandeurs qui forment le produit; il est neanmoins très utile d'arranger les grandeurs d'un produit de la maniere qu'on l'expliquera, après avoir appliqué la Regle à des Exemples.

EXEMPLE I.

$$\begin{array}{r} 2a^2 - 3ab \\ 3a - 2b \\ \hline -4a^2b + 6ab^2 \\ +6a^3 - 9a^2b \quad\quad \\ \hline 6a^3 - 13a^2b + 6ab^2 \end{array}$$

Pour multiplier $2a^2 - 3ab$ par $3a - 2b$, 1°, j'écris $2a^2 - 3ab$, & au dessous $3a - 2b$, & je tire une ligne.

2°. Je multiplie $2a^2 - 3ab$ par $-2b$, premiere partie du multiplicateur, & j'en écris le produit $-4a^2b + 6ab^2$ sous la ligne. Je multiplie ensuite $2a^2 - 3ab$ par $3a$, seconde partie du multiplicateur, & j'en écris le produit $+6a^3 - 9a^2b$ sous le precedent; & je tire une ligne au dessous.

3°. J'ajoute tous les produits particuliers, & j'en écris la somme $6a^3 - 13a^2b + 6ab^2$ sous la ligne; c'est le produit.

On peut remarquer qu'il auroit été indifferent de multiplier $2a^2 - 3ab$ d'abord par $+3a$, & ensuite par $-2b$; il est évident qu'on auroit trouvé le même produit.

EXEMPLE II.

$$\begin{array}{rrrr} & aa & +ab & +bb \\ & & a & -b \\ \hline & -aab & -abb & -b^3 \\ +a^3 & +aab & +abb & \\ \hline a^3 & * & * & -b^3 \end{array}$$

Pour multiplier $aa + ab + bb$ par $a - b$, 1°, j'écris le multiplicateur sous le multiplié, & je tire une ligne.

2°. Je multiplie $aa + ab + bb$ par $-b$, & ensuite par $+a$, & après en avoir écrit les produits, je tire une ligne.

3°. J'ajoute tous les produits particuliers, & je trouve la somme $a^3 - b^3$ pour le produit que je cherchois.

On peut remarquer dans cet Exemple de multiplication qu'il y a quelquefois des grandeurs dans les produits particuliers, qui dans l'addition qu'on en fait, pour avoir le produit total, sont égales à zero, à cause de leurs signes opposez; c'est à dire ces grandeurs se détruisent par leurs signes opposez + & —, comme $-aab + aab = 0$, & $-abb + abb = 0$; on a marqué cette destruction dans le produit total par des étoiles.

EXEMPLE III.

En multipliant de la même maniere $a^2 - 2ab + b^2$ par $a - b$, on trouvera le produit $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a - b \\ \hline - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ + a^3 - 2a^2b + ab^2 \qquad \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$

EXEMPLE IV.

Enfin en multipliant, suivant la même regle, $x^2 + 2fx + f^2 - g^2$ par $x - 2f$, on trouvera le produit $x^3 - 3f^2x - g^2x - 2f^3 + 2fg^2$.

$$\begin{array}{r} x^2 + 2fx + f^2 \\ - g^2 \\ x - 2f \\ \hline - 2fx^2 - 4f^2x - 2f^3 \\ + 2fg^2 \\ + x^3 + 2fx^2 + f^2x \qquad \\ - g^2x \qquad \\ \hline x^3 \quad * \quad - 3f^2x - 2f^3 \\ - g^2x + 2fg^2 \end{array}$$

Démonstration de la multiplication des grandeurs litterales complexes.

Il paroît évident qu'en supposant une grandeur A divisée en tant de parties qu'on voudra, comme $b + c + d$; & une autre grandeur B divisée en tant d'autres qu'on voudra, comme $e + f + g$; le produit, qui doit venir de la multiplication de la grandeur A par B, doit être le même que la somme des produits qui viennent de la multiplication de toutes les parties $b + c + d$ de A par chacune des parties $e + f + g$ de B. Par consequent le produit total d'une grandeur complexe, qui peut être représentée par A, multipliée par une autre grandeur complexe, qui peut être représentée par B, est égal à la somme des produits de toutes les parties de la grandeur complexe A multipliées par chacune des parties du multiplicateur complexe B. Or la regle que l'on a donnée fait découvrir la somme de ces produits; elle fait donc trouver le produit de la grandeur complexe A multipliée par le multiplicateur complexe B.

La démonſtration précedente paroît evidente pour tous les cas de la multiplication des grandeurs litterales complexes, ſoit que les grandeurs litterales multipliées l'une par l'autre expriment des nombres entiers, ſoit qu'elles expriment ou des grandeurs rompues, ou des grandeurs incommenſurables : ſi cependant quelques Lecteurs trouvoient de la difficulté, par rapport aux deux derniers cas, voici une autre démonſtration.

On prendra pour exemple, afin de rendre la choſe plus ſimple, la multiplication de $a + b$ par $c + d$, dont le produit, ſuivant la Regle, eſt $ac + bc + ad + bd$. Il faut

$$\begin{array}{r} a + b \\ c + d \\ \hline + ac + bc + ad + bd \end{array}$$

*72. démontrer que $\frac{1}{c+d} = * \frac{a+b}{ac+bc+ad+bd}$.
*72. En voici la démonſtration. $\frac{1}{c} = * \frac{a}{ac}$
*72. *56. $= * \frac{b}{bc}$. D'où l'on aura $* \frac{1}{c} = \frac{a+b}{ac+bc}$.
*72. *56. De même $\frac{1}{d} = * \frac{a}{ad} = * \frac{b}{bd}$. D'où l'on aura $* \frac{1}{d} = \frac{a+b}{ad+bd}$.
*53. *63. Donc $* \frac{1}{c} . \frac{1}{d} :: \frac{a+b}{ac+bc} . \frac{a+b}{ad+bd}$. Par conſequent $* \frac{1}{c+d} =$
*72. $\frac{a+b}{ac+bc+ad+bd}$. Ainſi * le produit de $a + b$ multiplié par $c + d$ eſt $ac + bc + ad + bd$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Cette démonſtration peut facilement s'appliquer à toutes les multiplications des grandeurs complexes litterales.

REMARQUES.

I

102. L'ORDRE des grandeurs eſt indifferent dans le produit de deux grandeurs complexes multipliées l'une par l'autre : neanmoins il eſt bon d'ordonner les grandeurs d'un produit de maniere que la grandeur incomplexe, qui contient la puiſſance la plus élevée de l'une des lettres du produit comme a dans les trois premiers exemples, ſoit la premiere grandeur incomplexe du produit la plus à gauche ; que la grandeur qui contient la puiſſance de la même grandeur, dont l'expoſant eſt moindre d'une unité que celui de la plus élevée, ſoit la ſeconde grandeur du produit ; que la grandeur qui contient la puiſſance, dont l'expoſant eſt moindre d'une unité que la précedente, ſoit la troiſiéme grandeur du produit, & ainſi de ſuite juſqu'à la derniere grandeur qui eſt la plus à droite, qui doit contenir la moindre puiſſance de la lettre a, quand la lettre a eſt dans toutes les grandeurs du

produit ; mais quand il y a quelque grandeur, qui ne contient point du tout cette lettre a, cette grandeur doit être la derniere du produit.

On voit dans le troisiéme exemple que la grandeur du produit vers la gauche est a^3; la seconde $3a^2b$, dans laquelle a^2 est une puissance de a d'un degré moindre que a^3 ; la troisiéme est $+ 3ab^2$ dans laquelle a est, pour ainsi dire, une puissance de a moindre d'un degré que a^2; enfin $- b^3$, où a ne se trouve point, est la derniere grandeur du produit.

Quand les grandeurs d'un produit sont disposées comme on vient de l'expliquer, par rapport aux puissances d'une des lettres du produit, on dit que le produit est *ordonné par rapport à cette lettre*. Cette lettre est ordinairement arbitraire dans les produits; cependant dans les produits qui servent à la résolution des Problêmes, les grandeurs inconnues qu'on marque par les lettres x, y, z, &c. & qui sont les grandeurs que l'on cherche dans ces Problêmes, sont les lettres qui servent à ordonner les produits, comme on le voit dans le quatriéme exemple.

Toutes les grandeurs d'un produit qui contiennent la même puissance de la lettre, par rapport à laquelle le produit est ordonné, s'appellent *un terme* du produit; & quand il y en a plusieurs qui ne font qu'un même terme, on les écrit ordinairement les unes sous les autres, comme dans le quatriéme exemple, où les deux grandeurs $- 3f^2x - g^2x$ ne font qu'un même terme. La lettre, par rapport à laquelle un produit est ordonné, se nomme aussi *la lettre qui distingue les termes du produit*. *Le premier terme* contient la plus haute puissance de cette lettre; *le second*, celle qui est moindre d'un degré que la plus haute; *le troisiéme terme*, celle qui est moindre que la précedente, & ainsi de suite jusqu'au *dernier*, qui contient la moindre puissance de cette lettre, quand elle est dans toutes les grandeurs du produit ; & quand elle n'est pas dans toutes, *le dernier terme* est celui qui est composé de toutes les grandeurs où cette lettre n'est pas.

Il arrive quelquefois que les puissances de la lettre qui distingue les termes d'un produit, ne vont pas en diminuant d'un degré d'un terme à l'autre qui le suit ; comme dans ce produit $a^6 + b^2a^4 + b^4a^2 - b^6$

Dans ces cas, pourvû que les exposans des puissances de

cette lettre soient en progression arithmetique, comme dans cet exemple, les termes se distinguent par les puissances de cette lettre, dont les exposans sont en progression arithmetique. Ainsi le premier terme est a^6, le second terme est $b a^4$, & ainsi de suite.

2.

103. Quand chacune des grandeurs du produit a le même nombre de dimensions, on dit que ces grandeurs sont *homogenes*. Quand un nombre précede une grandeur, il n'est pas compté pour une des dimensions du produit. Ainsi la grandeur $-3a^2b$ n'est que de trois dimensions.

On observe ordinairement de faire toutes les grandeurs d'un produit *homogenes*, & cela s'appelle *observer la loi des homogenes*.

Si les grandeurs d'un produit n'étoient pas homogenes, on pourroit les rendre homogenes par le moyen de l'unité, sans en changer la valeur; ainsi pour rendre les grandeurs $abc + cc$ homogenes, on peut multiplier cc par 1, & l'on aura $abc + 1 \times cc$, où les grandeurs sont homogenes; & il est évident * que le produit d'une grandeur par l'unité, n'en change pas la valeur.
* 92.

3.

104. La multiplication des grandeurs litterales est generale, & peut convenir à toutes les grandeurs qu'on peut imaginer; car on peut supposer telles grandeurs qu'on voudra; par exemple, telles lignes droites qu'on voudra représentées par les lettres qui sont multipliées les unes par les autres dans un produit litteral. Or comme on peut supposer telles grandeurs qu'on voudra représentées par les lettres, on peut de même supposer l'unité, à laquelle ces grandeurs auront rapport, telle qu'on voudra. Ce qui fait voir que l'unité est arbitraire dans les grandeurs litterales; & on peut la représenter par une lettre. Ainsi l'on peut supposer que a représente la ligne prise pour l'unité par rapport à deux autres lignes b & c; & la multiplication de ces lignes * renfermera cette
* 72. proportion $a . b :: c . bc$.

On peut même prendre parmi les grandeurs litterales d'un produit qui sert à résoudre une question, celle qu'on voudra pour l'unité, pourvû que dans toute la question on rapporte

toutes les grandeurs litterales à cette ſeule grandeur, comme à l'unité, & qu'on n'en prenne pas d'autres pour l'unité. Cela ſert à faciliter la réſolution de pluſieurs queſtions. Cela ſert auſſi à rendre les grandeurs d'un même produit complexe, homogenes, en ſuppléant par le moyen de la lettre priſe pour l'unité au défaut des dimenſions des grandeurs qui n'en ont pas aſſez pour être homogenes aux autres. Par exemple, ſuppoſant que *a* eſt priſe pour l'unité dans *abc* + *cc*, on rendra ces deux grandeurs homogenes en écrivant *abc* + *acc*.

SECTION IV.

Où l'on explique la Diviſion des grandeurs entieres.

DE'FINITIONS.

DEUX nombres étant donnez, comme 12 & 4, ſi l'on cherche combien de fois 4 eſt contenu dans 12, en diſant combien de fois 4 eſt-il en 12? Il y eſt 3 fois; c'eſt ce qu'on nomme *diviſer* 12 par 4.

Le nombre 12 eſt celui que l'on diviſe, & on l'appelle *le dividende* ou *le nombre à diviſer*; le nombre 4, par lequel on diviſe 12, s'appelle *le diviſeur*; le nombre 3 que l'on trouve par la diviſion, & qui exprime combien de fois 4 eſt dans 12, ſe nomme *le quotient*; & c'eſt le quotient que l'on cherche par la diviſion.

Puiſque le diviſeur 4 eſt contenu dans le dividende 12 autant de fois que l'exprime le quotient 3; il eſt évident qu'en prenant le diviſeur 4 autant de fois que le marque le quotient 3, c'eſt à dire 3 fois, on aura le dividende 12 pour le produit de 4 par 3. D'où l'on voit que le dividende 12 eſt le produit du diviſeur 4 multiplié par le quotient 3; ainſi le dividende 12 peut être regardé comme *un produit*, dont *les côtez* ou les dimenſions ſont le diviſeur & le quotient; & dans une diviſion où le produit 12 eſt donné avec un de ſes côtez 4, la diviſion fait trouver l'autre côté 3 du produit.

105. Pour marquer la diviſion d'un nombre par un autre, on écrit le dividende le premier, on tire une ligne au deſſous, & l'on écrit le diviſeur ſous la ligne. Par exemple $\frac{12}{4} = 3$,

ſignifie que 12 diviſé par 4 eſt égal à 3. De même $\frac{c}{b}$ marque que la grandeur *c* eſt diviſée par la grandeur *b*; ainſi $\frac{12}{4}$ exprime le quotient de la diviſion de 12 par 4; $\frac{c}{b}$ exprime le quotient de *c* diviſée par *b*.

Définition generale de la Diviſion qui convient à toutes ſortes de grandeurs: il faut ſe la rendre très familiere.

106. DIVISER une grandeur quelconque *c* par une autre grandeur quelconque *b*, c'eſt trouver une grandeur qu'on nommera *a*, qui ſoit à l'unité comme le dividende *c* eſt au diviſeur *b*.

D'où l'on voit qu'il y a une proportion dans toute diviſion, dont le premier terme eſt le dividende *c*; le ſecond terme eſt le diviſeur *b*; le troiſiéme terme eſt le quotient $a =$
*105. * $\frac{c}{b}$, le quatrieme terme eſt l'unité. Le premier, le ſecond & le quatriéme terme de cette proportion ſont donnez, & la diviſion fait trouver le troiſiéme terme qui eſt le quotient. Voici l'expreſſion de cette proportion $c . b :: a \left(\frac{c}{b}\right) . 1$. Ou bien $\frac{c}{b} = \frac{a}{1}$.

COROLLAIRES *qu'il faut ſe rendre très familiers.*

I.

107. LE dividende *c* eſt le produit du diviſeur *b* multiplié par le quotient $a = \frac{c}{b}$. Car puiſque les rapports $\frac{c}{b}$ & $\frac{a}{1}$ ſont égaux,
*72. leurs rapports inverſes * ſont auſſi égaux $1 . a \left(\frac{c}{b}\right) :: b . c$.
*55. Donc * *c* eſt le produit de *b* multiplié par *a*, ou de *b* multi-
105. plié par $\frac{c}{b} =$ * *a*.

COROLLAIRE II.

108. L'UNITE' étant diviſée par l'unité, le quotient eſt l'unité. $\frac{1}{1} = 1$; car l'unité eſt contenue une fois dans elle-même. Ainſi le quotient qui vient de 1 diviſé par 1 eſt 1; & comme toute grandeur eſt auſſi contenue une fois dans elle-même tous les rapports d'égalité $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$, &c. ont auſſi pour quotient l'unité; ainſi ils ſont égaux entr'eux, & ils ſont égaux à l'unité, & ils peuvent être pris pour l'unité.

COROLLAIRE III.

109. DEUX grandeurs quelconques *c* & *e*, étant diviſées par une même grandeur *d*; les deux quotiens $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{d}$ ont le même rapport que les deux grandeurs *c* & *e*. Il faut démontrer que $c . e :: \frac{c}{d} . \frac{e}{d}$.

Démonſtration.

Démonstration. * $c . d :: \frac{c}{d} . 1$. Donc * $c . \frac{c}{d} :: d . 1$. De *106. *62.
même * $e . d :: \frac{e}{d} . 1$. Donc * $e . \frac{e}{d} :: d . 1$. Par consequent * *106. *62.
$c . \frac{c}{d} :: e . \frac{e}{d}$. D'où l'on déduit * $c . e :: \frac{c}{d} . \frac{e}{d}$. *Ce qu'il falloit* *52. *62.
démontrer.

REMARQUE.

CE troisiéme Corollaire & la proposition *de l'article* 75, font voir clairement qu'un même rapport peut avoir une infinité d'expressions équivalentes. Car, en multipliant ou en divisant les deux termes d'un rapport par les mêmes grandeurs, ou par des grandeurs égales, (ce qu'on peut diversifier à l'infini,) les produits ou les quotiens conserveront toujours le même rapport. Ainsi $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab} = \frac{a^3}{a^2b} = \frac{ab}{bb} = \frac{ab^2}{b^3} = \frac{ac}{bc} = \frac{ac^2}{bc^2} = \frac{abc}{b^2c} = \frac{acd}{bcd}$, & ainsi à l'infini. De même $a . b :: \frac{a}{a} . \frac{b}{a} :: \frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: \frac{a^2}{ac} . \frac{ab}{ac}$, &c.

D'où l'on voit que quand les deux termes d'un rapport sont multipliez chacun par les mêmes multiplicateurs, ou divisez chacun par les mêmes diviseurs, on peut abreger l'expression de ce rapport, & la rendre plus simple sans changer le rapport; en effaçant les communs multiplicateurs ou les communs diviseurs. Ainsi $\frac{a^3bc}{a^2b^2c} = \frac{a}{b}$. De même $\frac{a^3}{ab} . \frac{a^2b}{ab} :: a^3 . a^2b :: a . b$.

Il faut se rendre cette remarque & les articles 75 & 109 très familiers, à cause de leur grand usage.

CORLLAIRE IV.

110. IL suit du Corollaire précedent que deux grandeurs égales étant divisées par la même grandeur, ou, ce qui revient au même, par des grandeurs égales, les quotiens sont égaux. Car les rapports des deux grandeurs divisées, à leurs diviseurs, étant les mêmes * que ceux des quotiens à l'unité; les deux *106.
grandeurs ne peuvent pas être égales, & leurs diviseurs aussi égaux, que les quotiens n'ayent le même rapport à l'unité. Ces quotiens sont donc * égaux. *53.

COROLLAIRE V.

111. DANS tout rapport & dans toute fraction, le premier terme est au second, c'est à dire le numerateur est au dénominateur, comme le rapport ou la fraction est à l'unité. Car * *109.

* 19. $a . b :: \frac{a}{b} . \frac{b}{b} = 1$. On le peut auſſi déduire des définitions *
* 47. & de fraction, & * de rapport, comme on le va voir.

8. Cela eſt évident dans toute fraction; car dans toute fraction, (on prendra la fraction $\frac{2}{3}$ pour rendre la choſe plus
* 19. claire) * l'unité eſt conçue partagée en autant de parties égales que le dénominateur contient d'unitez, & le numerateur marque combien la fraction contient de ces parties de l'uni-
* 48. té; ainſi l'on a cette proportion $2 . 3 :: \frac{2}{3} . 1 \left(\frac{3}{3}\right)$. * Puiſque les conſequens 3 & 1 ou $\frac{3}{3}$, étant partagez chacun en trois parties égales, chacun des antecedens contient deux aliquotes ſemblables de ſon conſequent.

C'eſt la même choſe dans tout rapport; car, par exemple, dans le rapport de 2 à 3 conſideré comme rapport, on fait attention que l'antecedent 2 eſt les deux tiers de ſon conſequent 3, ou qu'il contient deux des parties, dont le conſequent en contient 3. Et en faiſant comparaiſon du rapport $\frac{2}{3}$ à l'unité, on voit que $\frac{2}{3}$ contient auſſi deux des parties dont l'unité en contient trois; & par conſequent le rapporte de 2 à 3 eſt égal au rapport de $\frac{2}{3}$ à 1 ou à $\frac{3}{3}$. Et l'on voit aſſez que cela convient à tout rapport, & qu'on n'a pris le rapport $\frac{2}{3}$ que pour s'expliquer plus clairement. Si le rapport eſt incommenſurable comme $\frac{2+r}{3}$, & en general $\frac{nx+r}{mx}$, où l'on ſuppoſe qu'en quelque nombre d'aliquotes que le conſequent puiſſe être partagé, l'antecedent en contient un certain nombre avec un reſte r plus petit que chaque aliquote; il eſt évident qu'en concevant l'unité partagée dans le même nombre d'aliquotes que le conſequent, l'on aura toujours la proportion $2 + r . 3 :: \frac{2+r}{3} . 1 = \frac{3}{3}$. Et en general $nx + r . mx :: \frac{nx+r}{mx} . 1 = \frac{mx}{mx}$. Car $\frac{1}{3}$ qui eſt trois fois dans l'unité $= \frac{3}{3}$, ſera deux fois dans le rapport $\frac{2+r}{3}$ avec un petit reſte, comme le tiers de 3 eſt deux fois dans $2 + r$ avec un petit reſte; & en general $\frac{1x}{mx}$, qui eſt dans $1 = \frac{mx}{mx}$ autant de fois que le nombre m contient d'unitez, eſt dans le rapport $\frac{nx+r}{mx}$ autant de fois que le nombre entier n contient d'unitez avec un petit reſte; comme l'aliquote ſemblable x de mx eſt dans $nx + r$ autant de fois que le nombre entier n contient d'unitez avec un petit reſte r.

D'où l'on voit que quand le premier terme d'un rapport

ou d'une fraction est égal au second ; le rapport, ou la fraction, est égale à l'unité ; quand le premier terme surpasse le second ; le rapport ou la fraction surpasse l'unité ; quand le premier terme est moindre que le second, le rapport ou la fraction est moindre que l'unité.

COROLLAIRE VI.

112. TOUT rapport & toute fraction * est le quotient du premier terme de ce rapport, ou du premier terme de cette fraction divisé par le second terme : puisque $a . b :: \frac{a}{b} . 1$. * 106.

COROLLAIRE VII.

113. LES rapports inverses des rapports égaux du précedent Corollaire * sont égaux. Ainsi en toute fraction & en tout rapport, l'unité est à la fraction ou au rapport, comme le second terme du rapport est au premier terme. $1 . \frac{a}{b} :: b . a$. De même $1 . \frac{2}{3} :: 3 . 2$. * 55.

COROLLAIRE VIII.

114. D'où il suit * que le premier terme d'un rapport & d'une fraction est le produit du second terme de ce rapport multiplié par le rapport même, ou par la fraction même. * 77.

COROLLAIRE IX.

115. IL est évident, par le sixiéme Corollaire, qu'un rapport, une fraction, & le quotient d'une division, sont la même chose, c'est pourquoi on les marque de la même maniere. L'expression d'un rapport $\frac{a}{b}$ peut donc s'énoncer de ces manieres, 1°, en le nommant le rapport de a à b. 2°, en disant que c'est a divisé par b, ou le quotient de a divisé par b.

COROLLAIRE X.

116. D'où il suit que deux rapports ou deux fractions, qui ont un même second terme ou un même consequent, sont entr'elles comme les antecedens, * $\frac{a}{b} . \frac{c}{b} :: a . c$. Car les rapports $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$, sont les deux grandeurs a & c divisées par le même diviseur b. * 109.

REMARQUE.

ON peut voir à présent dans la derniere évidence cette proposition, assez évidente d'elle-même ; que tous les rapports égaux sont des grandeurs égales. Par exemple, $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}$,

&c. ſont des grandeurs égales. Car ce ſont des grandeurs qui ont un même rapport avec une même grandeur qui eſt l'unité,
*111. puiſque * chacun de ces rapports eſt à l'unité comme ſon premier terme eſt à ſon ſecond terme. D'où l'on voit que tous les rapports d'égalité ſont égaux chacun à l'unité $\frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{1}{1} = 1$. Ainſi l'on peut prendre, ſi l'on en a beſoin pour une démonſtration, un rapport d'égalité pour l'unité, & l'unité pour un rapport d'égalité.

COROLLAIRE XI.

117. UNE grandeur quelconque étant diviſée par l'unité, comme $\frac{b}{1}$, a la même valeur que ſi elle n'étoit point diviſée, c'eſt
*111. à dire $\frac{b}{1} = b$; car * $\frac{b}{1}$. 1 :: b. 1. D'où l'on voit que toute grandeur entiere a peut être regardée comme une fraction, ou comme un rapport $\frac{a}{1}$, dont le premier terme eſt cette grandeur a, & le ſecond terme eſt l'unité.

COROLLAIRE XII.

qui eſt une propoſition fondamentale.

118. DEUX rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ſont entr'eux, comme le produit des extrêmes ad eſt au produit des moyens bc. C'eſt à dire $\frac{a}{b}$. $\frac{c}{d}$ :: ad. bc.

Démonſtration. Qu'on diviſe ad & bc par la même gran-
*109. deur bd, l'on aura cette proportion * $\frac{ad}{bd}$. $\frac{bc}{bd}$ :: ad. bc. Mais
*75. *75. $\frac{ad}{bd} =$ * $\frac{a}{b}$, & $\frac{bc}{bd} =$ * $\frac{c}{d}$. Par conſequent * $\frac{a}{b}$. $\frac{c}{d}$ :: $\frac{ad}{bd}$.
*53. *109. $\frac{bc}{bd}$ :: * ad. bc. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE XIII.

qui eſt une propoſition fondamentale.

119. D'où il ſuit que quand deux rapports ſont égaux, (c'eſt à dire que dans toute proportion) le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ il ſuit neceſſairement que $ad = bc$; car puiſque les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ſont égaux, il
*118. faut * que les produits ad & bc ſoient égaux.

120. Et quand deux produits ſont égaux, comme $ad = bc$, on peut toujours en faire une proportion, en prenant les deux côtez de l'un des produits pour les deux extrêmes, & les deux côtez de l'autre pour les deux moyens de la proportion. Par exemple, ſi $ad = bc$, l'on aura a. b :: c. d, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; car

$\frac{a}{b} . \frac{c}{d}$ :: * *ad. bc*. Donc, puiſque l'on ſuppoſe $ad = bc$, il ſuit neceſſairement que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. *118.

COROLLAIRE XIV.

121. DEUX rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{c}$, qui ont le même antecedent, ont entr'eux un rapport inverſe de celui des conſequens, ou ſont entr'eux comme les conſequens dans un ordre renverſé. C'eſt à dire $\frac{b}{a} . \frac{b}{c}$ :: *c. a*. Car $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{c}$ :: * *bc. ab* :: * *c. a*. *118. *75.

COROLLAIRE XV.

122. L'ON voit, par le Corollaire onziéme, * & *par l'article* 75, que tout nombre entier pouvant être conſideré comme une fraction, dont le nombre entier eſt le numerateur, & l'unité le dénominateur; ſi l'on ajoute un même nombre de zeros au numerateur & au dénominateur, le nombre entier, conſideré comme une fraction, ſera changé en nombre décimal ſans changer de valeur. Ainſi $345 = \frac{345}{1} = \frac{345000000^{vi}}{1000000}$. Car par cette operation on multiplie le numerateur & le dénominateur par un même nombre, dans notre exemple, par 1000000, * ce qui ne change point la valeur de la fraction. *117. *75.

Mais au lieu d'écrire le dénominateur, on a trouvé plus court pour le calcul d'exprimer ces fractions décimales, en ſupprimant le dénominateur, & en marquant * ſimplement un point entre les entiers & les parties décimales. Ainſi $\frac{345000000}{1000000} = 345.000000^{vi}$. *17.

COROLLAIRE XVI.

123. ON déduit aiſément des Corollaires précedens, qu'ayant deux fractions quelconques $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$, ſi l'on veut les multiplier l'une par l'autre, il faut former la fraction $\frac{ac}{bd}$, qui a pour premier terme le produit des antecedens, & pour ſecond terme le produit des conſequens, elle ſera le produit des deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ multipliées l'une par l'autre. Car 1. $\frac{a}{b}$ :: * *b. a* :: * *bc. ac* :: * $\frac{bc}{bd} . \frac{ac}{bd}$. Par conſequent * 1. $\frac{a}{b}$ :: $\frac{bc}{bd} . \frac{ac}{bd}$. Mais $\frac{bc}{bd} =$ * $\frac{c}{d}$. Donc 1. $\frac{a}{b}$ :: $\frac{c}{d} . \frac{ac}{bd}$. D'où il ſuit que * $\frac{ac}{bd}$ eſt le produit qui vient de $\frac{c}{d}$ multipliée par $\frac{a}{b}$. *113. *75. *109. *52. *75. *72.

COROLLAIRE XVII.

124. SI l'on veut diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$; il faut former la fraction $\frac{ad}{bc}$, qui a pour premier terme le produit des extremes *ad*, & pour second terme le produit des moyens *bc*; elle sera le quotient.

*118. *111. Car $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} :: *\ ad . bc :: *\ \frac{ad}{bc} . 1$. Ainsi $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} :: *\ \frac{ad}{bc} . 1$.

*52. *106. Par consequent * $\frac{ad}{bc}$ est le quotient de $\frac{a}{b}$ divisée par $\frac{c}{d}$.

Application de la définition generale de la Division à la division des nombres entiers.

DÉFINITION.

125. DIVISER un nombre entier donné par un autre nombre entier aussi donné, c'est trouver un troisiéme nombre qui contienne l'unité autant de fois que le diviseur est contenu dans le dividende. Par exemple, diviser 12 par 4, c'est trouver le quotient 3 qui contient l'unité autant de fois que 4 est contenu en 12. Et l'on a cette proportion 12. 4 :: 3. 1.

D'où l'on voit que la division d'un nombre entier comme 12 par un autre nombre entier comme 4, est une soustraction du diviseur 4, du dividende 12, reiterée autant de fois que le quotient 3 contient l'unité.

SUPPOSITION OU DEMANDE.

ON suppose qu'on sçait trouver combien de fois chacun des neuf chifres est contenu dans un nombre qui le contient

*78. moins de dix fois, c'est à dire que l'on sçait * la table de la Multiplication.

La division des nombres entiers.

PROBLÊME.

126. *DIVISER un nombre entier donné* c *par un autre nombre entier donné* b; *c'est à dire trouver le nombre entier* a *qui exprime combien de fois le diviseur* b *est contenu dans le dividende* c, *& qui est* le quotient.

dividende.		diviseur.	
c	83106	342	*b*
	...	*a*	quotient.

AVERTISSEMENT.

POUR faire concevoir clairement la Divifion aux Commençans, on appliquera à un exemple les articles de l'operation à mefure qu'on les énoncera.

Regle ou operation. 1°. Il faut écrire le dividende *c*, & tirer au devant vers la droite un arc ou une petite ligne droite. Il faut écrire le divifeur *b* au haut de cet arc ou de cette ligne droite, & tirer une ligne fous le divifeur. Ce fera fous cette ligne qu'il faudra écrire les chifres du quotient *a* à mefure qu'on les découvrira par la divifion; car ces chifres du quotient ne fe trouvent que l'un après l'autre. Pour les trouver, on partage le dividende en parties, dont chacune fait trouver un de ces chifres, & on appelle ces parties *les membres* de la Divifion: les operations, qu'il faut faire fur un de ces membres, pour trouver le quotient qui lui convient, c'eft à dire, pour divifer ce membre, font les mêmes qu'il faut faire fur chacun des autres membres. Voici comme on diftingue le premier membre.

2°. Il faut diftinguer dans le dividende, en commençant par le dernier chifre à la gauche, & allant de la gauche à la droite, autant de rangs de chifres qu'en contient le divifeur *b*. *Dans cet exemple il faut prendre les trois rangs* 831, *le divifeur ayant trois rangs*.

Et fi le nombre que l'on a pris furpaffe le divifeur, ou s'il lui eft au moins égal, ce nombre fera le premier membre à divifer: mais s'il étoit plus petit que le divifeur, c'eft à dire, fi le divifeur n'y étoit pas contenu au moins une fois, (*comme s'il y avoit* 231 *au lieu de* 831,) il faudroit encore prendre un chifre du dividende vers la droite pour faire le premier membre de la Divifion.

3°. Le premier membre à divifer étant ainfi diftingué, voici ce qu'il faut faire pour trouver le quotient de ce membre, & pour faire la divifion de ce premier membre. 1°. Il faut concevoir le divifeur *b* écrit fous le premier membre à divifer, les unitez fous les unitez, les dixaines fous les dixaines, &c. Mais au lieu de l'écrire, il fuffit, pour abreger, d'écrire fous le premier membre autant de

```
c 831, 06  ( 342  b
  ...        ----
  684        2    a
  ---
  147
```

points que le diviſeur contient de rangs, en écrivant le premier point ſous le rang des unitez du premier membre, le ſecond ſous les dixaines, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier point. 2°. Voici comment on trouve le chifre du quotient de ce membre. On dit combien de fois le dernier chifre à gauche du diviſeur *b* eſt il contenu dans le nombre qui eſt au deſſus du dernier point, ou au deſſus du dernier chifre du diviſeur, qui eſt cenſé écrit à la place du dernier point? Ayant trouvé combien il y eſt contenu, on écrit au quotient le chifre qui exprime combien de fois le dernier chifre du diviſeur eſt contenu dans le nombre qui eſt au deſſus du dernier point, & c'eſt le quotient du premier membre. 3°. Il faut multiplier tout le diviſeur par le quotient qu'on vient de trouver, & les Lecteurs qui commencent, doivent en écrire le produit ſous le premier membre à diviſer, les unitez ſous les unitez du premier membre, les dixaines ſous les dixaines, &c. 4°. Il faut retrancher le produit, qu'on vient de trouver, du premier membre, & écrire le reſte au deſſous, & la diviſion du premier membre ſera achevée.

Par exemple, on dira combien de fois 3 eſt-il en 8 qui eſt le nombre du premier membre qui eſt au deſſus du dernier point? Il y eſt contenu 2 fois; ainſi il faut écrire 2 au quotient. Il faut enſuite multiplier le diviſeur b *par le quotient 2, & les Commençans en écriront le produit 684 ſous le premier membre à diviſer 831. Enfin il faut retrancher ce produit, du premier membre, & en écrire le reſte 147: & la diviſion du premier membre eſt achevée.*

4°. Pour avoir le membre ſuivant de la Diviſion, il faut ſimplement écrire le chifre, qui précede, vers la droite dans le dividende, le membre qu'on vient de diviſer, au devant du reſte qu'on vient de trouver, & ce reſte avec ce chifre, tranſporté du dividende au devant de ce reſte, ſera le membre ſuivant de la Diviſion. Il faut écrire un point ſous ce chifre du dividende qu'on vient de tranſporter devant le reſte, pour ſe ſouvenir que ce chifre du dividende a été employé.

```
            c 83106  ( 342 b
              . . .  ( 24
              684
            ------
2. membre.   1470
              . . .
             1368
            ------
              102
```

Après cela il faut faire ſur ce membre les mêmes operations

(marquées

(marquées dans le 3e article) qu'on a faites sur le premier. C'est à dire, 1° il faut écrire autant de points sous ce membre, que le diviseur contient de rangs, & mettre le premier point sous les unitez de ce membre, le second point sous les dixaines, & ainsi de suite. 2°. Il faut voir combien de fois le dernier chifre du diviseur est contenu dans le nombre qui est sur le dernier point, & écrire au quotient le chifre qui exprime combien de fois il y est contenu. 3°. Il faut multiplier le diviseur *b* par ce nouveau quotient, & en écrire le produit sous le membre que l'on divise, les unitez sous les unitez, les dixaines sous les dixaines, &c. 4°. Il faut retrancher ce produit du membre à diviser, & écrire le reste au dessous, & la division de ce membre sera faite.

	c 83106	(342 b
	....	24 a
	684	
2. membre.	1470	
	...	
	1368	
	102	

Dans notre exemple, il faut transporter 0, *qui précede dans le dividende le membre qu'on vient de diviser, au devant du reste* 147 *de la division du membre précedent; marquer un point sous* 0 *dans le dividende pour se souvenir qu'on l'a employé; & le nouveau membre à diviser sera* 1470. *Pour le diviser,* 1°, *il faut écrire trois points; le premier, sous le chifre qu'on vient de transporter, qui est le rang des unitez de ce membre; le second point sous* 7, *& le troisiéme sous* 4; *&* 14 *est le nombre de ce membre à diviser qui se trouve sur le dernier point;* (parceque tant le chifre 4 qui est sur le dernier point que les chifres qui peuvent se trouver vers la gauche comme ici 1, sont censez être le nombre qui se trouve sur le dernier point) 2°. *Il faut dire combien de fois* 3, *dernier chifre du diviseur, est-il contenu dans* 14? *On trouve qu'il y est* 4 *fois; il faut écrire* 4 *au quotient.* 3°. *Il faut multiplier le diviseur* b *par ce nouveau quotient, & en écrire le produit* 1368 *sous le membre à diviser.* 4°. *Il faut ôter ce produit du membre à diviser, & écrire le reste* 102 *au dessous; & la division de ce membre sera achevée.*

5°. Pour avoir le membre suivant de la Division, il faut, comme dans l'article quatriéme, transporter le chifre du dividende qui précede le dernier dont on s'est servi, le transporter, dis-je, devant le reste de la division du membre précedent, & ce sera le nouveau membre à diviser; marquer

fous ce membre autant de points qu'il y a de rang de chifres dans le diviſeur : trouver le quotient de ce membre, qui doit être le chifre qui exprime combien de fois le dernier chifre du diviſeur eſt contenu dans le nombre qui eſt ſur le dernier point : multiplier le diviſeur par ce nouveau quotient, & en écrire le produit ſous le membre qu'on diviſe. Enfin ôter ce produit du membre que l'on diviſe, & en écrire le reſte au deſſous.

	c 83106	342 b
	.....	243 a
	684	
2. membre.	1470	
	.. :	
	1368	
3. membre.	1026	
	...	
	1026	
	0000	

Dans notre exemple il faut tranſporter le chifre 6 du dividende qui précede le dernier chifre dont on s'eſt ſervi, qui eſt 0 ; tranſporter, dis-je, 6 devant le reſte 102 de la diviſion du membre précedent, & marquer un point ſous 6 du dividende, pour ſe ſouvenir qu'on s'en eſt ſervi : & l'on aura 1026 pour le nouveau membre à diviſer. 1°. On marquera au deſſous les trois points qui occupent les trois places où il faut imaginer que le diviſeur 342 eſt écrit. 2°. On trouvera le quotient de ce membre, en diſant combien de fois 3, dernier chifre du diviſeur, eſt-il contenu en 10, qui eſt le nombre du membre à diviſer, qui eſt au deſſus du dernier point, ou qui eſt cenſé ſur le dernier chifre du diviſeur ; on trouve que 3 eſt contenu 3 fois en 10 ; ainſi on écrira 3 au quotient. 3°. On multipliera le diviſeur b par ce quotient 3, & l'on écrira le produit 1026 ſous le membre 1026 que l'on diviſe. 4°. Enfin on retranchera le produit, qu'on vient de trouver, du membre que l'on diviſe, & l'on en écrira le reſte au deſſous ; ce reſte eſt ici 0.

6°. On continuera de tranſporter de ſuite, l'un aprés l'autre, les chifres du dividende qui précedent ceux ſur leſquels on a déja operé, au devant des reſtes qu'on trouvera en diviſant ſucceſſivement les membres de la diviſion, & de former ainſi par ordre, l'un après l'autre, tous les membres de la diviſion : & on fera ſur chacun les operations marquées dans le troiſiéme article ; on continuera, dis-je, cette ſuite d'operations juſqu'à ce qu'on ait tranſporté tous les chifres du dividende ; le dernier membre de la diviſion ſera celui où l'on aura tranſporté le premier chifre du dividende le plus à droite ; & après avoir operé ſur ce dernier membre, la di-

vision sera achevée : & les chifres qu'on aura marquez de suite dans la place du quotient *a*, seront le quotient *qu'il falloit trouver*.

REMARQUES.

1.

127. QUAND la division est achevée, si le dernier membre ne laisse aucun reste; c'est à dire, si l'on trouve o pour le reste du dernier membre; le diviseur est exactement contenu dans le dividende autant de fois que le quotient contient l'unité. Mais si après la division du dernier membre on trouve un reste, alors le dividende contient le diviseur autant de fois que le quotient contient l'unité, & le dividende contient de plus ce reste; de maniere que si l'on retranchoit ce reste du dividende, il contiendroit, après ce retranchement, le diviseur exactement autant de fois que le quotient contient l'unité.

Si l'on trouve un reste après la division, on écrit ce reste au devant du quotient un peu plus haut, & en moindres caracteres pour le distinguer, on tire une ligne au dessous, & l'on écrit le diviseur sous cette ligne; ce qui fait une fraction dont le reste est le numerateur, & le diviseur en est le dénominateur; & cela marque que le quotient contient encore cette fraction, outre les nombres entiers dont il est composé.

2.

128. Le quotient doit avoir autant de rangs de chifres qu'il y a de membres à diviser, chaque membre à diviser devant fournir un chifre au quotient; & l'on voit par l'operation qu'il doit y avoir autant de membres dans la division, qu'il y a de rangs de chifres dans le dividende au devant du premier membre, & de plus ce premier membre.

3.

129. Le diviseur doit toujours être contenu dans le premier membre de la division; ainsi le premier membre fournit toujours un chifre au quotient. Mais quand le diviseur n'est pas contenu au moins une fois dans un des membres qui suivent le premier, on écrit zero pour le quotient de ce membre-là,

& dans ce cas la division de ce membre est achevée ; & il faut transporter devant ce membre-là le chifre du dividende qui précede le dernier transporté; & le membre précedent qui n'a fourni que o au quotient, avec ce nouveau chifre transporté, sera le membre suivant de la division.

4.

130. Le chifre du quotient qui convient à chaque membre, ne peut pas être plus grand que 9; ainsi on n'écrit que 9 pour le quotient d'un membre, quand même on trouveroit en operant un quotient plus grand que 9.

5.

131. Il arrive assez ordinairement, en divisant un membre de la division, que le produit du diviseur par le quotient qu'on trouve d'abord pour ce membre, est plus grand que ce membre-là, & qu'il n'en peut pas être retranché. Quand cela arrive, c'est une marque certaine que ce quotient est trop grand; il faut le diminuer d'une unité, ou de deux unitez, ou de trois unitez, & ainsi de suite, jusqu'à ce que le produit du diviseur par le chifre du quotient de ce membre-là, puisse être retranché de ce membre ; & ce dernier quotient sera celui qui convient à ce membre de la division.

6.

132. S'il arrivoit aussi qu'après avoir divisé un membre de la division, on trouvât un reste plus grand que le diviseur, de façon que le diviseur fût contenu dans ce reste; ce seroit une marque certaine que le chifre du quotient du membre sur lequel on opere, ou celui du membre précedent seroit trop petit : il faudroit dans ce cas recommencer la division de ces deux membres jusqu'à ce qu'on trouvât un reste du dernier de ces deux membres moindre que le diviseur.

Application des Regles de la Division aux exemples.

On a déja mis un premier exemple pour faire mieux concevoir aux Commençans les Regles de la Division à mesure qu'on les énonçoit; voici d'autres exemples.

II. EXEMPLE.

7377416	3201	
....	2304 $\frac{2312}{3201}$	
6402		
9754		2. membre.
....		
9603		
15116		3. & 4. membre.
....		
12804		
2312		reste.

Pour diviser 7377416 par 3201; 1°. J'écris le dividende, je tire un arc au devant, je mets le diviseur 3201 au haut de l'arc; je tire une ligne au dessous, & j'écrirai par ordre les chifres du quotient sous cette ligne à mesure que je les découvrirai.

2°. Pour avoir le premier chifre à gauche du quotient, je distingue le premier membre de la division, en prenant autant de rangs de chifres à la gauche du dividende qu'en contient le diviseur. Ces chifres du dividende sont 7377; & voyant que le diviseur est contenu dans le nombre que j'ai pris, ce nombre 7377 est le premier membre de ma division.

Je marque quatre points sous ce premier membre, dont le premier est sous 7 à droite, qui est le chifre des unitez du premier membre, & le dernier sous 7 à gauche qui est le dernier chifre du premier membre. Et je m'imagine que le diviseur est écrit à la place de ces points; que le chifre 3 le plus à gauche du diviseur est sous le dernier chifre 7 à gauche du premier membre.

Pour trouver le quotient de ce premier membre, je dis combien de fois 3, dernier chifre du diviseur, est-il en 7 qui est le nombre du premier membre qui est sur le dernier point, ou qui est censé sur 3? il y est deux fois; j'écris 2 au quotient.

Je multiplie le diviseur 3201 par le quotient 2, & j'en écris le produit 6402 sous le premier membre. Enfin je retranche ce produit du premier membre, & j'écris au dessous le reste 975.

La division du premier membre est achevée; & s'il étoit seul, le quotient 2 fait voir que le diviseur 3201 est contenu 2 fois dans le premier membre 7377, & qu'il y a de plus 975.

3°. Pour avoir le second membre, je mets un point sous 4, qui précede, dans le dividende, le premier membre; & je transf-

porte 4 au devant du reste 975, & j'ai 9754 pour le second membre de ma division. J'écris quatre points sous le second membre, le premier sous 4, & les autres en allant à gauche jusqu'au dernier qui se trouve sous 9. Et je dis 3, dernier chifre du diviseur, est contenu 3 fois dans 9, qui est le nombre du second membre qui se trouve sur le dernier point; ainsi j'écris au quotient 3 pour le quotient du second membre. Je multiplie le diviseur par le quotient 3, j'en écris le produit 9603 sous le second membre. Enfin j'ôte ce produit du second membre, & j'écris le reste 151 au dessous; & le second membre est divisé.

4°. J'écris un point sous 1 qui précede dans le dividende le dernier chifre 4 dont je me suis servi, & j'écris 1 au devant du reste 151 de la division du membre précedent, & j'ai 1511 pour le troisiéme membre de la division. Mais voyant que le diviseur 3201 n'est pas contenu dans ce membre, j'écris au quotient 0 pour le quotient de ce membre, & la division du troisiéme membre est achevée.

5°. Je mets un point sous 6, qui précede dans le dividende le dernier chifre 1 dont je me suis servi, & j'écris 6 au devant de 1511, & j'ai 15116 pour le dernier membre de ma division. J'écris quatre points sous ce membre, le premier sous 6 qui est le chifre des unitez, & le dernier se trouve sous 5. Je dis ensuite 3, dernier chifre du diviseur, est contenu 5 fois dans 15 qui est le nombre qui se trouve au dessus du dernier point; mais trouvant que le produit de 5 par le diviseur 3201 est plus grande que le membre 15116 que je divise; je n'écris pas 5 pour le quotient de ce dernier membre, j'écris seulement 4 au quotient. Je multiplie le diviseur 3201 par ce quotient 4. Je retranche le produit 12804, du dernier membre, & j'écris au dessous le reste 2312. J'ecris encore en fraction, à la droite du quotient, ce reste sur une ligne, & le diviseur au dessous. Et le quotient de ma division est $2304 \frac{2312}{3201}$ Ce qui me fait connoître que 3201 est contenu 2304 fois dans le dividende 7377416, mais que le dividende contient de plus 2312.

I. AVERTISSEMENT *important pour la pratique.*

LES Lecteurs qui commencent ne sçauroient trop se persuader que s'ils veulent tirer du profit de cet Ouvrage, & se

mettre en état d'apprendre facilement les Mathematiques, ils doivent se rompre aux calculs, & acquerir l'habitude de les faire promptement & avec facilité. Et que le seul moyen de former en eux cette facilité, est de faire eux-mêmes beaucoup d'exemples de la division qui contient les operations précedentes, & de faire de même beaucoup d'exemples des autres opetions qu'on doit expliquer dans la suite.

II. Avertisement.

Quand les Commençans se feront rendu familiere, par beaucoup d'exemples, la pratique de la division; il ne sera plus necessaire d'écrire les produits du diviseur par le quotient de chaque membre: il faudra faire mentalement la multiplication du diviseur par le quotient de chaque membre, & en même temps la soustraction de ce produit, du membre qu'on divise, sans rien écrire que le reste de la soustraction. C'est un abregé auquel ils doivent s'accoutumer, en voici un exemple.

III. Exemple.

305852	(	378
. . . . .		809 $\frac{50}{378}$
3452		
. . .		
50		

Pour diviser 305852 par 378, 1°, j'écris le dividende 305852, je tire un arc au devant; j'écris le diviseur au haut de l'arc; je tire une ligne sous le diviseur; la place du quotient sera sous cette ligne.

2°. Le diviseur ayant trois rangs, je prens les trois rangs de chifres 305 du dividende vers la gauche pour le premier membre; mais voyant que le diviseur surpasse 305, je prens encore le chifre 8, & j'ai 3058 pour mon premier membre à diviser. J'écris au dessous les 3 points qui y doivent occuper les places où j'imagine le diviseur; je mets le premier sous 8 qui est le chifre des unitez du membre à diviser, & le troisiéme point tombe sous 0; ainsi 30 est le nombre sous lequel est le dernier point. Je dis ensuite 3, dernier chifre du diviseur, est contenu 10 fois en 30; mais je ne puis mettre que 9 pour le quotient d'un membre: & trouvant encore en multipliant le diviseur 378 par 9, que le produit surpasse le membre que je divise, je n'écris que 8 pour le quotient du premier membre.

Je fais ensuite la multiplication du diviseur par le quotient, & en même temps la soustraction du produit qui en vient, du

membre que je diviſe, ſans écrire le produit, de cette maniere. 8 × 8 = 64; j'ôte 64 de 68, en ajoutant 6 dixaines à 8 pour le rendre égal à 64, ou plus grand que 64; & il reſte 4 que j'écris ſous 8, & je retiens les 6 dixaines que j'ai ajoutées à 8. Puis je dis 8 × 7 = 56, 56 + 6 que je retenois, = 62. Je retranche 62 de 65, en ajoutant à 5 ſix dixaines pour en pouvoir ſouſtraire 62, & il reſte 3 que j'écris ſous 5, & je retiens les 6 dixaines que j'ai ajoutées à 5. Enfin je dis 8 × 3 = 24, 24 + 6 que je retenois, = 30. Je retranche 30 de 30, & il reſte 0, qu'il eſt inutile d'écrire, n'y ayant pas de chifres dans les rangs qu'il devroit préceder.

La diviſion de ce premier membre eſt achevée, & j'ai pour reſte 34.

3° Je mets un point ſous 5 qui précede dans le dividende le premier membre que je viens de diviſer, & j'écris 5 au devant du reſte 34, & j'ai 345 pour le ſecond membre de ma diviſion. Mais le diviſeur 378 n'étant pas contenu dans ce ſecond membre, j'écris au quotient 0 pour le quotient du ſecond membre, & la diviſion de ce membre eſt achevée.

4°. Je mets un point ſous le chifre 2 du dividende qui précede le dernier chifre tranſporté, & j'écris 2 au devant de 345, & j'ai 3452 pour le troiſiéme & dernier membre de ma diviſion. J'écris au deſſous les trois points qui marquent les places des chifres du diviſeur ſous ce membre, & 34 eſt le nombre qui ſe trouve ſur le dernier point. Je dis enſuite 3, dernier chifre du diviſeur, eſt contenu 11 fois dans 34 qui eſt ſur le dernier point: mais je ne puis écrire que 9 pour le quotient d'un membre, ainſi j'écris 9 au quotient; & je dis 9 × 8 = 72; j'ôte 72 de 72, ajoutant 7 dixaines à 2 pour en pouvoir ſouſtraire 72, & j'écris le reſte qui eſt 0 ſous 2, & je retiens 7 dixaines que j'ai ajoutées à 2. Puis je dis 9 × 7 = 63; 63 + 7 dixaines que je retenois = 70. J'ôte 70 de 75, en ajoutant 7 dixaines à 5; j'écris le reſte 5 ſous 5, & je retiens 7 dixaines que j'ai ajoutées à 5 pour en pouvoir ſouſtraire 70. Enfin je dis 9 × 3 = 27; 27 + 7 que je retenois = 34. Je retranche 34 de 34, & le reſte eſt 0, qu'il eſt inutile d'écrire. La diviſion eſt achevée, puiſqu'il n'y a plus de chifre du dividende à tranſporter, & le quotient eſt 809 $\frac{50}{378}$.

REMARQUES.

REMARQUES.

1.

On connoît que le chifre qu'on a pris pour le quotient d'un membre est trop grand, lorsque le produit de ce quotient par le dernier chifre du diviseur, augmenté des dixaines qu'on est obligé de lui ajouter dans l'operation, surpasse le nombre qui est sur le dernier point. Par exemple, dans le dernier membre de l'exemple precedent, l'on a trouvé que le produit 27 de 9 × 3 augmenté de 7 dixaines qu'on retenoit, faisoit 34; si le nombre qui est sur le dernier point eût été moindre que 34, l'on eût reconnu par là que le quotient 9 du dernier membre eût été trop grand.

2.

Voici la pratique dont il faut se servir pour connoître, en divisant un membre, quel est le vrai quotient de ce membre, avant de l'écrire au quotient. Supposé que 9345 soit un membre à diviser, & que le diviseur soit 1987. L'on dira le dernier chifre 1 du diviseur est contenu 9 fois dans le chifre 9 qui est sur le dernier point. Or pour examiner si le quotient 9 est trop grand, je n'écris point 9 au quotient; je m'imagine seulement qu'il y est écrit, & je fais la multiplication & la soustraction, l'une & l'autre de gauche à droite, en commençant par les chifres les plus à la gauche, & je dis le quotient 9 multipliant le dernier chifre 1 du diviseur, le produit est 9. Je retranche par l'esprit ce produit 9, du nombre 9 qui est sur le dernier point dans le membre à diviser, & il ne reste rien. Ainsi il n'y a sur le pénultiéme point que 3 dans le membre à diviser. Je dis ensuite le quotient 9 multipliant le pénultiéme chifre 9 du diviseur, le produit est 81. Or 81 surpasse le nombre 3, qui est dans le dividende sur le pénultiéme point; ainsi 81 ne sçauroit se retrancher de 3. Je suis sûr par là, que le quotient 9 est trop grand pour ce membre à diviser. Il faut voir si 8 ne seroit point aussi trop grand pour le quotient de ce membre.

9345 (1987
....

9345 (1987
....

J'imagine 8 pour le quotient de ce membre, & je dis 8 × 1

= 8. J'ôte par l'esprit le produit 8 du nombre 9 qui est dans le dividende sur le dernier point, & il reste 1, qui étant joint à 3, qui est sur le point précedent, fait 13. Ainsi je retiens en mon esprit qu'il n'y a que 13 sur le point qui précede le dernier. Je dis ensuite $8 \times 9 = 72$. J'ôte par l'esprit 72 de 13, ce qui ne se peut pas faire; ainsi le quotient 8 est trop grand.

Je conçois 7 pour le quotient, & je dis $7 \times 1 = 7$. J'ôte 7 de 9, & il reste 2 qui fait 23 avec 3 qui précede 9. Ainsi je retiens qu'il y a 23 sur le point qui précede le dernier, & je dis $7 \times 9 = 63$. Or 63 ne peut pas être ôté de 23. Ainsi le quotient 7 est trop grand.

Je suppose 6 pour le quotient, & je dis $6 \times 1 = 6$. J'ôte 6 de 9, & il reste 3 qui fait 33 avec 3 qui précede 9 dans le dividende; ainsi il me faut concevoir 33 sur le point qui précede le dernier. Je dis ensuite $6 \times 9 = 54$. Or 54 surpasse 33 dont il faudroit le retrancher. Ainsi le quotient 6 est encore trop grand.

Je prens donc 5 pour le quotient, & je dis $5 \times 1 = 5$. J'ôte 5 de 9 & il reste 4 qui fait 43 avec 3, & je dis $5 \times 9 = 45$. Or 45 ne peut pas être retranché de 43. Ainsi le quotient 5 est encore trop grand.

Cela me fait supposer 4 pour le quotient, & je dis $4 \times 1 = 4$. J'ôte 4 de 9 & il reste 5, qui fait 53 avec 3 du dividende. Ainsi il y a 53 sur le point qui précede le dernier. Je dis ensuite $4 \times 9 = 36$. J'ôte 36 de 53, & il reste 17. Comme je vois que ce reste, qui a deux rangs, me suffira pour la division du membre que je divise, j'écris 4 au quotient; & je fais la division de ce membre à l'ordinaire, en disant $4 \times 7 = 28$. J'ôte 28 de 35, en ajoutant 3 dixaines à 5 pour en pouvoir soustraire 28, & j'écris le reste 7, & je retiens 3 dixaines. Puis je dis $4 \times 8 = 32$. $32 + 3$ que je retenois $= 35$. J'ôte 35 de 44, en ajoutant 4 dixaines à 4 pour en pouvoir ôter 35, & il reste 9 que j'écris. Puis je dis $4 \times 9 = 36$. $36 + 4$ que je retenois $= 40$. J'ôte 40 de 43, en ajoutant 4 dixaines à 3 pour en pouvoir ôter 40, & il reste 3 que j'écris, & je retiens les 4 dixaines que j'ai ajoutées; & je dis enfin, $4 \times 1 = 4$. $4 + 4$ que je retenois $= 8$. J'ôte 8 de 9, & j'écris le reste 1; & la division de ce membre est achevée.

9345	(1987
....	4
1397	

Si je n'eusse pas trouvé un reste 17, qui eût eu deux rangs de chifres, en ôtant le produit 36, fait du quotient supposé 4 par 9, de 53; c'est à dire, si je n'eusse eu un reste que d'un chifre; j'aurois continué par l'esprit de prendre le produit du quotient supposé 4 par les chifres restans 8 & 7 du diviseur, pour m'assurer si ces produits eussent pû se retrancher du membre à diviser; & je n'aurois écrit au quotient le chifre 4, pour le quotient de ce membre, qu'après m'être assuré, (en faisant la multiplication de gauche à droite de tous les chifres du diviseur les uns aprés les autres par ce quotient supofé 4, & en ôtant par l'esprit tous les produits particuliers, du membre à diviser,) que le produit du quotient supposé 4 par le diviseur, est contenu dans le membre à diviser.

Démonstration du Problême.

133. IL est évident qu'on trouve, par les Regles qu'on a données pour la division, le nombre qui exprime combien d'unitez de fois, de dixaines de fois, de centaines de fois, &c. le diviseur est contenu dans le dividende; puisqu'en retranchant par l'operation même tout autant de fois le diviseur du dividende, il ne reste rien, quand la division est exacte; c'est à dire sans reste. Ces Regles font donc trouver le nombre qui contient l'unité autant de fois que le diviseur est contenu dans le dividende; c'est à dire qu'elles font découvrir * le veritable quotient que l'on cherchoit. * 125.

Dans le premier exemple, il est évident que le diviseur 342 est contenu dans le dividende de 83106, 200 fois + 40 fois + 3 fois; puisqu'en retranchant le diviseur du dividende 200 fois + 40 fois + 3 fois, il ne reste rien.

Quand il y a un reste après la division, il est évident que si l'on ôtoit du dividende le reste, qui est toujours moindre que le diviseur, avant de faire la division, le quotient qu'on trouveroit par les Regles, exprimeroit exactement le nombre de fois que le diviseur est contenu dans le dividende diminué de ce reste. Ainsi elles font trouver le quotient qui exprime combien de fois le diviseur est contenu exactement dans le dividende, & ce que le dividende contient de surplus. Voici même la démonstration qui fait voir comment le quotient qu'on trouve par la division & la fraction qui se forme du reste, en écrivant le reste au numerateur, & le diviseur au dénominateur; comment,

dis-je, ce quotient & cette fraction, joints ensemble, sont le quotient total de la division; on se servira ici du troisiéme exemple. On nommera le dividende 305852, D; le diviseur 378, d; le reste qu'on trouve par la division, qui est 50, sera nommé r; le quotient 809, q, Il faut démon-

D 305852. (378 d / 809 q $\frac{50\ r}{378\ d}$

* 106. trer que $D.\ d :: q + \frac{r}{d}.\ 1$; & il s'ensuivra * que $q + \frac{r}{d}$ est
* 107. le quotient total. 1°. $D - r$, qui est le dividende D, dimi-
* 111. * 75. nué du reste r est égal à * qd. Ainsi $D = qd + r$. 2°. $\frac{qd + r}{d}.\ 1$
& 109. :: * $qd + r.\ d :: D.\ d$. Or $\frac{qd + r}{d} = \frac{qd}{d} + \frac{r}{d}$. Et $\frac{qd}{d} =$ * $\frac{q}{1}$
* 117. $=$ * q; ainsi $q + \frac{r}{d}.\ 1 :: D.\ d$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Enfin, pour ne rien laisser sans démonstration de tout ce que l'on a dit qui étoit nécessaire pour la pratique de la division, on va démontrer que le quotient de chaque membre de la division ne peut pas surpasser 9, comme
* 130. on l'a dit dans la * quatriéme Remarque. 1°. Ou le premier membre de la division n'a que le même nombre de rangs de chifres que le diviseur, comme dans le premier exemple; & dans ce cas le diviseur ne peut pas être contenu dans ce premier membre plus de neuf fois. Car en ajoutant un 0 au diviseur 342, on aura le nombre 3420, qui surpasse le premier membre 831, celui-ci ayant un rang de chifres de
* 15. moins. Or 3420 * contient exactement 10 fois le diviseur 342: donc le premier membre 831 contient le diviseur 342 moins de 10 fois.

831 (342 / ...

2°. Ou bien le premier membre de la division contient un rang de plus que le diviseur, comme dans le troisiéme exemple: il ne peut contenir qu'un rang de plus que le diviseur; puisque, s'il contient un rang de plus, le diviseur y est toujours contenu. Dans ce cas le dernier chifre 3 du premier membre ne peut pas surpasser le dernier chifre 3 du diviseur; & il faut, ou qu'ils soient égaux, comme dans le troisiéme exemple; & dans ce cas les chifres 78 du diviseur, qui precedent le dernier 3, doivent surpasser les chifres 05 qui précedent le dernier chifre du premier membre; car autrement le diviseur 378 seroit contenu dans les trois premiers chifres du dividende, & il ne faudroit pas prendre un qua-

3058 (378 / ....

triéme chifre du dividende pour faire le premier membre. Or dans ce cas si l'on écrit un o devant le diviseur 378, il est évident * que le nombre 3780 contiendra exactement 10 fois le diviseur 378; il est aussi évident que 3780 surpasse le membre à diviser 3058, à cause des chifres 78 du diviseur plus grands que les chifres 05 du membre à diviser. Donc le premier membre 3058 ne contient pas 10 fois le diviseur. Ou bien enfin il faut que le dernier chifre du premier membre à diviser soit moindre que le dernier chifre du diviseur, ce qui arrive le plus ordinairement, comme dans cet exemple où le diviseur est 952, & le membre à diviser 2345. Dans ce dernier cas de ce second article, il est évident qu'en ajoutant un o au devant du diviseur, on aura 9520 * qui contient exactement 10 fois le diviseur 952. Il est aussi évident que le membre à diviser 2345 est moindre que 9520, à cause du dernier chifre 9 du diviseur plus grand que le dernier chifre 2 du membre à diviser. Donc le diviseur 952 est contenu moins de 10 fois dans le membre à diviser.

*15.

2345 (952
...

*15.

Il suit, de ce que l'on vient de démontrer, que le quotient du premier membre ne peut surpasser 9. Mais l'on peut appliquer de suite aux membres suivans de la division, ce que l'on vient de démontrer du premier membre; parceque le reste qui vient de la division du premier membre, & de même le reste de chacun des autres, doit toujours être moindre que le diviseur; ce qui est cause qu'en ajoutant à chacun de ces restes le chifre du dividende que prescrit la Regle de la division, pour faire chacun des membres suivans; chacun de ces membres ne peut avoir qu'un rang de chifres de plus que le diviseur, ou un même nombre de rangs. Par consequent, suivant la démonstration qu'on vient de donner pour le premier membre, le quotient de chacun des autres ne peut surpasser 9.

La maniere de s'assurer que l'on a suivi exactement les Regles de la Division en faisant une Division, & celles de la Multiplication en faisant une Multiplication.

LES démonstrations des Problêmes de la Division & de la Multiplication font voir clairement que les Regles que l'on a données, font découvrir infailliblement le quotient que l'on

cherchoit par la division, & le produit que l'on cherchoit par la multiplication. Mais pour s'assurer que l'on a suivi ces regles dans la pratique, il faut, après avoir fait une division, multiplier le diviseur & le quotient l'un par l'autre; & s'il n'y a point eu de reste dans la division, & que l'on trouve pour produit le dividende même; c'est une marque que la division est bien faite; & s'il s'est trouvé un reste à la fin de la division, il faut ajouter ce reste au produit du diviseur multiplié par le quotient; & si l'on trouve que la somme de ce produit & du reste soit égale au dividende, on est assuré par-là que la division est bonne.

Pour s'assurer de même qu'une multiplication est bien faite, il faut diviser le produit que l'on a trouvé par la multiplication, il faut, dis-je, diviser ce produit par l'un des deux côtez du produit, & si l'autre côté est le quotient exact de la division, & qu'il n'y ait aucun reste; c'est une marque que la multiplication est bonne.

Ces preuves, pour s'assurer de la bonté d'une division & d'une multiplication, sont fondées sur ce que le diviseur doit être contenu autant de fois dans le dividende
*77. que le quotient contient de fois l'unité. Ainsi, * en multipliant le diviseur par le quotient, on doit trouver le dividende pour produit. Par la même raison, en divisant un produit par l'un de ses côtez, on doit trouver l'autre côté pour le quotient exact de la division.

La Division des nombres qui contiennent des parties décimales.

134. POUR faire la division des nombres qui contiennent des parties décimales, 1°, il faut que les parties décimales du dividende soient plus petites que les parties décimales du diviseur, ou du moins qu'elles leur soient égales. C'est pourquoi s'il falloit diviser un nombre entier ou un nombre qui ne contient que des dixiémes par un diviseur qui eût des milliémes, il faudroit réduire le nombre entier ou le nombre qui ne contient que des dixiémes, & qui est le dividende, au moins en milliémes, & même il est bon de la réduire en parties décimales beaucoup moindres que celles du diviseur, comme en
17. millionniémes, ou encore en plus petites. Cela se fait * sans

changer la valeur du dividende, en lui ajoutant autant de zero qu'il en faut pour cette réduction, & en marquant le point qui distingue les parties décimales d'avec les entiers.

2°. Il faut ensuite faire la division précisement * de la même maniere que si le dividende & le diviseur étoient des nombres entiers. * 116.

3°. Pour distinguer les parties décimales dans le quotient d'avec les entiers, il faut mettre autant de rangs pour les parties décimales qu'en contient le dividende de surplus après en avoir ôté les rangs des parties décimales du diviseur; c'est à dire, si le diviseur contient trois rangs de parties décimales, & le dividende cinq rangs, le quotient doit ne contenir que deux rangs de parties décimales, parceque deux est ce qui reste de cinq, après en avoir ôté trois. D'où l'on voit que si le diviseur & le dividende avoient le même nombre de rangs de parties décimales, le quotient ne contiendroit que des entiers sans parties décimales; & que si le diviseur étoit un nombre entier sans parties décimales, le quotient contiendroit autant de rangs de parties décimales qu'en contient le dividende.

EXEMPLE.

POUR diviser 2.62842^{v} par 1.234^{III}. 1°. Le dividende *c* ayant cinq rangs de parties décimales, & le diviseur *b* trois rangs; le dividende est tout préparé, & il n'est point nécessaire de le réduire à des parties décimales plus petites. 2°. Il faut faire la division comme dans les nombres entiers. 3°. Il faut marquer deux rangs de parties décimales au quotient, parceque le dividende ayant cinq rangs de parties décimales & le diviseur trois rangs, deux est le surplus de cinq sur trois.

```
c  2.62842ᵛ ( 1.234   b
   . . . . . . ( 2.13    a
     1604
     . . . .
      3702
      . . . .
      0000
```

Démonstration de la Division des nombres qui contiennent des parties décimales.

ON nommera C le nombre entier 262842; le nombre décimal 2.62842 sera nommé *c*; le nombre entier 1234, *B*; le nombre décimal 1. 234, *b*; le nombre entier 213, *A*; le nombre décimal 2. 13, *a*.

*126. 1°. Il est évident * que A est le quotient de C divisé par B.
*105. Ainsi $A = \frac{C}{B}$. Le quotient de c divisé par B * peut s'exprimer
*109. ainsi $\frac{c}{B}$. Mais * $\frac{C}{B} . \frac{c}{B} :: C . c$. Et c (2. 62842) * vaut préci-
*18. sément cent mille fois moins que C (262842.) Donc $\frac{c}{B}$ doit valoir cent mille fois moins que $\frac{C}{B}$. Pour faire valoir $\frac{c}{B} = 213$
*18. cent mille fois moins qu'il ne vaut, il faut écrire * 0. 00213'. Ainsi $\frac{c}{B} = 0. 00213$. L'on a donc déja démontré que quand le dividende c contient des parties décimales, & que le diviseur B ne contient que des entiers, le quotient $\frac{c}{B}$ doit contenir autant de rangs de parties décimales qu'en contient le dividende.

2°. Le quotient de $c = 2. 62842$ divisé par $b = 1. 234$ peut
*105. s'exprimer ainsi * $\frac{c}{b}$. Mais $\frac{c}{B} . \frac{c}{b} ::$ * $b . B$. Et $B = 1234$ *
*121. vaut mille fois plus que $b = 1. 234$. Donc le quotient $\frac{c}{b}$ doit
*18. valoir mille fois plus que $\frac{c}{B} = 0. 00213$: & pour faire valoir
*18. $\frac{c}{B} = 0. 00213$ mille fois plus qu'il ne vaut * il faut avancer le point qui distingue les parties décimales de trois rangs vers la droite de cette maniere 0002. 13. Ainsi $\frac{c}{b} = 0002. 13$. L'on a donc démontré que pour avoir le nombre des rangs des parties décimales du quotient venu de la division d'un nombre décimal qui a plus de rangs de parties décimales que le diviseur, il falloit ôter le nombre des rangs des parties décimales du diviseur du nombre des rangs des parties décimales du dividende, & que le surplus étoit le nombre des rangs des parties décimales du quotient.

D'où il suit qu'en divisant 0. 080850 par 0. 35 ; le quotient sera 0. 2310. Si le diviseur étoit 0. 035, le quotient seroit 2. 310. Si le diviseur étoit 0. 000035 ; le quotient seroit l'entier 2310 sans parties décimales.

Usage de la Division des nombres qui contiennent des parties décimales dans les Divisions qui ne sont pas exactes, c'est à dire, dans lesquelles on trouve une fraction outre le quotient qui est un nombre entier.

135. L'ON a démontré * que quand il y avoit un reste après la
*133. division, le quotient que l'on trouvoit en nombres entiers joint à la fraction qui a le reste pour numerateur, & le diviseur pour dénominateur, étoit le quotient total de la division.

Or

Or le calcul des parties décimales se faisant comme celui des nombres entiers, l'on a trouvé qu'il étoit très commode dans les Sciences Mathematiques-Pratiques de réduire la fraction, qui est une partie du quotient, en parties décimales ; parcequ'après être arrivé, en continuant la division, à des parties décimales très petites, par exemple, à des millioniémes, on peut négliger ce qui reste, comme étant insensible dans la pratique, & comme ne pouvant causer d'erreur sensible. Voici comment cela se fait.

305852 { 378 / 809. 132275^{vi}
.....
2. & 3. membre, 3452
...
500 Reste qu'on continue de diviser.
...
1220
...
860
...
1040
...
2840
...
1940
...
50

On prendra pour exemple le troisiéme, où après avoir divisé 305852 par 378, l'on a trouvé pour quotient le nombre entier 809, & pour reste de la division le nombre 50. Il faut mettre après le quotient 809 un point pour distinguer les parties décimales que l'on découvrira, d'avec les entiers 809 déja découverts ; ajouter un 0 au reste 50, ce qui donnera le nouveau membre de la division 500. Il faut diviser ce membre par le diviseur 378, & écrire au quotient le chifre 1 qu'on trouvera pour le quotient de ce membre qui sera une dixiéme ; & après avoir divisé ce membre, il faudra ajouter un 0 devant le reste 122, ce qui donnera un nouveau membre 1220, dont on écrira le quotient 3 au devant du quotient déja trouvé ; & après en avoir divisé ce membre, on ajoutera un 0 devant le reste 86, & l'on continuera de diviser le nouveau membre 860 toujours par le même diviseur 378, d'en écrire le quotient 2 au devant du quotient déja decouvert, & après avoir divisé ce membre, on continuera d'ajouter un 0 devant le reste 104 : on continuera, dis-je, ainsi la division tant qu'on voudra. On l'a continuée ici jusqu'aux millioniémes, & l'on a trouvé qu'en divisant 305852 par 378, le quotient étoit

809 . 132275^{vi} . On peut négliger le reste qui est moindre qu'une millioniéme.

Voici la raison de cette operation. C'est la même chose d'ajouter o après le reste 50 de la division, qui a donné pour quotient le nombre entier 809, que d'ajouter ce o au divi-
*17. dende 305852, * ce qui le réduiroit en dixiémes, car l'on auroit 305852. o. Ainsi le quotient 1 qu'on trouve, après
*134. le quotient en entiers 809, * vaut des dixiémes. C'est aussi la même chose d'ajouter successivement o à chacun des restes des divisions des membres suivans, que d'ajouter ces zeros en même temps au dividende 305852. Or en ajoutant,
*17. par exemple 6 zeros à ce dividende, * on le réduiroit en
*134. millioniémes, & le quotient que l'on trouveroit ensuite * contiendroit outre le nombre entier 809, le nombre décimal o. 132275^{vi} qui vaut des millioniémes.

Usage de la Division dans les nombres de differentes especes pour réduire les moindres especes aux plus grandes.

136. DANS les nombres de differentes especes, la division sert à réduire les moindres especes aux plus grandes. Pour cela il faut diviser le nombre qui contient celle des moindres especes, qu'on veut réduire à une plus grande, par le nombre qui exprime combien de fois cette moindre espece est contenue dans la plus grande à laquelle on veut la réduire, & le quotient sera la valeur de cette moindre espece réduite à la plus grande. Ainsi pour réduire 120 pouces en pieds, il faut diviser 120 par 12, qui est le nombre qui exprime combien de fois un pouce est dans un pied, & le quotient 10 pieds sera la valeur de 120 pouces reduits en pieds. Pour réduire 100 pieds en toises, il faut diviser 100 pieds par 6, qui est le nombre qui exprime combien de fois un pied est dans une toise, & le quotient 16 toises + $\frac{4}{6}$ de toise sera la valeur de 100 pieds réduits en toises; c'est à dire que 100 pieds valent 16 toises plus 4 sixiémes d'une toise, c'est à dire plus 4 pieds. Pour réduire des pouces immediatement à des toises, il faut diviser le nombre qui exprime les pouces par 72, parcequ'un pouce est 72 fois dans une toise.

Il n'est pas necessaire, pour réduire une moindre espece à une plus grande, que le nombre qui exprime la moindre

ſurpaſſe le nombre qui exprime combien de fois cette moindre eſpece eſt contenue dans la plus grande. Ainſi pour réduire 5 pouces en pieds, il faut écrire $\frac{5}{12}$, & cette fraction marque que 5 pouces valent cinq douziémes d'un pied. De même pour réduire 5 pouces en toiſes, on écrira $\frac{5}{72}$, ce qui ſignifie cinq ſeptante deuxiémes de pieds. Car $\frac{5}{6}$ * eſt le quo- *112.
tient de 5 diviſé par 6, & $\frac{5}{72}$ * eſt le quotient de 5 di- *112.
viſé par 72.

Ce qu'on vient de dire des nombres de differentes eſpeces, par rapport aux toiſes, doit s'appliquer aux nombres de differentes eſpeces, par rapport aux autres grandeurs.

REMARQUE.

On peut remarquer que c'eſt par le moyen de la diviſion qu'on partage à un nombre déterminé de perſonnes, ce que chacune doit avoir d'une ſomme déterminée; par exemple, pour partager 300000 livres à 30 perſonnes, il faut diviſer 300000 par 30, & le quotient 10000 liv. ſera la part de chacun. Que c'eſt de même par la diviſion qu'on trouve combien une ſomme déterminée doit produire d'intereſt au denier 20, au denier 18, au denier 15, ou à un autre denier. Car on entend par le denier 20 d'intereſt d'une ſomme, par exemple, de 40000 livres, la vingtiéme partie de cette ſomme, par le denier 15, la quinziéme partie, & ainſi des autres. D'où l'on voit que pour trouver cet intereſt il faut diviſer la ſomme propoſée par 20, ou par 15, &c. & le quotient ſera ce que l'on cherche.

La diviſion ſert de même à réſoudre beaucoup de queſtions de pratique dans le Commerce; & il ſuffit de les entendre pour trouver leur réſolution, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'en parler dans cet Ouvrage des calculs, qui eſt principalement pour réſoudre les queſtions des Mathematiques.

La Diviſion des nombres de differentes eſpeces.

137. Pour diviſer un nombre qui contient differentes eſpeces par un autre nombre qui contient auſſi differentes eſpeces, la Regle generale eſt * de réduire l'un & l'autre à la plus *86.
petite eſpece; de diviſer enſuite le dividende réduit à la moindre eſpece par le diviſeur auſſi réduit à la moindre eſpece; & quand on aura trouvé le quotient (ce quotient

* 136. n'exprime que la moindre espece) on le réduira * aux plus grandes especes par la division.

LA DIVISION DES GRANDEURS LITTERALES.

La Division des grandeurs litterales incomplexes.

PROBLÊME

138. DIVISER *une grandeur litterale incomplexe donnée par une autre grandeur litterale incomplexe aussi donnée, & en trouver le quotient.*

REGLE *ou operation*. Il y a trois choses à faire dans la division des grandeurs litterales incomplexes pour en trouver le quotient. 1°. Quand le dividende & le diviseur sont précedez de nombres entiers qui marquent combien chacun est pris de fois, il faut diviser, par la division des nombres entiers, le nombre qui précede le dividende par le nombre qui précede le diviseur, & le quotient sera le nombre qui doit préceder le quotient litteral qu'on cherche. Ainsi pour diviser $12ab$ par $3a$; il faut diviser 12 par 3, & le quotient 4 devra préceder le quotient litteral quand on l'aura trouvé. Quand même la division des nombres, qui précedent le dividende & le diviseur, donneroit une fraction pour quotient, il ne faudroit pas moins marquer cette fraction au devant du quotient litteral. Par exemple, si l'on divisoit $3ab$ par $2a$, le quotient du nombre 3, divisé par 2, seroit $\frac{3}{2}$, & il faudroit écrire $\frac{3}{2}$ au devant du quotient litteral qu'on trouveroit. Mais pour ne pas multiplier les difficultez, on évitera dans la division des grandeurs complexes celles qui viendroient de ces fractions numeriques que l'on expliquera à fond dans le Livre suivant, & on supposera dans la division des grandeurs complexes que le nombre qui précede chaque dividende, peut se diviser exactement par le nombre qui précede le diviseur.

2°. Il faut trouver le quotient du dividende litteral par le diviseur litteral, & cela renferme trois cas. Le premier est quand le dividende & le diviseur n'ont aucune lettre commune. Dans ce cas le quotient * est la fraction dont le dividende est le numerateur, & dont le diviseur est le dénominateur. Par exemple, pour diviser $12ab$ par $2c$, il faut

* 105.

écrire la fraction $\frac{6ab}{c}$ pour le quotient. Car * $12ab \,.\, 2c$ *111.
$:: \frac{12ab}{2c} \,.\, 1 :: $ * $\frac{6ab}{c} \,.\, 1$. De même $\frac{b}{a}$ eſt le quotient de b diviſé *109.
par a.

Le ſecond cas eſt quand le diviſeur a quelques lettres communes avec le dividende, & non pas toutes, comme s'il falloit diviſer abc par ad. Dans ce cas le quotient eſt encore une fraction, il faut écrire pour le numerateur les lettres du dividende qui ne ſont pas dans le diviſeur, & pour dénominateur les lettres du diviſeur qui ne ſont pas communes avec le dividende. Ainſi pour diviſer abc par ad, on écrira pour quotient $\frac{bc}{d}$. Car $abc \,.\, ad$: * $bc \,.\, d ::$ * $\frac{bc}{d} \,.\, 1$. Ainſi * $\frac{bc}{d}$ eſt le *109.
quotient de abc diviſé par ad. De même pour diviſer a^3b^2 *111.
par a^2bc, il faut écrire $\frac{ab}{c}$ pour quotient. *106.

Le troiſiéme cas eſt quand toutes les lettres du diviſeur ſe trouvent dans le dividende, comme s'il falloit diviſer ab par b, ou a^3b^2 par a^2b; dans ce cas les lettres du dividende qui reſtent, après en avoir effacé les lettres du diviſeur, ſont le quotient. Ainſi a eſt le quotient de ab diviſé par b; ab eſt le quotient de a^3b^2 diviſé par a^2b. La raiſon en eſt évidente, car
ab * étant le produit de b multiplié par a, l'on a cette pro- *88. *72.
portion * $1 \,.\, a :: b \,.\, ab$. D'où l'on tire la proportion inverſe *
$ab \,.\, b :: a \,.\, 1$. Ainſi * a eſt le quotient de ab diviſé par b. *55. *106.

Dans ce troiſiéme cas le quotient litteral eſt une grandeur entiere, & l'on ne ſe ſervira que de cette diviſion des grandeurs incomplexes, où le quotient eſt une grandeur entiere, dans la diviſion des grandeurs complexes, juſqu'à ce qu'on ait expliqué dans le Livre ſuivant le calcul des fractions.

3°. Il faut diviſer le ſigne + ou — qui précede le dividende par le ſigne + ou — qui précede le diviſeur; voici la Regle qu'il faut ſuivre, pour trouver le ſigne du quotient.

Regle des ſignes + & — dans la Diviſion.

139. QUAND le ſigne du dividende & celui du diviſeur ſont tous deux +, ou tous deux —; le ſigne du quotient eſt toujours +.

Quand les ſignes du dividende & du diviſeur ſont differens, c'eſt à dire, que l'un eſt + & l'autre —; le ſigne du quotient eſt toujours —.

Démonſtration. Il y a dans la diviſion une proportion inverſe de celle qui eſt dans la multiplication. Dans la multiplication de b par a, il y a cette proportion * $1 \,.\, a :: b \,.\, ab$. *72.

*106. Et la proportion inverſe *ab* . *b* :: *a* . 1 * ſe trouve dans la diviſion. Ainſi dans la diviſion le dividende *ab* eſt le produit de la multiplication. Le diviſeur *b* eſt le multiplié; le quotient *a* eſt le multiplicateur, & l'unité poſitive eſt le quatriéme terme. D'où l'on voit qu'en multipliant le diviſeur *b* par le quotient *a*, le produit eſt le dividende *ab*.

Il ſuit de-là évidemment, par rapport aux ſignes + & —, que le quotient dans la diviſion doit avoir le même ſigne, que le multiplicateur dans la multiplication.

Or, 1 Quand le produit + *ab* a le ſigne +, & le multiplié
*95. + *b* le ſigne +; cela vient de ce que * le multiplicateur + *a* a neceſſairement le ſigne +, & la proportion eſt + 1 . + *a* :: + *b* . + *ab*. 2°. Quand le produit — *ab* a le ſigne —, &
*95. le multiplié *b* le ſigne —; cela vient de ce que * le multiplicateur + *a* a le ſigne +. Et la proportion eſt + 1 . + *a* :: — *b* . — *ab*. 3°. Lorſque le produit + *ab* a +, & le mul-
*95. tiplié — *b* a —; cela vient * de ce que le multiplicateur — *a* a —. Et la proportion eſt + 1 . — *a* :: — *b* . + *ab*. 4°. Enfin ſi le produit — *ab* a —, & le multiplié + *b* a +; le multiplicateur — *a* a —, & la proportion eſt + 1 . — *a* :: + *b* . — *ab*.

Donc, 1°. dans la diviſion qui contient la proportion inverſe de celle de la multiplication, ſi le produit, c'eſt à dire le dividende + *ab* a le ſigne + & le diviſeur + *b*, qui eſt le multiplié dans la multiplication, a auſſi le ſigne +, le quo-
*95. tient + *a*, qui eſt le multiplicateur dans la multiplication, * doit avoir +, & la proportion ſera + *ab* . + *b* :: + *a* . + 1.

Donc, 2°, ſi le dividende — *ab* a —, & ſi le diviſeur — *b* a auſſi —; le quotient + *a* doit avoir +, & la proportion ſera — *ab* . — *b* :: + *a* . + 1.

Donc, 3°, ſi le dividende + *ab* a +, & le diviſeur — *b* a —; le quotient — *a* doit avoir —, & la proportion ſera + *ab* . — *b* :: — *a* . + 1.

Donc, 4°, ſi le dividende — *ab* a —, & le diviſeur + *b* a +; le quotient — *a* doit avoir —, & la proportion ſera — *ab* . + *b* :: — *a* . + 1. Ce ſont-là tous les cas *qu'il falloit démontrer*.

Cette démonſtration de la Regle des ſignes pour la diviſion eſt une ſuite évidente & neceſſaire de celle qu'on a donnée dans l'art. 95 pour les ſignes de la multiplication; & il

est inutile de prolonger ce Traité d'une démonstration semblable à celle de cet article. Ceux qui en voudront une semblable, ne trouveront aucune difficulté à la faire eux-mêmes.

Exemples de division pour les grandeurs litterales incomplexes.

POUR diviser $+15a^3bcc$ par $-3abc$, 1°, j'écris le dividende, je tire un arc au devant, j'écris le diviseur au haut de cet arc, & je tire une ligne au dessous. La place du quotient sera sous cette ligne. Ensuite je dis $+$ divisé par $-$ donne $-$ pour le quotient, j'écris $-$ au quotient. 2°. Je dis 15 divisé par 3, le quotient est 5, j'écris 5 au quotient. 3°. Enfin je dis a^3bcc divisé par abc, le quotient est a^2c. J'écris a^2c au quotient, & le quotient de ma division est $-5a^2c$

I. EXEMPLE.

$$+15a^3bcc \left\{ \frac{-3abc}{-5a^2c} \right.$$

II. EXEMPLE.

De même le quotient de $-7a^3b$ divisé par $-ab$ est $+7a^2$.

$$-7a^3b \left\{ \frac{-ab}{+7a^2} \right.$$

III. EXEMPLE.

Le quotient de $-12abc$ divisé par $+3a$ est $-4bc$.

$$-12abc \left\{ \frac{+3a}{-4bc} \right.$$

REMARQUE.

DANS toute fraction & dans tout rapport, la fraction est * le quotient du numerateur divisé par le dénominateur. *112.
Ainsi il est bon de remarquer, par rapport aux signes * que *139.
$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$, & de même $\frac{-2}{-3} = +\frac{2}{3}$; que $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$; que $\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$. Enfin que $\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$.

COROLLAIRE.

140. LA division des grandeurs litterales incomplexes suffit pour faire la division d'une grandeur litterale complexe par un diviseur litteral incomplexe. Par exemple, pour diviser $abxx + acxx - b^2xx$ par xx, il faut écrire au quotient $ab + ac - b^2$, c'est

$$abxx + acxx - b^2xx \left\{ \frac{xx}{ab + ac - b^2} \right.$$

à dire, le quotient contient la ſomme des lettres des grandeurs litterales incomplexes qui reſtent au dividende après en avoir effacé toutes les lettres du diviſeur, avec leurs mêmes ſi-
*139. gnes * quand le diviſeur a +, & avec des ſignes oppoſez quand le diviſeur a —.

La Diviſion des grandeurs litterales complexes.

PROBLÊME.

141 DIVISER *une grandeur litterale complexe donnée par une autre grandeur litterale complexe auſſi donnée, & en trouver le quotient.*

*102. REGLE *ou operation*. 1°. Il faut ordonner * le dividende & le diviſeur, par rapport à une même lettre qu'on peut choiſir telle qu'on voudra, ſi ce n'eſt dans les diviſions dont le dividende & le diviſeur contiennent les lettres qui marquent les inconnues qu'on cherche dans les Problêmes; dans ces diviſions l'on ordonne le dividende & le diviſeur par rapport à ces lettres des inconnues. Quand le dividende & le diviſeur ſont déja ordonnez, on n'a pas beſoin de cette préparation.

Il faut enſuite écrire le dividende; tracer un arc au devant; écrire le diviſeur au haut de cet arc, & tirer une ligne au deſſous. La place du quotient ſera ſous cette ligne.

Par exemple, pour diviſer $6a^3 - 13a^2b + 6ab^2$ *par* $2a^2 - 3ab$, *dont les termes ſont ordonnez par rapport à la lettre* a, *on commence par écrire le dividende & le diviſeur comme on le voit ici.*

EXEMPLE I.

$$\begin{array}{l|l} 6a^3 - 13a^2b + 6ab^2 & 2a^2 - 3ab \\ \cline{2-2} \;\;0 \qquad\quad 0 & 3a \\ \qquad - 4a^2b & \end{array}$$

2°. Il faut diviſer le premier terme du dividende par le premier terme du diviſeur, comme dans la diviſion des grandeurs incomplexes; en écrire le quotient ſous la ligne qui eſt ſous le diviſeur; multiplier tous les termes du diviſeur par ce quotient, & en même temps qu'on en trouve les produits, les retrancher du dividende, & en écrire le reſte au deſſous, quand il y en a un, s'il n'y a pas de reſte, on écrit o.

Quand on ôte du dividende les produits du quotient multiplié

multiplié par les termes du diviseur, on tranche par une ligne les grandeurs du dividende sur lesquelles on a operé, & qui ne doivent plus servir; mais pour la commodité de l'impression, on mettra un zero sous chaque grandeur du dividende qui ne doit plus servir.

Dans cet exemple je dis, $+ 6a^3$ *divisé par* $+ 2a^2$ *donne pour quotient* $+ 3a$, *j'écris* $+ 3a$ *au quotient; ensuite je multiplie tous les termes du diviseur par ce quotient, & j'en ôte en même temps les produits du dividende, en disant* $+ 3a \times 2a^2 = + 6a^3$; *pour ôter* $+ 6a^3$ *il faut supposer * que c'est* $- 6a^3$, *& dire* $+ 6a^3$ *du* *71.
dividende $- 6a^3$ *qui en est retranché, il reste* o, *j'écris* o *sous* $6a^3$ *du dividende, pour me faire souvenir que je me suis servi de* $6a^3$. *Ensuite je dis* $+ 3a \times - 3ab = - 9a^2b$, *mais pour ôter* $- 9a^2b$, *il faut m'imaginer que c'est ** $+ 9a^2b$, *& dire* $- 13a^2b$ *du divi-* *71.
dende $+ 9a^2b$ *qui en est retranché, le reste est* $- 4a^2b$, *j'écris* o *sous* $- 13a^2b$, *& j'écris au dessous le reste* $- 4a^2b$. *Le reste du dividende après cette premiere operation est* $- 4a^2b + 6ab^2$. *Il faut continuer la division sur ce reste.*

3°. Le reste qu'on a trouvé par l'operation précedente, & les grandeurs du dividende qui n'ont pas encore servi, sont le nouveau dividende qu'il faut continuer de diviser par le même diviseur, de la maniere qu'on vient d'expliquer dans le second article. C'est à dire il faut diviser le premier terme de ce nouveau dividende par le premier terme du diviseur; en écrire le quotient devant celui qu'on a déja trouvé; multiplier tous les termes du diviseur par ce nouveau quotient; & à mesure qu'on en trouve les produits, retrancher ces produits du dividende, & en écrire le reste au dessous, & s'il n'y a pas de reste, écrire o pour le reste.

$6a^3$	$- 13a^2b$	$+ 6ab^2$	{	$2a^2 - 3ab$
o	o	o		$3a - 2b$
	$- 4a^2b$			
	o			

Dans cet exemple le nouveau dividende est le reste $- 4a^2b$ *qu'on a trouvé par l'operation précedente joint aux grandeurs du dividende dont on ne s'est pas encore servi, c'est à dire le nouveau dividende est* $- 4a^2b + 6ab^2$. *Pour continuer la division je dis le quotient de* $- 4a^2b$ *par* $+ 2a^2$ *est* $- 2b$; *j'écris* $- 2b$ *au quotient. Je multiplie tous les termes du diviseur par ce nouveau quotient, & à mesure que j'en trouve les produits, je les ôte du dividende, & j'en écris*

le reste s'il s'en trouve, en disant $- 2b \times + 2a^2 = - 4a^2b$; *mais pour ôter* $- 4a^2b$ *il faut supposer que c'est* $+ 4a^2b$; *&* *dire* $- 4a^2b$ *du dividende* $+ 4a^2b$ *qui en est retranché, le reste est* o; *j'écris* o *sous* $- 4a^2b$; *& je dis* $- 2b \times - 3ab = + 6ab^2$; *mais pour ôter* $+ 6ab^2$ *il faut que je suppose* $- 6ab^2$, *& je dis* $+ 6ab^2$ *du dividende* $- 6ab^2$ *qui en est retranché, le reste est* o; *j'écris* o *sous* $+ 6ab^2$. *Et comme il n'y a plus de grandeur dans le dividende, & que le reste est* o, *la division est achevée, & elle est exacte. Le quotient est* $3a - 2b$.

4°. Si l'operation précedente donne un reste, ce reste joint avec les grandeurs du dividende, dont on ne s'est pas encore servi, s'il y en a, fait un nouveau dividende qu'il faut diviser de la maniere qu'on a expliquée dans le second & le troisiéme articles. L'on continue toujours la division jusqu'à ce qu'on trouve o pour le dernier reste, & alors la division est exacte, & le quotient qu'on a trouvé est exact; ou bien jusqu'à ce qu'on trouve un reste qui ne peut plus se diviser par le diviseur, & alors on écrit le dernier reste pour numerateur d'une fraction, & le diviseur pour dénominateur, & le quotient en grandeurs entieres joint avec cette fraction faite du dernier reste & du diviseur, est le quotient total de la division. D'où l'on voit que si l'on ôtoit du dividende le dernier reste avant que de faire la division, le dividende diminué de ce reste se diviseroit exactement par le diviseur, & le quotient, qu'on a trouvé en grandeurs entieres, feroit le quotient exact.

Exemples de la Division des grandeurs litterales complexes.

EXEMPLE II.

$a^3 \; * \; * \; - b^3 \; (\; \underline{a - b}$

POUR diviser $a^3 - b^3$ par $a - b$, 1°, j'écris le dividende $a^3 - b^3$ en marquant par des étoiles les places des deux termes qui manquent, dans lesquelles devroient être les puissances a^2 & a; je tire un arc au devant; j'écris le diviseur $a - b$ au haut de cet arc; je tire une ligne au dessous, la place du quotient est sous cette ligne.

2°. Je dis a^3 divisé par a le quotient est a^2; j'écris a^2 au quotient. Je dis ensuite $a^2 \times a = + a^3$; mais pour ôter $+ a^3$ il faut que je suppose $- a^3$. Et je dis $+ a^3$ du dividende $- a^3$

qui en est retranché, le reste est o. J'écris o sous a^3, & je dis $+ a^2 \times - b = - a^2b$; mais pour ôter $- a^2b$, il faut que je suppose $+ a^2b$; & comme il n'y a point de grandeur dans le dividende qui contienne a^2b, j'écris le reste $+ a^2b$.

$$\begin{array}{llll} a^3 & * & * & -b^3 \\ o & & & o \\ & +a^2b & +ab^2 & \\ & o & o & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a-b \\ \hline a^2+ab+b^2 \end{array} \right.$$

3°. Le reste $+ a^2b$ joint à $- b^3$ du dividende fait le dividende nouveau $+ a^2b - b^3$, sur lequel je continue la division, en disant $+ a^2b$ divisé par $+ a$, le quotient est $+ ab$; j'écris $+ ab$ au quotient: je dis ensuite $+ ab \times + a = + a^2b$; mais pour ôter $+ a^2b$, il faut que je suppose $- a^2b$, & que je dise $+ a^2b$ du dividende $- a^2b$ qui en est retranché, le reste est o; j'écris o sous $+ a^2b$: & je dis $+ ab \times - b = - ab^2$, pour retrancher $- ab^2$, il faut écrire $+ ab^2$ pour le reste, n'y ayant aucune grandeur dans le dividende qui contienne ab^2 dont on puisse retrancher ab^2. Ainsi j'écris $+ ab^2$ pour le reste.

4° Ce reste $+ ab^2$ joint à $- b^3$ fait le dividende nouveau $+ ab^2 - b^3$. Je le divise en disant $+ ab^2$ divisé par $+ a$, le quotient est $+ b^2$. J'écris $+ b^2$ au quotient. Je dis ensuite $+ b^2 \times a = + ab^2$, pour retrancher $+ ab^2$ du dividende, il faut que je suppose $- ab^2$, & que je dise ensuite $+ ab^2$ du dividende $- ab^2$ qui en est retranché, le reste est o. J'écris o sous $+ ab^2$. Et je dis $+ b^2 \times - b = - b^3$. Mais pour retrancher $- b^3$, il faut que je suppose $+ b^3$, & que je dise $- b^3$ du dividende $+ b^3$ qui en est retranché, le reste est o; j'écris o sous $- b^3$.

Comme il n'y a plus de grandeur dans le dividende sur laquelle on n'ait operé, & que le dernier reste est o, la division est exacte, & le quotient $a^2 + ab + b^2$ est exact.

On peut remarquer que les produits qui se détruisent dans la multiplication en multipliant $a^2 + ab + b^2$ par $a - b$, viennent se représenter en divisant le produit de ces deux grandeurs qui est $a^3 - b^3$ par l'une des deux.

EXEMPLE III.

POUR diviser $c^2fx^3 - a^2cfx^2 - b^2c^2x^2 - 3b^2cfx^2 + a^2b^2cx + 3a^2b^2fx + 3b^4cx - 3a^2b^4$ par $cx - a^2$; après avoir or-

donné le dividende & le diviſeur par rapport à la lettre x, & après avoir mis toutes les parties du dividende qui ne ſont qu'un même terme les unes ſous les autres, & écrit le dividende & le diviſeur dans les places qui leur conviennent; Je dis le quotient de $+ c^2fx^3$, diviſé par $+ cx$, eſt cfx^2; j'écris au quotient cfx^2 : puis je dis $cfx^2 \times cx = c^2fx^3$, mais c^2fx^3 devant être retranché du dividende, je dois ſuppoſer $- c^2fx^3$, & dire $+ c^2fx^3$ du dividende $- c^2fx^3$ qui en eſt re-

$$\begin{array}{ccccccc} c^2fx^3 & - a^2cfx^2 & + a^2b^2cx & - 3a^2b^4 & \left\{ \begin{array}{l} cx - a^2 \\ \hline cfx^2 - b^2cx + 3b^4 \\ \quad\quad - 3b^2fx \end{array} \right. \\ o & o & o & o & \\ & - b^2c^2x^2 & + 3a^2b^2fx & & \\ & o & o & & \\ & - 3b^2cfx^2 & + 3b^4cx & & \\ & o & o & & \end{array}$$

tranché, le reſte eſt o; j'écris o ſous c^2fx^3; puis je dis $+ cfx^2 \times - a^2 = - a^2cfx^2$; mais comme il faut ôter $- a^2cfx^2$, je dois ſuppoſer $+ a^2cfx^2$, & dire $- a^2cfx^2$ du dividende $+ a^2cfx^2$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o, j'écris o ſous $- a^2cfx^2$. Je diviſe enſuite les grandeurs ſur leſquelles je n'ai pas encore operé, & je dis le quotient de $- b^2c^2x^2 - 3b^2cfx^2$ par $+ cx$, eſt $- b^2cx - 3b^2fx$, je l'écris au quotient, puis je dis $\overline{- b^2cx - 3b^2fx} \times + cx = - b^2c^2x^2 - 3b^2cfx^2$, & ce produit devant être retranché, je dois ſuppoſer $+ b^2c^2x^2 + 3b^2cfx^2$, & dire $- b^2c^2x^2 - 3b^2cfx^2$ du dividende $+ b^2c^2x^2 + 3b^2cfx^2$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o; j'écris o ſous $- b^2c^2x^2$, & ſous $- 3b^2cfx^2$: Je dis enſuite $-\overline{b^2cx - 3b^2fx} \times - a^2 = + a^2b^2cx + 3a^2b^2fx$. Et ce produit devant être retranché, je ſuppoſe $- a^2b^2cx - 3a^2b^2fx$, & je dis $+ a^2b^2cx + 3a^2b^2fx$ du dividende $- a^2b^2cx - 3a^2b^2fx$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o; j'écris o ſous $+ a^2b^2cx$, & ſous $+ 3a^2b^2fx$.

Enfin je diviſe les grandeurs $+ 3b^4cx - 3a^2b^4$ qui reſtent dans le dividende par le diviſeur $cx - a^2$, en diſant le quotient de $+ 3b^4cx$ par $+ cx$ eſt $+ 3b^4$, je l'écris au quotient; & je dis $+ 3b^4 \times cx = + 3b^4cx$; mais ce produit devant être retranché, je ſuppoſe $- 3b^4cx$, & je dis $+ 3b^4cx$ du divi-

dende — $3b^4cx$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o, j'écris o ſous $+ 3b^4cx$, & je dis $+ 3b^4 \times - a^2 = - 3a^2b^4$. Or $- 3a^2b^4$ devant être retranché, je ſuppoſe $+ 3a^2b^4$, & je dis $- 3a^2b^4$ du dividende $+ 3a^2b^4$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o, j'écris o ſous $- 3a^2b^4$. N'y ayant plus de grandeur au dividende ſur laquelle je n'aye operé, & le dernier reſte étant o, la diviſion eſt exacte, & le quotient exact eſt $cfx^2 - b^2cx - 3b^2fx + 3b^4$.

EXEMPLE IV.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r & x^2 + fx + g \\ \hline
\text{o} \quad \text{o} \quad \text{o} & x^2 + nx + p \\
- fx^3 - gx^2 - gnx - gp & \quad - fx - g \\
\quad \text{o} \quad \text{o} & \qquad\quad - fn \\
\quad - fnx^2 + fgx + g^2 & \qquad\quad + f^2 \\
\qquad \text{o} & \\
\quad + f^2x^2 - fpx + fgn & \\
\qquad \text{o} & \\
\qquad + fgx - f^2g & \\
\qquad + f^2nx & \\
\qquad - f^3x &
\end{array}
$$

On diviſera de la même maniere $x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ par $x^2 + fx + g$, en diſant le quotient de x^4 diviſé par x^2, eſt x^2. On écrira x^2 au quotient, & l'on dira $+ x^2 \times + x^2 = + x^4$, pour ôter $+ x^4$, il faut ſuppoſer $- x^4$, & dire $+ x^4$ du dividende $- x^4$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o, il faut écrire o ſous x^4, & dire $+ x^2 \times + fx = + fx^3$; mais pour ôter $+ fx^3$ il faut écrire $- fx^3$; & comme il n'y a point de grandeur dans le dividende ſemblable à fx^3, il faut écrire le reſte $- fx^3$ ſous $+ nx^3$, & dire enſuite $+ x^2 \times + g = + gx^2$, pour ôter $+ gx^2$ il faut écrire $- gx^2$ ſous $+ px^2$, parcequ'il n'y a pas dans le dividende de grandeur ſemblable à gx^2.

Pour continuer la diviſion il faut dire $+ nx^3 - fx^3$ diviſé par x^2 le quotient eſt $+ nx - fx$; il faut écrire au quotient $+ nx - fx$ l'une ſous l'autre, parceque ces deux grandeurs ne font qu'un même terme; puis il faut dire $+ nx - fx \times + x^2 + fx + g = + nx^3 - fx^3 + fnx^2 - f^2x^2 + gnx - fgx$;

mais pour ôter ce produit il faut en changer les signes, & l'on aura $- nx^3 + fx^3 - fnx^2 + f^2x^2 - gnx + fgx$. Comme dans le dividende les grandeurs $+ nx^3 - fx^3$ sont semblables à $- nx^3 + fx^3$, & qu'elles se détruisent par des signes opposez, il faut écrire o sous $+ nx^3$ & sous $- fx^3$. Mais il n'y a pas de grandeurs dans le dividende qui soient semblables à $- fnx^2 + f^2x^2 - gnx + fgx$; ainsi il faut écrire ces grandeurs, qui sont des restes de la division qu'on vient de faire, sous le dividende aux termes qui leur conviennent.

Pour poursuivre la division il faut dire $+ px^2 - gx^2 - fnx^2 + f^2x^2$ divisé par $+ x^2$, le quotient est $+ p - g - fn + f^2$; ainsi il faut écrire au quotient les grandeurs $+ p - g - fn + f^2$ les unes sous les autres, parceque ces grandeurs font un même terme. Ensuite il faut dire $\overline{+ p - g - fn + f^2} \times \overline{x^2 + fx + g} = + px^2 - gx^2 - fnx^2 + f^2x^2 + fpx - fgx - f^2nx + f^3x + pg - g^2 - fgn + f^2g$; mais pour ôter ces produits du dividende, il faut changer leurs signes, & l'on aura $- px^2 + gx^2 + fnx^2 - f^2x^2 - fpx + fgx + f^2nx - f^3x - gp + g^2 + fgn - f^2g$. Parmi ces produits $- px^2 + gx^2 + fnx^2 - f^2x^2$ en ont d'égaux dans le dividende avec des signes contraires, ainsi ces grandeurs dans le dividende, & ces produits qui en sont retranchez, donnent o pour reste, & il faut écrire o sous les grandeurs du dividende $+ px^2 - gx^2 - fnx^2 + f^2x^2$. Les autres produits $- fpx + fgx + f^2nx - f^3x - gp + g^2 + fgn - f^2g$ n'ont pas de grandeurs semblables dans le dividende; ainsi il faut écrire ces restes de la division qu'on vient de faire, sous le dividende, aux termes qui leur conviennent.

Le reste qui doit servir de dividende contient deux termes, dont le premier est $\overline{+ q - gn + fg - fp + fg + f^2n - f^3} \times x$; & le second terme est $+ r - gp + g^2 + fgn - f^2g$. Mais x n'étant que lineaire dans le premier terme du dividende, & x ayant deux dimensions dans le premier terme $+ x^2$ du diviseur, la division ne sçauroit se faire sans fraction, c'est à dire le quotient du premier terme du dividende par le premier du diviseur, seroit une fraction dont le dénominateur seroit x, & non pas une grandeur entiere; ainsi la

division ne peut plus être continuée en grandeurs entieres, & elle est achevée. Le quotient en grandeurs entieres est celui qu'on a trouvé; il y a de plus un reste qu'on peut écrire si l'on veut au devant du quotient en fraction, dont le numerateur sera le dernier reste qu'on a trouvé, & le dénominateur sera le diviseur, & le quotient total de la division sera le quotient en grandeurs entieres joint à cette fraction.

Démonstration de la Division des grandeurs litterales complexes.

142. ON se servira du premier exemple afin de rendre la démonstration plus claire.

Pour démontrer qu'en divisant une grandeur complexe, comme $6a^3 - 13a^2b + 6ab^2$, qu'on nommera D, par une autre grandeur complexe comme $2a^2 - 3ab$, qu'on nommera d, la Regle fait découvrir une grandeur, comme $3a - 2b$, qu'on nommera q, qui est le veritable quotient; il faut faire voir clairement que le dividende D est au diviseur d, comme le quotient q est à l'unité, c'est à dire, il faut démontrer * que $\frac{D}{d} = \frac{q}{1}$. En voici la démonstration. Il est évident par l'operation que le produit $q \times d$ du diviseur d multiplié par q (qui est le quotient que fait découvrir l'operation) est égal au dividende D; puisqu'en ôtant ce produit $q \times d$ du dividende D, il ne reste rien quand la division est exacte. Donc * $1 . q :: d . D$. Par consequent l'on aura la proportion inverse * $\frac{D}{d} = \frac{q}{1}$. *Ce qu'il falloit démontrer.* *106. *72. *55.

Quand la division n'est pas exacte, & qu'il y a un reste, on démontrera en nommant ce reste r, comme dans *l'article* 133, que le quotient en grandeurs entieres joint avec la fraction qui a le reste r pour numerateur, & le diviseur pour dénominateur, est le quotient total de la division, c'est à dire que $\frac{D}{d} = \frac{q + \frac{r}{d}}{1}$.

REMARQUES.

I.

LES Lecteurs qui commencent & qui veulent apprendre à fond les Mathematiques, doivent se rendre la Division très familiere; pour cela il faut qu'ils fassent beaucoup

d'exemples. Voici la maniere dont ils pourront former ces exemples. Ils prendront deux grandeurs complexes telles qu'il leur plaira ; ils feront homogenes toutes les grandeurs qui sont les parties des deux grandeurs complexes qu'ils auront choisies ; c'est à dire ils donneront à chacune des grandeurs incomplexes, qui composent une des grandeurs complexes qu'ils auront prise, le même nombre de dimensions ; & de même ils donneront le même nombre de dimensions à chaque partie de l'autre grandeur complexe : il n'est pas nécessaire que le nombre des dimensions des parties de l'une des grandeurs complexes, soit égal au nombre des dimensions des parties de l'autre. Ils s'accoutumeront par-là à la loi des homogenes qui donne de la facilité dans les calculs ; cependant ils n'en feroient pas moins la division, sans observer ainsi la loi des homogenes. Ils ordonneront chacune des grandeurs complexes par rapport à une même lettre, qui est arbitraire, pour distinguer les termes de ces grandeurs complexes.

Ils multiplieront ensuite l'une par l'autre les deux grandeurs complexes qu'ils auront choisies, & ils en ordonneront le produit total, par rapport à la même lettre qui leur a servi à distinguer les termes des deux grandeurs qu'ils ont multipliées l'une par l'autre.

Ils prendront le produit, qu'ils viennent de trouver, pour le dividende, & celle qu'ils voudront des deux grandeurs complexes qui ont servi à former ce produit, pour le diviseur : Ils feront la division, & ils trouveront pour quotient exact l'autre grandeur complexe qui a servi à former le produit, c'est à dire la division n'aura point de reste.

2.

On peut abreger les operations de la division en ne multipliant point, pour chaque dividende particulier, c'est à dire pour chaque membre de la division, le premier terme du diviseur par le quotient de ce membre là, pour ôter le produit qui en vient, du premier terme de ce membre là, & il suffit d'effacer le premier terme du dividende d'un membre dès qu'on a trouvé son quotient, ou d'écrire o sous ce premier terme du dividende. Pour faire concevoir cet abregé, on se servira de la troisiéme operation du quatriéme exemple.

Le

Le dividende de cette troiſiéme operation avoit pour premier terme $+ px^2 - gx^2 - fnx^2 + f^2x^2$, pour ſecond terme $+ qx - gnx + fgx$, & pour troiſiéme terme $+ r$. En diviſant le premier terme de ce dividende par le premier terme x^2 du diviſeur $x^2 + fx + g$, on a trouvé pour quotient $+ p - g - fn + f^2$. Pour abreger, il faut, après avoir trouvé ce quotient, effacer le premier terme du dividende, ou écrire o ſous chaque partie de ce premier terme du dividende. Enſuite il faut multiplier, non le premier terme x^2 du diviſeur, mais les autres termes $+ fx + g$ du diviſeur par le quotient $+ p - g - fn + f^2$ qu'on vient de trouver, & retrancher le produit que l'on trouve, des deux autres termes du dividende, & en écrire les reſtes ſous ces deux autres termes du dividende, comme dans la troiſiéme operation du quatriéme exemple.

La raiſon de cet abregé eſt évidente; car le produit du quotient, qu'on vient de trouver pour un membre de la diviſion, par le premier terme du diviſeur, doit être exactement le premier terme même du dividende de ce membre de la diviſion. Ainſi pour ôter ce produit égal au premier terme du dividende, de ce premier terme du dividende, il n'y a qu'à effacer ce premier terme, ou écrire o au deſſous pour le reſte, puiſque ce premier terme — un produit qui lui eſt égal, eſt o.

3.

Quand le premier terme du dividende eſt complexe, & le premier terme du diviſeur incomplexe, le quotient ſe trouve ſans difficulté, comme on l'a pû voir dans les exemples, & ſur-tout dans celui de la Remarque precedente. Mais quand le premier terme du dividende eſt complexe, & que le premier terme du diviſeur eſt auſſi complexe, il peut y avoir des cas où l'on ne trouve pas tout d'un coup le quotient. Pour faire concevoir plus clairement la methode de trouver le quotient dans ces cas, on ſe ſervira d'un exemple où le premier terme du dividende ordonné par rapport à la lettre x, eſt la grandeur

$$A \quad \begin{array}{l} 20a^2x^2 - 5ac^2x - c^2d^2 \\ + 2abx^2 - 3bc^2x \\ - 6b^2x^2 + 4ad^2x \\ \qquad\qquad - 2bd^2x \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} + 4ax - c^2 \\ - 2bx \\ \hline \\ \end{array} \right.$$

complexe $+ 20a^2x^2 + 2abx^2 - 6b^2x^2$, & le premier terme du

diviseur est aussi la grandeur complexe $+ 4ax - 2bx$. Comme on ne voit pas d'abord quel est le quotient du premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, voici les methodes qu'il faut suivre.

1°. Il faut voir si l'on ne pourroit point ordonner le dividende & le diviseur par rapport à une même lettre differente de celle qu'on a prise, qui donnât pour premier terme du diviseur une grandeur incomplexe, il n'importe pas que cette lettre, qui donnera pour premier terme du diviseur une grandeur incomplexe, donne pour le premier terme du dividende une grandeur complexe, & même celle qui donnera pour premier terme du dividende une grandeur complexe qui aura plus de parties, rendra le calcul de la division plus court.

Dans cet exemple, en prenant a, ou b, ou, c, pour ordonner le dividende & le diviseur, on rendra incomplexe le premier terme du diviseur, & il n'importeroit pas laquelle prendre. Mais en prenant la lettre c pour ordonner le dividende & le diviseur, on rend le premier terme du diviseur incomplexe, qui est ce que l'on cherche, & on rend en même temps le premier terme du dividende complexe, ce qui rendra la division plus courte. C'est pourquoi il faut ordonner le dividende & le diviseur, par rapport à la lettre c, comme on le voit ici, où l'on a écrit la lettre c la premiere pour la distinguer.

$$\begin{array}{rl|l} -5axc^2 & +20a^2x^2 & -c^2+4ax \\ \text{o} & & \quad\;\; -2bx \\ \hline -3bxc^2 & +2abx^2 & +5ax+3bx+d^2 \\ \text{o} & & \\ -d^2c^2 & -6b^2x^2 & \\ \text{o} & & \\ & +4ad^2x & \\ & -2bd^2x & \end{array}$$

L'on dira ensuite, le quotient du premier terme $-5axc^2 - 3bxc^2 - d^2c^2$ du dividende par le premier terme $-c^2$ du diviseur est $+5ax + 3bx + d^2$. Il faut écrire cette grandeur complexe au quotient, & marquer o sous chaque partie du premier terme du dividende *par la 2e Remarque*; puis multiplier les termes du diviseur, excepté le premier, par ce quotient, & retrancher le produit $+ 20a^2x^2 - 10abx^2 + 12abx^2 - 6b^2x^2 + 4ad^2x - 2bd^2x$, du dividende, & comme il ne reste rien, la division est achevée, & le quotient est exact.

2°. On peut auſſi, ſans changer les termes du dividende & du diviſeur, qui ſont ordonnez par rapport à la lettre x, trouver par parties le quotient du premier terme $+20a^2x^2 + 2abx^2 - 6b^2x^2$ du dividende, diviſé par le premier terme $+4ax - 2bx$ du diviſeur, de cette maniere. Il faut regarder le premier terme $+20a^2x^2 + 2abx^2 - 6b^2x^2$, comme un dividende total d'une diviſion qu'on fera à part, & le premier terme $+4ax - 2bx$ du diviſeur, comme le diviſeur total de ce dividende; & choiſir une des lettres qu'ils contiennent, comme a ou b differente de x, pour ordonner le dividende & le diviſeur; & il en faut toujours choiſir une qui donne une grandeur incomplexe pour le premier terme

$$\begin{array}{ccc} +20x^2a^2 & +2bx^2a & -6b^2x^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ & +12bx^2a & \\ & 0 & \end{array} \left(\frac{+4xa - 2bx}{+5xa + 3bx}\right.$$

de ce diviſeur. En choiſiſſant a, on aura le dividende & le diviſeur ordonnez, comme on le voit ici. Puis on dira le quotient du premier terme $+20x^2a^2$ du dividende diviſé par le premier terme $+4xa$ du diviſeur, eſt $+5xa$; il faut écrire $+5xa$ au quotient; effacer le premier terme du dividende, ou écrire o au deſſous; puis dire $+5xa \times -2bx = -10bx^2a$; mais pour ôter $-10bx^2a$, il en faut changer le ſigne, & l'on aura $+10bx^2a$; & dire $+2bx^2a + 10bx^2a$ qui en eſt retranché, le reſte (qui eſt ici une addition) eſt $+12bx^2a$: il faut écrire o ſous $+2bx^2a$, & écrire au deſſous le reſte $+12bx^2a$.

Enſuite il faut dire, en continuant la diviſion, $+12bx^2a$, diviſé par $+4xa$, a pour quotient $+3bx$, il faut écrire $+3bx$ au quotient, écrire o ſous $+12bx^2a$ du dividende, & dire $+3bx \times -2bx = -6b^2x^2$; mais pour ôter $-6b^2x^2$, il faut en changer le ſigne, & l'on aura $+6b^2x^2$, & dire $-6b^2x^2$ du divende $+6b^2x^2$, qui en eſt retranché, le reſte eſt o, il faut écrire o ſous $-6b^2x^2$.

Cette diviſion faite à part, étant ſans reſte, fait découvrir que le quotient du premier terme $+20a^2x^2 + 2abx^2$

$-6b^2x^2$ du dividende total marqué par A, par le premier terme $+4ax-2bx$ du diviseur, est $+5ax+3bx$. Ainsi il

$$A\begin{cases} +20a^2x^2 - 5ac^2x - c^2d^2 \\ \quad\; o \qquad\quad o \\ +2abx^2 - 3bc^2x \\ \quad\; o \qquad\quad o \\ -6b^2x^2 + 4ad^2x \\ \quad\; o \quad -2bd^2x \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} +4ax - c^2 \\ -2bx \\ \hline +5ax \\ +3bx \end{array} \right.$$

faut écrire o sous les grandeurs du premier terme du dividende; multiplier le second terme $-c^2$ du diviseur par le quotient $+5ax+3bx$, & ôter le produit $-5ac^2x-3bc^2x$ du second terme du dividende, & le reste sera $+4ad^2x-2bd^2x-c^2d^2$, qu'il faut continuer de diviser par le diviseur $+4ax-2bx-c^2$.

Mais comme le premier terme du diviseur $+4ax-2bx$ est complexe, & que le premier terme $+4ad^2x-2bd^2x$ du dividende est aussi complexe, il faut trouver le quotient par la premiere ou par la seconde methode qu'on vient d'expliquer: la premiere étant plus facile que la seconde, on va appliquer la seconde (pour la mieux faire concevoir) à trouver ce quotient.

Il faut considerer $+4ad^2x-2bd^2x$ comme un dividende total d'une division qu'on fera à part, & $+4ax-2bx$, comme en étant le diviseur total, & on ordonnera l'un & l'autre, par rapport à la lettre a ou b differente de x, & il n'importe pas laquelle; on prendra ici la lettre b, & le dividende & le diviseur seront ordonnez comme on le voit ici. Et l'on dira, le quotient du premier terme $-2d^2xb$ du dividende par le premier terme $-2xb$ du diviseur, est $+d^2$, il faut écrire d^2 au quotient, écrire o sous $-2d^2xb$ du dividende; multiplier $+d^2$ par $+4ax$, en retrancher le produit $+4ad^2x$, du dividende $+4ad^2x$: & comme il ne reste rien, il faut écrire o sous $+4ad^2x$ du dividende.

$$\begin{array}{cc} -2d^2xb & +4ad^2x \\ o & o \end{array} \left(\begin{array}{l} -2xb+4ax \\ \hline +d^2 \end{array} \right.$$

Cette division sans reste, faite à part, fait connoître que

le quotient du premier terme $+ 4ad^2x - 2bd^2x$ du dividende, qu'on divisoit avant cette division faite à part, par le premier terme $+ 4ax - 2bx$ du diviseur, est $+ d^2$. Ainsi il faut écrire o sous chacune des grandeurs $+ 4ad^2x - 2bd^2x$ du premier terme de cette division dans le dividende A; multiplier $+ d^2$ par $- c^2$, & en retrancher le produit

$$A \quad \begin{array}{ccc} +20a^2x^2 & -5ac^2x & -c^2d^2 \\ o & o & o \\ +2abx^2 & -3bc^2x & \\ o & o & \\ -6b^2x^2 & +4ad^2x & \\ o & o & \\ & -2bd^2x & \\ & o & \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} +4ax - c^2 \\ -2bx \\ \hline +5ax + d^2 \\ +3bx \end{array} \right.$$

$- c^2d^2$ du dernier terme $- c^2d^2$ du dividende; & comme il ne reste rien, il faut écrire o sous $- c^2d^2$ du dividende. La division totale est achevée, & le quotient qu'on a trouvé est exact.

4.

Quand il y a quelque lettre dans le premier terme du diviseur qui n'est pas dans le dividende, il est clair que la division ne sçauroit se faire sans fraction, comme aussi quand il y a quelque lettre qui a plus de dimensions dans le premier terme du diviseur, que la même lettre n'en a dans le dividende.

SECTION V.

Où l'on explique la composition ou la formation des Puissances des grandeurs entieres.

DÉFINITION I.

143. ON a déja dit * que les produits $1a$, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, &c. qui viennent de la multiplication d'une grandeur quelconque a par l'unité, & ensuite de la grandeur a par elle-même, *89.

puis du produit a^2 par a, du produit a^3 par a,& ainsi de suite à l'infini, s'appellent *les puissances* de cette grandeur. $1a$, qu'on peut aussi marquer ainsi $1a^1$ ou a^1, est la premiere *puissance*, ou *la puissance lineaire* de a; a^2 la 2ᵉ *puissance*, qu'on nomme aussi *le quarré* de a; a^3 la 3ᵉ puissance qu'on nomme aussi *le cube* de a; a^4, la 4ᵉ puissance; a^5, la 5ᵉ puissance, & ainsi de suite à l'infini. Les nombres 1, 2, 3, 4, &c. que l'on met à droite de a, un peu au dessus, s'appellent *les Exposans* des puissances de a; ainsi 1 est l'exposant de la premiere puissance; 2, celui de la 2ᵉ puissance; 3 est l'exposant de la 3ᵉ puissance, & ainsi des autres. On dit aussi que ces exposans marquent *les degrez* des puissances, & ainsi a^1 est la puissance de a du premier degré; a^2 la puissance de a du 2ᵉ degré; Il en est de même des autres.

2ᵉ DEFINITION.

144. UNE grandeur lineaire, ou d'une seule dimension, est toute élevée à la puissance que marque l'exposant, lorsque cet exposant est écrit au haut de cette grandeur à la droite. Ainsi a^7 est la grandeur a élevée à la 7ᵉ puissance. Mais quand la grandeur est de plusieurs dimensions, comme ab, $abbc$, ou quand elle est complexe, comme $a+b$; a^2+bd; & que sans l'élever à une puissance, par exemple à la 3ᵉ, on veut cependant marquer qu'elle y est élevée; on tire une ligne sur cette grandeur qui la couvre, & l'on écrit à l'extremité de cette ligne, vers la droite, l'exposant de la puissance à laquelle on veut marquer que cette grandeur est élevée. Ainsi $\overline{ab}^3$; $\overline{abbc}^3$; $\overline{a+b}^3$; $\overline{a^2+b^2}^3$; expriment qu'on conçoit chacune de ces grandeurs élevée à la 3ᵉ puissance.

3ᵉ DEFINITION.

145. UNE puissance peut être au numerateur ou au dénominateur d'une fraction, & l'on peut concevoir une opposition entre les deux places du numerateur & du dénominateur d'une fraction. Le signe —, devant l'exposant d'une puissance, marque cette opposition de place; c'est à dire, le signe — devant l'exposant d'une puissance, marque que cette puissance est dans celle des deux places du numerateur ou du dénominateur, qui est opposée à la place où elle est écrite. Ainsi

dans $\frac{a^{-5}}{1}$, le signe — devant l'exposant 5 de la puissance 5e de a écrite au numerateur, marque que a^5 doit être conçue au dénominateur, c'est à dire $\frac{a^{-5}}{1} = \frac{1}{a^5}$. De même dans $\frac{1}{a^{-5}}$ le signe — marque que la puissance a^5, qui est écrite au dénominateur, doit être conçue dans la place opposée, c'est à dire au numerateur, & que $\frac{1}{a^{-5}} = \frac{a^5}{1}$. Ainsi $a^3b^{-2} = \frac{a^3}{b^2}$.

$a^{-3}b^{-2} = \frac{1}{a^3b^2}$. $\frac{b^{-2}}{a^{-3}} = \frac{a^3}{b^2}$.

Le signe + devant l'exposant d'une puissance, lequel signe ne s'exprime point, & qui est toujours sous-entendu, ne marque aucune opposition entre les deux places du numerateur, ou du dénominateur, mais simplement que la puissance, qui a son exposant positif, est dans la place où elle se trouve, soit du numerateur, soit du dénominateur.

COROLLAIRE.

146. CETTE distinction d'exposans positif & négatif fournit le moyen de donner differentes expressions aux puissances des grandeurs sans changer leur valeur, ce qui est d'usage dans le calcul. Par exemple $a^{5-2} = \frac{a^5}{a^2} =$ * a^3. $a^3b^{-2} = \frac{a^3}{b^2}$. $a^{5-4} =$ * 138.
* a^1. $a^{-1} = \frac{1}{a}$. $\frac{1}{b^{-1}} = b^1 = b$, &c. * 138.

4e DE'FINITION.

147. ON peut exprimer la puissance quelconque d'une grandeur, dont l'exposant est un nombre entier quelconque, d'une maniere generale, en prenant une lettre pour exposant. Par exemple, supposant que n représente un nombre entier quelconque, en y comprenant l'unité; a^n signifie la grandeur a élevée à une puissance quelconque, dont l'exposant est tel nombre entier qu'on voudra, représenté par l'indeterminée n. On rend cette expression déterminée en substituant un nombre entier quelconque à la place de n. Par exemple si l'on veut que a^n représente la troisiéme puissance de a, il faut écrire a^3, &c. a^{-n} représentera de même une puissance quelconque de a, dont l'exposant est un nombre entier négatif, quelque soit ce nombre entier.

Le calcul des puiſſances d'une même grandeur par le moyen des expoſans, lorſqu'ils ſont des nombres entiers poſitif ou négatif.

LA MULTIPLICATION.

148. POUR multiplier la puiſſance d'une grandeur par une puiſſance de la même grandeur, il faut ſimplement écrire la ſomme des deux expoſans au haut de cette grandeur vers la droite, & ce ſera le produit.

Par exemple, pour multiplier, 1°, a^2 par a^3, il faut écrire $a^{2+3} = a^5$ pour le produit. De même, 2°, pour multiplier a^5 par
*138. a^{-3}, ou a^{-3} par a^5, il faut écrire pour le produit $a^{5-3} =$ * a^2. 3°, pour multiplier a^{-2} par a^{-3}, il faut écrire pour le produit $a^{-2-3} = a^{-5}$. En general, pour multiplier, 1°, a^n par a^m, il faut écrire pour le produit a^{n+m}. 2°. Pour multiplier a^m par a^{-p}, ou a^{-p} par a^m, il faut écrire pour le produit a^{m-p}. 3°. Pour multiplier a^{-m} par a^{-p}, il faut écrire pour le produit a^{-m-p}.

*88 & 89. *Démonſtration*, 1°. a^2, par exemple, eſt la même choſe que aa, & $a^3 = aaa$. Or le produit de aa, par aaa, eſt * $aaaaa = a^{2+3} = a^5$. Et il eſt évident que c'eſt la même choſe, quelques nombres entiers poſitif repréſentez par m & p que puiſſent être les expoſans des deux puiſſances d'une même grandeur, qui ſont multipliées l'une par l'autre. Par conſequent en donnant pour expoſant à la grandeur a, la ſomme des expoſans, ce ſera le produit des deux puiſſances.

*117 *145. 2°. $a^5 =$ * $\frac{a^5}{1}$, & $a^{-3} =$ * $\frac{1}{a^3}$. Or $\frac{a^5}{1} \times \frac{1}{a^3} =$ * $\frac{a^5 \times 1}{1 \times a^3} =$
*123 *145. * $a^{5-3} =$ * a^2. Par conſequent $a^5 \times a^{-3} = a^{5-3} = a^2$. Il eſt
*138. clair que c'eſt la même choſe, quelques nombres entiers, repréſentez par m & p, que puiſſent être les expoſans des deux puiſſances d'une même grandeur, qui ſont multipliées l'une par l'autre, lorſque l'un de ces expoſans eſt poſitif & l'autre négatif.

*145. 3°. Enfin $a^{-2} =$ * $\frac{1}{a^2}$, & $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Mais pour multiplier
*123. $\frac{1}{a^2}$ par $\frac{1}{a^3}$, il faut écrire * $\frac{1}{a^{2+3}} = \frac{1}{a^5} =$ * $a^{-2-3} = a^{-5}$.
*145. Par conſequent $a^{-2} \times a^{-3} = a^{-2-3} = a^{-5}$. Il eſt évident que c'eſt la même choſe, quelques nombres entiers négatif, repréſentez par $-m$ & $-p$, que puiſſent être les expoſans

exposans des deux puissances d'une même grandeur qui sont multipliées l'une par l'autre.

LA DIVISION.

149. POUR diviser la puissance d'une grandeur par une puissance de la même grandeur, il faut ôter l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende, & écrire au haut de cette grandeur vers la droite, la difference des deux exposans, & ce sera le quotient.

Pour diviser, 1°, a^5 par a^3, il faut ôter l'exposant 3 du diviseur de l'exposant 5 du dividende, & écrire leur difference $5 - 3$ pour l'exposant du quotient, qui sera $a^{5-3} = a^2$. 2°. Pour diviser a^5 par a^{-3}; il faut retrancher l'exposant -3 du diviseur, de l'exposant $+5$ du dividende, & écrire leur difference $5 + 3$ pour l'exposant du quotient, qui sera $a^{5+3} = a^8$. 3°. Pour diviser a^{-5} par a^{-3}, il faut ôter -3 de -5, & écrire leur difference $-5 + 3$ pour l'exposant du quotient, qui sera $a^{-5+3} = a^{-2}$. 4°. De même, pour diviser a^{-5} par a^{+3}, il faut écrire pour le quotient $a^{-5-3} = a^{-8}$.

En general, pour diviser, 1°, a^m par a^p, il faut écrire a^{m-p}. 2°. Pour diviser a^m par a^{-p}, il faut écrire pour quotient a^{m+p}. 3°. Pour diviser a^{-m} par a^{-p}, il faut écrire a^{-m+p}. 4°. Pour diviser a^{-m} par a^p, il faut écrire a^{-m-p}.

Démonstration. 1°. a^5 divisé par $a^3 = * \frac{a^5}{a^3} = * a^{5-3}$. * 105. * 145.

2°. $a^5 = \frac{a^5}{1}$, & $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Mais pour diviser $\frac{a^5}{1}$ par $\frac{1}{a^3}$, il faut écrire $* \frac{a^5 \times a^3}{1 \times 1} = * \frac{a^{5+3}}{1} = a^8$. * 124. * 117. & 89.

3°. $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$, & $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Mais pour diviser $\frac{1}{a^5}$ par $\frac{1}{a^3}$, il faut écrire $* \frac{1 \times a^3}{1 \times a^5} = * a^{-5+3} = * a^{-2}$. * 124. * 145.

4°. Enfin $a^{-5} = * \frac{1}{a^5}$. Et $a^3 = * \frac{a^3}{1}$. Or pour diviser $\frac{1}{a^5}$ * 138. * 145. * 117.
par $\frac{a^3}{1}$, il faut écrire $* \frac{1 \times 1}{a^5 \times a^3} = \frac{1}{a^{5+3}} = * a^{-5-3} = a^{-8}$. * 124. * 145.

Il est évident que c'est la même chose quelques soient les deux nombres entiers représentez par m & p, qui sont les exposans du dividende & du diviseur, dans tous les cas qu'on vient de démontrer. Ainsi en écrivant la difference, qui est

entre l'exposant du dividende & l'exposant du diviseur, pour exposant de la grandeur a, ce sera le quotient.

La maniere d'élever la puissance donnée d'une grandeur a *à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier donné positif ou negatif.*

150. POUR élever la puissance d'une grandeur, dont l'exposant est un nombre entier positif ou negatif, à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier positif ou négatif, il faut multiplier l'exposant de la puissance à élever, par l'exposant donné, & écrire la grandeur, en lui donnant pour exposant, le produit des deux exposans, avec le signe de l'exposant de la puissance à élever quand le signe de l'exposant donné est +; avec le signe opposé à celui de l'exposant de la puissance à élever, quand le signe de l'exposant donné est —, & ce sera la puissance qu'on cherche.

1°. Pour élever a^2 à la puissance 3°, dont l'exposant est 3, il faut multiplier 2 par 3, & écrire $a^{2\times 3} = a^6$ pour la puissance qu'on cherche.

2°. Pour élever a^{-2} à la puissance 3°, dont l'exposant donné est + 3, il faut écrire, pour la puissance qu'on cherche, $a^{-2\times 3} = a^{-6}$.

3°. Pour élever a^2 à la puissance dont l'exposant donné est — 3, il faut écrire $a^{2\times -3} = a^{-6}$.

4°. Pour élever a^{-2} à la puissance dont l'exposant donné est — 3, il faut écrire $a^{-2\times -3} = a^6$.

En general, 1°, pour élever a^m à la puissance p, il faut écrire a^{mp}.

2°. Pour élever a^{-m} à la puissance p, il faut écrire a^{-mp}.

3°. Pour élever a^m à la puissance $-p$, il faut écrire a^{-mp}.

4°. Enfin pour élever a^{-m} à la puissance $-p$, il faut écrire $a^{-m\times -p} = a^{mp}$.

Quand les exposans sont des grandeurs complexes, le calcul se fait de la même maniere. Par exemple, pour élever a^m à la puissance $-p+q$, il faut écrire a^{-mp+mq}. De même pour élever a^{m-n} à la puissance $p-q$; il faut écrire $a^{\overline{m-n}\times\overline{p-q}} = a^{mp-np-mq+nq}$.

Quand l'un des exposans est un nombre, & l'autre une grandeur litterale, le calcul se fait de la même maniere. Par exemple, pour élever a^m à la puissance 2[e], 3[e], 4[e], &c. il faut écrire a^{2m}, a^{3m}, a^{4m}, &c.

Démonstration. 1°. $a^2 \times a^2 \times a^2$ est * a^2 élevée à la puissance 3[e]. Et il est clair que $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2\times 3} = a^6$. 2°. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, or pour élever $\frac{1}{a^2}$ à la puissance 3[e], il faut multiplier $\frac{1}{a^2}$ deux fois par elle-même, ce qui donne $\frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^2}$ $=$ * $\frac{1}{a^{2\times 3}} =$ * $a^{-2\times 3} = a^{-6}$. * 89. * 123.

Dans le 3[e] & le 4[e] cas, dans lesquels l'exposant de la puissance 3[e], à laquelle on veut élever a^2 & a^{-2}, est negatif, c'est à dire — 3; le signe —, qui précede cet exposant 3, marque que le signe de l'exposant de la puissance qu'on cherche doit * être opposé au signe de l'exposant de a^{+2} ou a^{-2} qui doit être élevée à la puissance — 3. Ainsi dans le 3[e] & 4[e] cas, il faut multiplier l'exposant + 2 ou — 2 de la puissance à élever a^2 ou a^{-2} par l'exposant donné 3 de la puissance à laquelle on veut élever a^2, & le produit $+ 2 \times 3 = 6$ ou $- 2 \times 3 = - 6$, est l'exposant qu'il faut donner à la grandeur a pour l'élever à la puissance qu'on cherche, comme on vient de le faire voir dans le premier & le second cas; mais il faut que le signe + ou —, qui le doit preceder, soit opposé * à celui de l'exposant de la puissance à élever, qui est a^2 ou a^{-2}. D'où l'on voit que pour élever a^2 à la puissance — 3, il faut écrire a^{-6}; & que pour élever a^{-2} à la puissance — 3, il faut écrire a^6. * 145. * 145. * 145.

Il est évident que la même démonstration convient à toute puissance d'une grandeur quelconque a, dont l'exposant est un nombre entier m, qu'on veut élever à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier donné représenté par p, quelques signes + ou — que puissent avoir les deux exposans.

On verra ci-aprés, *article* 200, quand on a une puissance donnée faite d'une autre puissance moindre, la maniere de trouver cette autre puissance.

REMARQUES.

I.

Ce calcul des puissances d'une même grandeur par le

moyen des expoſans, eſt de grand uſage dans la réſolution des Problêmes les plus compoſez ; les expreſſions generales des expoſans des puiſſances ſont découvrir d'une maniere facile, ſimple & qui n'embaraſſe point l'imagination, dans la réſolution d'un ſeul Problême, la réſolution d'une infinité d'autres, qui ſe trouvent compris ſous l'expreſſion generale de cette reſolution. Cet uſage doit porter les Commençans à ſe rendre ce calcul très familier.

2.

151. On fait l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion des puiſſances de differentes grandeurs de la même maniere qu'on les fait des autres grandeurs litterales ; $a^m + b^n$ eſt la ſomme de a^m & de b^n; $a^m - b^n$ eſt leur difference; $a^m b^n$, eſt leur produit ; $\frac{a^m}{b^n} = * a^m b^{-n}$ eſt le quotient de a^m diviſée par b^n.

* 145.

3.

152. Quand les puiſſances, dont les expoſans ſont des letres, doivent être les termes d'une grandeur complexe, on doit prendre garde que tous les termes ſoient homogenes ; c'eſt à dire, le nombre ou la ſomme des dimenſions d'un terme doit être égal au nombre des dimenſions de chaque autre terme. En voici quelques exemples pour y accoutumer les Commençans. Dans la grandeur complexe $a^{m+n} - a^m b^n$, les deux termes ont chacun le même nombre de dimenſions exprimé par $m + n$. Dans $a^n + a^{n-m} b^m$, le terme $a^{n-m} b^m$ a le même nombre de dimenſions que a^n. Car le nombre des dimenſions de $a^{n-m} b^m$ eſt exprimé par la ſomme des expoſans $n - m + m = n$. Ces deux exemples ſuffiſent pour faire voir comment la ſomme des dimenſions d'un terme peut être égale à la ſomme des dimenſions d'un autre terme. Quand les termes ne ſont pas homogenes, on y peut ſuppléer, en prenant une des lettres pour l'unité, & faiſant en ſorte que les dimenſions de l'unité ſuppléent à celles qui manquent à quelques termes pour les rendre tous homogenes. Par exemple, ſi l'on avoit $a^n - b^p + c^{-q}$, on pourroit rendre tous ces termes homogenes, en prenant a pour l'unité, en écrivant $a^n - a^{n-p} b^p + a^{n+q} c^{-q}$; car il eſt évident que

la somme des dimensions de chaque terme est, dans cette expression, égale à n, & le produit de l'unité & des puissances de l'unité par une grandeur quelconque, ne changeant point la valeur de cette grandeur, la seconde expression où les termes sont homogenes, a la même valeur que la premiere expression dans laquelle ils ne l'étoient pas.

5ᵉ DÉFINITION.

153. LA grandeur quelconque a, qui étant multipliée par elle-même a pour produit son quarré a^2, s'appelle la *racine quarrée*, ou *la racine* 2ᵉ de a^2. a est la racine cubique, ou 3ᵉ de a^3. ab est la racine 4ᵉ de a^4b^4. a^3 est la racine 3ᵉ de $a^9 = a^3 \times a^3 \times a^3$, &c.

Pour exprimer les racines, on se sert des deux marques suivantes, 1°, de la marque $\sqrt{}$ qu'on nomme *le signe radical*, & l'on écrit au dessus en petit caractere le nombre qui marque si c'est la racine 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ, &c. d'une puissance, de cette maniere. $\sqrt[3]{a^3}$ marque la racine 3ᵉ de a^3. Ainsi $\sqrt[3]{a^3} = a$. Quand on marque la racine quarrée, on ne met point d'ordinaire le nombre 2 sur le signe radical $\sqrt{}$. Ainsi $\sqrt{a^4}$ marque la racine 2ᵉ de a^4 qui est a^2. Le nombre qu'on écrit sur le signe radical, pour exprimer qu'elle est la racine qu'on veut marquer, s'appelle l'*exposant* de la racine. Ainsi dans $\sqrt[3]{a^6}$, le nombre 3 écrit sur le signe radical, s'appelle l'exposant de la racine 3ᵉ de a^6 qui est a^2.

Quand on veut marquer la racine d'une grandeur complexe, on écrit le signe radical au devant de la grandeur complexe vers la gauche, avec l'exposant au dessus qui détermine qu'elle est racine, & l'on tire une ligne du haut du signe radical qui couvre toute la grandeur complexe dont on veut exprimer la racine. Ainsi $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ exprime la racine 3ᵉ ou cubique de $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Il faut bien remarquer que la grandeur qui est sous le signe radical est supposée la puissance qui auroit pour exposant le même nombre qui sert d'exposant au signe radical. Ainsi dans l'expression $\sqrt[3]{a^3}$, la grandeur a^3, qui est sous le signe radical, est supposée une troisiéme puissance dont on exprime la racine 3ᵉ par le signe radical $\sqrt[3]{}$. De même dans

$\sqrt[4]{b}$, on regarde b comme une quatriéme puissance, dont $\sqrt[4]{b}$ exprime la racine 4e. D'où l'on voit que a étant la racine 3e de a^3, il ne faut pas écrire $\sqrt[3]{a}$, mais simplement a pour la racine 3e de a^3; car $\sqrt[3]{a}$ signifie la racine 3e de a considerée comme représentant une grandeur élevée à la 3e puissance.

On se sert, 2°, des fractions numeriques pour marquer les racines des puissances. Dans cette seconde maniere d'exprimer les racines, on n'employe point le signe $\sqrt{}$; mais on marque ces racines comme les exposans des puissances, en écrivant vers la droite au haut de la puissance, dont on veut marquer la racine, une fraction dont le numerateur est l'unité, & dont le dénominateur est 2, si l'on veut exprimer la racine 2e, 3 si l'on veut exprimer la racine 3e, & ainsi des autres.

Par exemple, pour marquer la racine 2e de la grandeur a regardée comme une 2e puissance, on écrit $a^{\frac{1}{2}}$. Pour marquer la racine 3e, on écrit $a^{\frac{1}{3}}$; pour marquer la racine 5e, on écrit $a^{\frac{1}{5}}$. De même $\overline{r^2 - x^2}^{\frac{1}{2}}$ exprime la racine 2e de le grandeur complexe $r^2 - x^2$. Il en est de même des autres.

Quand la puissance dont on veut exprimer la racine a déja un exposant qui est un nombre entier, on fait ce nombre entier le numerateur du nouvel exposant de la racine, & on écrit dessous pour dénominateur, le nombre 2, si c'est la racine 2e que l'on veut exprimer; 3, si c'est la racine 3e, & ainsi des autres.

Par exemple $a^{\frac{3}{2}}$ exprime la racine 2e de a^3; $\overline{r^2 - x^2}^{\frac{5}{2}}$ exprime la racine 2e de la 5e puissance de la grandeur complexe $r^2 - x^2$. De même $\overline{x - b}^{\frac{5}{3}}$ exprime la racine 3e de la 5e puissance à laquelle on suppose que la grandeur complexe $x - b$ est élevée.

Les grandeurs qui sont les racines des puissances, étant

exprimées de la maniere qu'on vient d'expliquer, sont regardées comme *des puissances dont les exposans sont des nombres rompus*, c'est à dire, sont des fractions. Ainsi $a^{\frac{2}{3}}$ est regardée comme une puissance dont l'exposant est la fraction $\frac{2}{3}$.

Lorsque ces exposans sont négatifs, cela exprime que la racine est dans le dénominateur. Par exemple $\overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$ exprime cette fraction $\frac{1}{\overline{r^2 - x^2}^{\frac{1}{2}}}$. De même $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. De la même maniere $a^{-\frac{1}{2}} b^4 = \frac{b^4}{a^{\frac{1}{2}}}$.

REMARQUES.

CETTE maniere d'exprimer les racines comme des puissances, dont les exposans sont des nombres rompus, a donné lieu de multiplier & de diviser les differentes racines d'une même grandeur, à la façon des puissances dont les exposans sont des nombres entiers, par l'addition & la soustraction de leurs exposans; comme aussi d'élever ces racines à telle puissance qu'on veut en multipliant les exposans de ces racines considerées comme puissances, par l'exposant de la puissance à laquelle on les veut elever. On démontrera en son lieu ce calcul des puissances dont les exposans sont des nombres rompus.

PROBLÊME.

A

154. $\div\!\div$ &c. $\frac{1}{a^7} \cdot \frac{1}{a^6} \cdot \frac{1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot a^0$ ou $1 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 . a^7$. &c.

B

$\div\!\div$ &c. $a^{-7} . a^{-6} . a^{-5} . a^{-4} . a^{-3} . a^{-2} . a^{-1} . a^0$. ou $1 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 . a^7$. &c.

Si l'on écrit a^0 qui est prise pour l'unité, c'est à dire que a^0 représente l'unité, & vers la droite les puissances positives prises de suite d'une grandeur quelconque a, dont les exposans sont les nombres entiers pris de suite; & vers la gauche

les mêmes puissances de a au dénominateur d'autant de fractions, en donnant l'unité à chacune pour numerateur, comme
*145. dans l'expression A; ou, * ce qui revient au même, si l'on écrit vers la gauche de a^0, qui est prise pour l'unité, les puissances négatives de a prises de suite, comme dans l'expression B. Toutes ces puissances de a font une progression geometrique; le même rapport, qui regne dans la progression, c'est à dire, le rapport de chacun des termes à celui qui le suit immédiatement vers la droite, est le rapport de 1 à a; & en allant de la droite vers la gauche, c'est le rapport de a à 1. Les exposans de ces puissances pris de suite, font une progression arithmetique, & l'unité est la difference qui regne dans cette progression. o, qui est l'exposant de l'unité ou de a^0, est le terme de la progression arithmetique qui se trouve entre les exposans positifs & les negatifs.

Démonstration. 1°. *Par rapport aux puissances dont les exposans sont les nombres entiers positifs pris de suite*. Pour avoir le rapport geometrique d'un terme à celui qui le suit, il faut diviser le
*115. premier par le second, & * le quotient en exprimera le rapport. Ainsi en commençant par l'unité le rapport de 1 à a^1 est $\frac{1}{a}$. Le rapport de a^1 à a^2, est $\frac{a^1}{a^2} = \frac{1}{a}$, & ainsi de suite; car le terme suivant vers la droite, contenant un $1a$ de plus que celui qui le precede, le rapport d'un terme à celui qui le
*109. suit, se réduira toujours à * $\frac{1}{a}$.

2°. *Pour les puissances dont les exposans sont negatifs*. Les termes qui sont à la gauche de 1 ou a^0, dans l'expression A, ont tous l'unité pour numerateur, ainsi les numerateurs sont
*121. égaux; par consequent * le rapport de chacun de ces termes, à celui qui le suit immédiatement, est égal au rapport des dénominateurs, en les prenant dans un ordre renversé;
*109. par exemple, $\frac{1}{a^7} . \frac{1}{a^6} :: a^6 . a^7 ::$ * $1 . a$. Mais il est évident qu'en prenant ainsi deux dénominateurs voisins, dans un ordre renversé, l'un a toujours $1a$ de plus que l'autre; ainsi, dans la progression geometrique A, en allant de la gauche à la droite, le rapport de deux termes voisins se réduira toujours à $\frac{1}{a}$; &
*124. celui du terme $\frac{1}{a}$ à 1 ou à $\frac{1}{1}$, ou à $a^0 = 1$, * est aussi égal à $\frac{1}{a}$. Mais en allant de la droite à la gauche, le rapport de deux termes voisins sera égal à $\frac{a}{1}$, qui est l'inverse de $\frac{1}{a}$.

3°. *Pour*

3°. *Pour la progreſſion arithmetique des expoſans.* Les expoſans pris de ſuite de la gauche à la droite, dans l'expreſſion **B**, ſont, 1°, les nombres naturels, avec le ſigne —, qui diminuent d'une unité d'un terme à celui qui le ſuit, juſqu'à zero, qui eſt l'expoſant de l'unité, 2°, les expoſans depuis zero vers la droite ſont les nombres naturels 1, 2, 3, &c. avec le ſigne +, qui augmentent d'une unité d'un terme à celui qui le ſuit; d'où l'on voit clairement qu'en ôtant un expoſant quelconque de l'expoſant qui le ſuit vers la droite, la difference eſt 1; par conſequent les expoſans ſont une progreſſion arithmetique, & la difference de chacun des termes à ſon voiſin eſt 1.

COROLLAIRE I.

155. DANS la progreſſion des puiſſances d'une grandeur quelconque a^1, dont les expoſans ſont des nombres entiers poſitifs, la 2e puiſſance occupe le ſecond rang depuis l'unité non compriſe; ſa 3e puiſſance, le 3e rang; ſa 4e puiſſance, le 4e, & ainſi de ſuite; c'eſt à dire qu'une puiſſance quelconque poſitive de a^1 occupe, dans la progreſſion depuis l'unité non compriſe, le rang qui eſt marqué par le nombre des unitez de ſon expoſant; par exemple, la 10e puiſſance de a occupe le 10e rang depuis l'unité non compriſe. Il en eſt de même des puiſſances negatives; par exemple, la 10e puiſſance a^{-10} de a^{-1} occupe le 10e rang en allant vers la gauche depuis l'unité non compriſe.

COROLLAIRE II.

156. DANS la progreſſion des mêmes puiſſances, a^1 racine 2e de a^2 eſt un moyen proportionnel entre 1 & la puiſſance 2e de a. a^1 racine 3e de a^3 eſt le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & a^3. a^1 racine 4e de a^4 eſt le premier de trois moyens proportionnels entre l'unité & a^4; & ainſi de ſuite: c'eſt à dire, que la racine quelconque d'une puiſſance poſitive eſt le premier d'autant de moyens proportionnels entre 1 & cette puiſſance, qu'il y a d'unitez moins une dans l'expoſant du ſigne radical de cette racine, qui eſt toujours égal à l'expoſant de la puiſſance. Ainſi $\sqrt[10]{a^{10}} = a$ eſt le premier de neuf moyens proportionnels qui ſont entre 1 & a^{10} dixié-

me puiſſance de *a*. Il eſt évident qu'il en eſt de même des racines des puiſſances négatives.

COROLLAIRE III.

157. D'où l'on voit que chercher la puiſſance quelconque d'une grandeur *a*, ou élever cette grandeur à une puiſſance quelconque, dont l'expoſant eſt un nombre entier, c'eſt ſuppoſer une progreſſion geometrique, dont l'unité eſt le premier terme, & la grandeur *a* le ſecond, & chercher le terme de cette progreſſion, qui occupe le rang depuis l'unité non compriſe, qui eſt marqué par le nombre qui eſt l'expoſant de cette puiſſance; c'eſt à dire le ſecond terme, ſi l'on cherche la 2ᵉ puiſſance; le 3ᵉ terme, ſi l'on cherche la 3ᵉ puiſſance; le 4ᵉ terme, ſi l'on cherche la 4ᵉ puiſſance, &c.

COROLLAIRE IV.

158. D'où l'on voit auſſi que chercher la racine quelconque d'une puiſſance propoſée, c'eſt ſuppoſer une progreſſion geometrique qui commence par l'unité, & dans laquelle on connoît la puiſſance propoſée, & le rang qu'elle occupe dans la progreſſion par le moyen de l'expoſant donné de cette puiſſance, & chercher le premier d'autant de moyens proportionnels entre l'unité & la puiſſance propoſée que l'expoſant donné de la puiſſance propoſée, qui eſt auſſi l'expoſant du ſigne radical de la racine qu'on cherche, contient d'unitez moins une; c'eſt à dire, un ſeul moyen proportionnel entre l'unité & la puiſſance propoſée, ſi c'eſt la racine 2ᵉ; le premier de deux moyens proportionnels entre l'unité & la puiſſance propoſée, ſi l'on cherche la racine 3ᵉ; le premier de trois moyens proportionnels entre l'unité & la puiſſance propoſée, ſi c'eſt la racine 4ᵉ que l'on cherche, &c.

REMARQUE.

DANS la multiplication & dans la diviſion d'une grandeur donnée par une autre grandeur donnée, on ſuppoſe une proportion dans laquelle trois termes ſont connus, ſçavoir l'unité & les deux grandeurs données, & l'on cherche le quatriéme terme que la multiplication & la diviſion font découvrir; mais quand on veut élever une grandeur donnée *a* à une puiſſance quelconque, ou trouver la racine quelconque

d'une grandeur donnée considerée comme la puissance de la racine qu'on cherche, on suppose une progression geometrique qui commence par l'unité, & où il y a deux termes connus, sçavoir l'unité & la grandeur qu'on veut élever à une puissance quelconque, ou bien l'unité & la puissance donnée dont on veut trouver la racine; & outre ces deux termes connus on sçait encore les rangs que doivent occuper dans la progression la puissance donnée & sa racine quelconque; car le rang de la puissance est connu par le moyen de son exposant; & le rang de la racine est le premier qui suit l'unité. Cette remarque sert, quand on s'applique à la Geometrie, à faire appercevoir clairement le rapport des calculs de ce Traité, avec les proportions & les progressions des lignes & des figures de la Geometrie, & que ces calculs expriment les proportions & les progressions des lignes & des figures, & font découvir les termes que l'on cherche dans les Problêmes de la Geometrie qui appartiennent à ces proportions & progressions; & cela sans embarasser les sens ni l'imagination.

PROBLÊME.

159. *ELEVER une grandeur litterale incomplexe ou complexe à une puissance telle qu'elle puisse être, dont l'exposant est un nombre entier positif qui est donné.*

Operation. Il faut multiplier la grandeur qu'on veut élever à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier positif, laquelle grandeur sera nommée, pour abreger, *la racine*, 1°, par elle-même & le produit sera la 2ᵉ puissance. 2°. Il faut multiplier cette seconde puissance par la racine, & le produit sera la 3ᵉ puissance. 3°. Il faut multiplier cette 3ᵉ puissance par la racine, & l'on aura la 4ᵉ puissance, & continuer ainsi de multiplier chaque nouveau produit par la racine jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la puissance dont l'exposant est celui de la puissance à laquelle on vouloit élever la racine. On appellera cette maniere de multiplier une grandeur, & les produits qui naissent par ordre de ces multiplications, par cette même grandeur; on la nommera, dis-je, la multiplication continuée ou réiterée de cette grandeur par elle-même. Ainsi pour élever une grandeur à une puis-

ſance donnée, il faut la multiplier continuement cette grandeur par elle-même autant de fois que l'expoſant de la puiſſance qu'on demande a d'unitez moins une; c'eſt à dire une fois, ſi l'on veut la 2[e] puiſſance; deux fois, ſi l'on veut la 3[e] puiſſance; trois fois, ſi l'on veut l'élever à la 4[e] puiſſance, &c.

Mais les grandeurs incomplexes pouvant être élevées tout d'un coup à telle puiſſance qu'on voudra, on va mettre par articles la maniere la plus courte de les élever à une puiſſance quelconque.

Pour les grandeurs incomplexes.

1°. QUAND la grandeur incomplexe eſt d'une ſeule dimenſion, * il n'y a qu'à écrire au haut de cette grandeur vers la droite l'expoſant donné, & elle ſera élevée à la puiſſance à laquelle on veut l'élever. Ainſi pour élever a à la 5[e] puiſſance, il faut écrire a^5. Il en eſt de même des autres.

* 144.

2°. Si la grandeur incomplexe contient pluſieurs lettres qui font un produit de pluſieurs dimenſions, mais dans lequel chacune des lettres n'a qu'une dimenſion, il faut écrire au haut de chacune de ces lettres, vers la droite, l'expoſant donné. Par exemple, pour élever abc à la 3[e] puiſſance, il faut écrire $a^3b^3c^3$ pour la 3[e] puiſſance de abc.

3°. Lorſque les differentes lettres de la grandeur incomplexe de pluſieurs dimenſions ſont déja toutes ou quelques-unes élevées à des puiſſances dont les expoſans ſont des nombres entiers poſitifs, il faut écrire dans la racine 1 pour l'expoſant de chacune des lettres qui ſont lineaires, s'il y en a, & enſuite multiplier l'expoſant de chacune des lettres differentes de la racine par l'expoſant donné, & écrire pour expoſant de chacune des differentes lettres le produit de ſon expoſant particulier, par l'expoſant donné de la puiſſance à laquelle on veut élever la racine, & la racine ſera élevée à la puiſſance propoſée. Ainſi pour élever $a^2b^3c^5$ à la 3[e] puiſſance, il faut écrire $a^{2\times3}\,b^{3\times3}\times c^{5\times3} = a^6b^9c^{15}$. De même pour élever a^3bcd^2 à la 5[e] puiſſance, il faut écrire 1 pour l'expoſant des grandeurs lineaires b & c, ce qui donnera $a^3b^1c^1d^2$, & écrire pour la 5[e] puiſſance qu'on demande $a^{3\times5}b^{1\times5}c^{1\times5}d^{2\times5} = a^{15}b^5c^5d^{10}$.

Pour les grandeurs complexes.

1°. *Pour les grandeurs complexes qui n'ont que deux termes qu'on nomme* Binomes.

160. On ſuppoſera toutes les grandeurs complexes binomes, repréſentées par $a + b$, quand les deux grandeurs incomplexes ſont poſitives; & par $a - b$, quand la ſeconde eſt négative. On multipliera continuement la racine $a + b$ par elle-même, & l'on écrira ſéparément de ſuite les produits les uns ſous les autres, ordonnant * chaque produit par rapport à la lettre a; & la grandeur complexe ſera elle-même la premiere puiſſance; le produit ſuivant ſera la 2ᵉ puiſſance; le ſuivant ſera la 3ᵉ puiſſance; & ainſi de ſuite, comme on les voit dans la Table qui ſuit. * 102.

Table des Puiſſances.

$a + b$

$1a + 1b$ premiere puiſſance ou racine.

$a^2 + 2ab + b^2$ 2ᵉ puiſſ.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 3ᵉ puiſſ.

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ 4ᵉ puiſſ.

$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ 5ᵉ puiſſ.

$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ 6ᵉ puiſſ.

$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$ 7ᵉ puiſſ.

$a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$ 8ᵉ puiſſ.

$a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$ 9ᵉ puiſſ.

$a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$ 10ᵉ puiſſ.

Les puiſſances de $a - b$ ſont les mêmes que celles de $a + b$, avec cette ſeule difference que les termes pairs, ſçavoir le 2ᵉ, le 4ᵉ, le 6ᵉ, &c. ſont précedez du ſigne —, * parceque les dimenſions de la grandeur négative $-b$ ſont dans ces termes en nombre impair. * 98.

COROLLAIRE I.

161. La plus haute puiſſance de a eſt ſeule dans le premier terme, & elle diminue d'un degré d'un terme à celui qui le ſuit juſqu'au dernier terme où a ne ſe trouve point. b ne ſe trouve point dans le premier terme; b eſt lineaire dans le ſecond terme, & les puiſſances de b vont enſuite en augmentant

d'un degré d'un terme à celui qui le suit jusqu'au dernier terme où est la plus haute puissance de *b* sans *a*. Dans chaque terme les puissances de *a* & de *b* font ensemble autant de dimensions, que l'exposant de la puissance contient d'unitez, & tous les termes d'une puissance sont homogenes.

COROLLAIRE II.

162. CHAQUE puissance contient autant de termes, & un de plus que l'exposant de cette puissance contient d'unitez. La 2ᵉ puissance contient trois termes; la 3ᵉ contient quatre termes, &c. Le nombre des termes de chaque puissance impaire est un nombre pair; & le nombre des termes de chaque puissance paire, est un nombre impair. Ce Corollaire est une suite évidente du précedent.

COROLLAIRE III.

163. DANS chaque puissance le nombre des termes où se trouve *b* est égal à l'exposant de la puissance; dans la 2ᵉ puissance, il y a deux termes où est *b*; dans la 3ᵉ il y en a trois, &c. Il en est de même de *a*.

COROLLAIRE IV.

164. EN nommant dans chaque puissance les nombres qui précedent chaque terme, *les coefficiens numeriques* de ces terme, le coefficient numerique du premier & du dernier terme est l'unité. Le coefficient numerique du second terme est toujours égal à l'exposant de la puissance. Ainsi le coefficient numerique du second terme de la 2ᵉ puissance est 2; le coefficient du second terme de la 3ᵉ est 3, &c. De plus le second terme de chaque puissance contient toujours le produit de la puissance de *a*, dont l'exposant est moindre d'une unité que l'exposant de cette puissance, par *b* lineaire, & ce produit est multiplié par l'exposant de la puissance; c'est à dire, le second terme de la 2ᵉ puissance est $2a \times b$. Le second terme de la 3ᵉ puissance est $3a^2b$; le second terme de la 4ᵉ est $4a^3b$; le second terme de la 5ᵉ est $5a^4b$; & ainsi des autres.

COROLLAIRE V.

165. SI l'on se rend très familiere la formation des puissances de la table, qu'on peut continuer tant qu'on voudra, on verra clairement la raison de tous les Corollaires qui préce-

dent; & de plus, 1°, que le coefficient numerique d'un terme quelconque est égal à la somme du coefficient numerique du terme de la puissance précedente qui est au dessus de lui, joint au coefficient numerique du terme de la même puissance précedente, qui est au dessus vers la gauche. Par exemple, dans la 5° puissance le coefficient 10 du troisiéme terme est égal à la somme $6 + 4$ des coefficiens numeriques, qui sont au dessus de ce 3ᵉ terme, sçavoir de 6 qui est immédiatement au dessus, & de 4 qui est au dessus vers la gauche. 2°. Que ce coefficient est encore égal à la somme de tous les coefficiens numeriques qui sont au dessus dans la colonne à gauche. Par exemple, le coefficient 10 du troisiéme terme de la 5ᵉ puissance est égal à $+ 4 + 3 + 2 + 1$, qui est la somme de tous les coefficiens numeriques qui sont au dessus de ce troisiéme terme dans la colonne qui le précede vers la gauche. 3°. Que dans chaque puissance, les coefficiens de deux termes également éloignez des extremitez sont égaux. Par exemple, dans la 5ᵉ puissance le coefficient du second & du cinquiéme terme est 5. Le coefficient du troisiéme & du quatriéme terme est 10, &c.

COROLLAIRE VI.

166. DANS chaque puissance, en ne prenant point les coefficiens numeriques; mais les seules grandeurs litterales des termes, tous les termes pris de suite sont une progression geometrique où le rapport d'un terme à celui qui le suit est égal au rapport $\frac{a}{b}$. Par exemple, dans la 3ᵉ puissance les termes $\because a^3 . a^2b . ab^2 . b^3$ font une progression geometrique & le rapport d'un terme à l'autre est égal à $\frac{a}{b}$. Car * $\frac{a^3}{a^2b} = \frac{a^2b}{ab^2}$ *109.
$= \frac{ab^2}{b^3} = \frac{a}{b}$.

DE'FINITION.

167. LORSQUE l'on met dans une expression litterale à la place d'une des lettres de cette expression, une autre grandeur, soit litterale, soit numerique, qu'on suppose égale à cette lettre, ou représentée par cette lettre, on appelle cela *substituer* cette grandeur à la place de la lettre à laquelle on la suppose égale: & cette operation s'appelle *substitution*. Par exemple, si l'on suppose $5 = n$, & que l'on mette 5 à la place de n dans l'expression $n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ ce qui la chan-

gera en $5 \times \frac{5-1}{2} \times \frac{5-2}{3} = 5 \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} = 5 \times 2 \times 1 = 10$, cela s'appelle ſubſtituer 5 à la place de n. De même ſi l'on ſuppoſe $a = b + c$, & qu'on mette $b + c$ à la place de a dans $2ab$, on trouvera $2b^2 + 2bc = 2ab$, & on appelle cela ſubſtituer $b + c$ à la place de a dans $2ab$. L'on doit, par la ſubſtitution, mettre la nouvelle grandeur à la place de la lettre à laquelle on la ſubſtitue, de la même maniere qu'eſt cette lettre dans l'expreſſion litterale. C'eſt à dire, ſi une lettre eſt par addition, ou par ſouſtraction, ou par multiplication, ou de quelqu'autre maniere que ce puiſſe être dans une expreſſion litterale, & qu'on veuille ſubſtituer à ſa place une nouvelle grandeur qu'on lui ſuppoſe égale, il faut mettre cette nouvelle grandeur dans cette expreſſion auſſi par addition, ou par ſouſtraction, ou par multiplication, en un mot de la même maniere que la grandeur, à la place de laquelle on ſubſtitue la nouvelle grandeur, étoit dans cette expreſſion.

DÉFINITION.

168. UNE expreſſion litterale, dont on regarde les lettres comme des indéterminées, laquelle par là repreſénte une infinité d'expreſſions, en concevant qu'on peut ſubſtituer d'autres grandeurs à la place des lettres indéterminées, s'appelle *une formule generale*, ou ſimplement *une formule* de toutes les expreſſions qu'elle répréſente. Par exemple, $a + b$ eſt une formule de toutes les grandeurs complexes de deux termes poſitifs, en concevant a & b comme des indéterminées qui repreſentent l'une le premier terme, & l'autre le ſecond terme de toutes les grandeurs complexes de deux termes.

COROLLAIRE VII.

169. CHACUNE des puiſſances de la table eſt une formule qui repréſente une ſemblable puiſſance de toute grandeur complexe binome, ſoit litterale, ſoit numerique; a dans chaque formule repréſente le premier terme de ce binome, & b le ſecond terme; de maniere qu'il n'y qu'à ſubſtituer dans chaque formule le premier terme de tel binome qu'on voudra à la place de a, & le ſecond à la place de b, & la formule deviendra par cette ſubſtitution la puiſſance ſemblable de ce binome. Chaque formule marque même les operations qu'il faut

faut faire pour élever un binome à la puiſſance de cette formule.

Par exemple, pour élever $a^2 - b^2$ à la 2e puiſſance, il faut ſubſtituer dans la formule $a^2 + 2ab + b^2$ de la 2e puiſſance, a^2 à la place de a, & $- b^2$ à la place de b. La formule $a^2 + 2ab + b^2$ marque auſſi qu'il faut prendre d'abord la 2e puiſſance de a^2, enſuite deux produits de a^2 par $- b^2$; & enfin la 2e puiſſance de $- b^2$, & l'on aura $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$.

De même pour élever 23 à la 2e puiſſance, il faut ſuppoſer $a = 2$, & $b = 3$, écrire dans les rangs qui leur conviennent la 2e puiſſance de 2, enſuite deux fois le produit de 2 par 3, & enfin le quarré de 3, & l'on aura 529 pour la 2e puiſſance ou le quarré de 23.

```
4 . .
1 2 .
    9
-----
5 2 9
```

REMARQUE.

170. LES Lecteurs qui commencent, doivent ſe rendre très familiers les produits de chaque puiſſance, & ſur-tout de la 2e & de la 3e. Sçavoir que le quarré d'un binome repréſenté par $a + b$, contient le quarré a^2 du premier terme, deux fois le produit du premier terme par le ſecond, lequel produit eſt $2ab$; & enfin le quarré b^2 du ſecond terme. Que la 3e puiſſance d'un binome repréſenté par $a + b$ contient la 3e puiſſance a^3 du premier terme, trois fois le produit du quarré du premier terme par le ſecond, c'eſt à dire $3a^2b$; trois fois le produit du premier terme par le quarré du ſecond, c'eſt à dire $3ab^2$, enfin la 3e puiſſance b^3 du ſecond terme. Et ainſi des autres.

2°. *Pour les grandeurs complexes de trois termes qu'on appelle* trinomes, *de quatre termes qu'on nomme* quadrinomes; *& pour les grandeurs complexes de tant de termes qu'on voudra, & même d'une infinité de termes.*

171. POUR élever une grandeur complexe de trois termes, de quatre termes, & de tant de termes qu'on voudra, qu'on pourra repréſenter par les lettres de l'alphabet; par exemple, pour élever $a + b + c + d + e + f + g +$ &c. à telle puiſſance qu'on voudra, dont l'expoſant ſoit un nombre entier qu'on repréſentera ici pour s'expliquer plus clairement par l'indéterminée n, il faut multiplier continuement cette grandeur complexe par elle-même autant de fois qu'il y a

d'unitez dans l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever cette grandeur moins une, c'est à dire autant de fois qu'il y a d'unitez dans $n - 1$, & le dernier produit sera la puissance que l'on cherche; le premier produit sera la 2e puissance, le second sera la 3e puissance de la grandeur complexe, & ainsi de suite.

172. Ou bien on se servira de cette seconde maniere que l'on doit se rendre très familiere. On prendra dans la table des puissances, la formule de la puissance de $a + b$, qui a le même exposant que la puissance à laquelle on veut élever la grandeur complexe de plusieurs termes proposée, & ensuite 1°, on élevera les deux premiers termes $a + b$ de la grandeur proposée, par le moyen de la formule à la puissance de la formule. 2°. On supposera ensuite que a de la formule represente les deux premiers termes $a + b$ de la grandeur proposée, que b de la formule en represente le troisiéme terme c, & que la puissance de a seule dans le premier terme de la formule, represente les deux premiers termes de la grandeur proposée, déja élevez par la premiere operation à la puissance qu'on demande; ensuite on substituera, dans les termes de la formule qui suivent le premier, la somme des deux premiers termes $a + b$ de la grandeur proposée, & les puissances de cette somme, à la place de a, & des puissances de a dans la formule; & on substituera c, & les puissances de c, à la place de b, & des puissances de b dans tous les termes de la formule qui suivent le premier; & après ces substitutions l'on aura déja les trois premiers termes $a + b + c$ de la grandeur proposée, élevez à la puissance qu'on demande. 3°. On supposera que a de la formule represente la somme des trois termes $a + b + c$ de la grandeur proposée; que b de la formule represente le quatriéme terme d de la grandeur proposé; & que la puissance seule de a, dans le premier terme de la formule, represente la puissance semblable de la somme des trois premiers termes $a + b + c$ que l'on a déja trouvée : ensuite on substituera $a + b + c$, & les puissances de $a + b + c$ à la place de a & des puissances de a dans les termes de la formule qui suivent le premier; on substituera dans les mêmes termes & dans le dernier, d & les puissances de d à la place de b & des puissances semblables de b, & l'on aura les quatre premiers termes $a + b + c + d$ de la grandeur

proposée élevez à la puissance qu'on demande. 4°. On trouvera de même par ordre tous les autres termes de la puissance de la grandeur complexe de tant de termes qu'on voudra, en supposant tous les termes de cette grandeur, dont on a déja la puissance, représentez par a de la formule, celui qui les suit représenté par b de la formule, & que la puissance seule de a, dans le premier terme de la formule, représente la puissance de la somme de tous les termes précedens qu'on a déja formée; & en substituant dans les autres termes de la formule les grandeurs qu'on vient de supposer égales à a & b de la formule, à leur place, & les puissances de ces grandeurs à la place des puissances semblables de a & de b de la formule. Cette methode s'éclaircira par les exemples suivans.

173. On remarquera que quand il faut substituer dans une formule à la place de toutes les lettres qu'elle contient les grandeurs particulieres que représentent ces lettres, sans qu'il reste une lettre de la formule, elle marque alors simplement les operations qu'il faut faire sur les grandeurs que représentent les lettres de la formule, pour avoir l'expression de ces grandeurs particulieres représentée par la formule, & dans ce cas on entend par substituer les grandeurs particulieres dans la formule, à la place des lettres qui les représentent, faire sur ces grandeurs particulieres les operations de multiplication, de division, &c. que marque la formule: & c'est ce qu'on entend ici.

EXEMPLE I.

POUR élever $a+b+c+d+e$ à la 2ᵉ puissance, on se servira de la formule $a^2+2ab+b^2$, & elle sera la 2ᵉ puissance des deux premiers termes $a+b$; mais si les deux premiers termes de $a+b+c+d+e$ n'étoient pas ceux de la formule, on trouveroit leur 2ᵉ puissance * à la maniere des binomes. * 169.

2°. On supposera que a de la formule représente $a+b$, & que b de la formule représente c, & que a^2 représente la 2ᵉ puissance $a^2+2ab+b^2$ des deux premiers termes de $a+b+c+d+e$ déja trouvée, & les deux autres termes $2ab+b^2$ marquent qu'il faut multiplier $2\times\overline{a+b}$, représenté par $2a$ de la formule, par c représenté par b de la formule, & b^2 de la formule marque

qu'il faut prendre c^2 représenté par b^2 de la formule ; & l'on aura déja $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ pour la 2e puissance des trois premiers termes $a + b + c$ de $a + b + c + d + e$.

3°. Il faut supposer que a de la formule représente $a + b + c$, b de la formule représente d, & que a^2 de la formule représente la 2e puissance de $a + b + c$ déja formée ; ensuite $2ab + b^2$ de la formule marquent les produits $2 \times \overline{a + b + c} \times d$ & d^2. Ainsi l'on aura déja $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$.

4°. On supposera $a + b + c + d = a$ de la formule, & $e = b$ de la formule, & les termes $2ab + b^2$ de la formule, marquent qu'il faut prendre le produit $2 \times \overline{a + b + c + d} \times e = 2ab$ de la formule, & $+ e^2 = b^2$ de la formule. Ainsi la 2e puissance de $a + b + c + d + e$ sera $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2 + 2ae + 2be + 2ce + 2de + e^2$.

S'il y avoit eu encore d'autres termes dans la grandeur complexe $a + b + c +$ &c. on auroit continué de la même maniere de les élever à la 2e puissance.

EXEMPLE II.

POUR élever $a + b + c + d + e$ à la 3e puissance, il faut se servir de la formule $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & 1°. les deux premiers termes de la grandeur proposée étant $a + b$ les mêmes que ceux de la formule, l'on a déja dans la formule ces deux premiers termes élevez à la 3e puissance; s'ils en étoient dif-
*169. ferens, on les éleveroit à la 3e puissance * comme les binomes par le moyen de la formule.

2°. Il faut supposer que a de la formule représente $a + b$ de la grandeur à élever, que b de la formule représente le troisiéme terme c, & que a^3 représente la 3e puissance des deux premiers termes déja trouvée. Les termes $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ marquent qu'il faut prendre $3 \times \overline{a + b}^2 \times c = 3a^2b$; $3 \times \overline{a + b} \times c^2 = 3ab^2$, & $c^3 = b^3$; & faisant le calcul, on aura déja $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$ pour la 3e puissance de $a + b + c$.

3°. On supposera que a de la formule représente $a + b + c$

que b de la formule repréſente d, que a^3 de la formule repréſente la 3ᵉ puiſſance de $a + b + c$ déja trouvée ; les trois termes de la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ marquent qu'il faut prendre $3 \times \overline{a+b+c}^2 \times d = 3a^2b$, $3 \times \overline{a+b+c} \times d^2 = 3ab^2$, & $d^3 = b^3$; & faiſant le calcul, on trouvera que les termes qu'il faut ajouter à ceux que l'on a déja trouvez ſont $3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + d^3$.

4°. Enfin on ſuppoſera que a de la formule repréſente $a + b + c + d$, que b de la formule repréſente e, que a^3 de la formule repréſente la 3ᵉ puiſſance de $a + b + c + d$ déja trouvée ; & les termes $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ de la formule marquent qu'il faut prendre $3 \times \overline{a+b+c+d}^2 \times e = 3a^2b$; $3 \times \overline{a+b+c+d} \times e^2 = 3ab^2$, & $e^3 = b^3$; & faiſant le calcul on trouvera que les termes qu'il faut ajouter à ceux que l'on a déja trouvez, ſont $3a^2e + 6abe + 3b^2e + 6ace + 6bce + 3c^2e + 6ade + 6bde + 6cde + 3d^2e + 3ae^2 + 3be^2 + 3ce^2 + 3de^2 + e^3$.

S'il y avoit eu plus de termes dans la grandeur propoſée $a + b + c + d + e$, on auroit trouvé tous les autres termes de ſa 3ᵉ puiſſance par le moyen de la formule, comme l'on a trouvé tous les précedens.

REMARQUES.

I.

174. ON pourra de la même maniere élever toute grandeur complexe de tant de termes qu'on voudra à la 4ᵉ puiſſance, à la 5ᵉ, &c. par le moyen des formules de ces puiſſances. Mais il ſuffit ordinairement pour apprendre les Mathematiques de ſe rendre familiere la formation de la 2ᵉ & de la 3ᵉ puiſſance, & de retenir, 1°, *Que le quarré ou la 2ᵉ puiſſance d'une grandeur complexe de pluſieurs termes, contient le quarré du premier terme, plus deux produits du premier terme par le ſecond, plus le quarré du ſecond terme, plus deux produits de la ſomme des deux premiers termes par le troiſiéme, plus le quarré du troiſiéme terme, plus deux produits de la ſomme des trois premiers termes par le quatriéme, plus le quarré du quatriéme terme; & ainſi de ſuite.*

2°. *Que le cube ou la troiſiéme puiſſance d'une grandeur com-*

plexe contient le cube du premier terme, plus trois produits du quarré du premier terme par le second, plus trois produits du premier terme par le quarré du second, plus le cube du second terme, plus trois produits du quarré de la somme des deux premiers termes par le troisiéme, plus trois produits de la somme des deux premiers termes par le quarré du troisiéme, plus le cube du troisiéme terme, plus trois fois le produit du quarré de la somme de trois premiers termes par le quatriéme, plus trois fois le produit de la somme des trois premiers termes par le quarré du quatriéme, plus le cube du quatriéme terme, & ainsi de suite.

2.

175. La premiere methode de former les puissances des grandeurs complexes par la multiplication continue de la même
*89. & grandeur, est une suite évidente de la définition * des puis-
143. sances, & la seconde où l'on se sert des puissances d'un binome comme de formules pour trouver les puissances des grandeurs complexes de tant de termes qu'on voudra, n'a pas besoin de démonstration, ce n'est qu'une application de l'universalité des expressions litterales qui représentent toutes sortes de grandeurs; c'est une application de l'étendue du calcul de ces expressions generales qui représente les calculs particuliers; c'est l'avantage que donnent ces expressions generales d'abreger les expressions même litterales les plus composées, en les réduisant à une expression très simple. Par exemple, on peut representer par le simple produit ab des deux grandeurs a & b le produit de deux grandeurs les plus complexes, pour ainsi dire qu'on puisse imaginer, comme de $c + d + e + f + g$, &c. par $b + i + k + l + m$, &c. en supposant la premiere répréséntée par a, & la seconde par b. Ce sont des signes arbitraires qu'on ne sçauroit contester, & dont on tire des avantages infinis pour reserrer les objets les plus composez, & tous les rapports, dans les bornes de notre esprit que les objets passeroient de beaucoup par leurs expressions particulieres.

3.

176. Lorsqu'un ou plusieurs termes de la grandeur complexe à élever à une puissance donnée sont précedez du signe —, la formation de la puissance de cette grandeur se fait de la mê-

me maniere, & l'on trouve les mêmes termes, en observant seulement que les produits où se trouve un terme négatif avec des dimensions impaires, comme 1, 3, 5, &c. doivent avoir le signe —, & que les produits où se trouvent plusieurs termes négatif, doivent encore avoir le signe —, si les exposans des dimensions de ces termes joints ensemble font un nombre impair; par exemple, s'il y avoit $-b-c$ parmi les termes de la grandeur à élever, les produits où il y auroit $-b^1 \times c^2$, $b^2 \times -c^1$; $b^2 \times -c^3$; $-c^3 \times b^4$, &c. * * 98.
seroient négatifs. De même s'il y avoit $-b-c-d$, les produits $-b^1 \times -c^1 \times -d^1$, $-b^3 \times -c^1 \times -d^3$, $-b^3 \times -c^3 \times -d^5$, &c. seroient négatifs.

La formation des puissances des grandeurs numeriques.

PROBLÊME IV.

177. *ELEVER un nombre entier quelconque à telle puissance qu'on voudra, dont l'exposant est un nombre entier positif.*

IL faut se servir des mêmes methodes que l'on a employées pour les grandeurs litterales. La premiere est de multiplier le nombre proposé continuement par lui-même autant de fois que l'exposant de la puissance à laquelle on le veut élever contient d'unitez moins une. Et le premier produit sera la 2ᵉ puissance ou le quarré; le second sera le cube ou la 3ᵉ puissance, le troisiéme sera la 4ᵉ puissance, & ainsi de suite. C'est par cette methode qu'il faut former les puissances seules des premiers chifres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 & 10.

La seconde methode est de se servir des formules de la table des puissances. Pour faire clairement concevoir l'application de cette methode, on fera les remarques suivantes, 1°. Que l'on peut regarder un nombre qui a plusieurs rangs, par exemple 2345, comme une grandeur complexe d'autant de termes que ce nombre a de rangs. Le premier chifre 2 à gauche est le premier terme; le suivant 3 vers la droite est le second, & ainsi de suite.

2°. Que quoique la multiplication d'un nombre complexe par lui-même, comme de 2345 par 2345, ou par un autre nombre complexe, se fasse ordinairement en commençant

par le premier chifre de la droite en allant de suite vers la gauche, on peut cependant la faire en commençant par le premier chifre 2 de la gauche en allant de suite de la gauche à la droite, pourvû qu'on observe de mettre devant
* 81. le produit du premier chifre à gauche par lui-même, * autant de rangs qu'il y en a devant le chiffre multiplié & devant le chifre multiplicateur, c'est à dire deux fois autant de rangs qu'il y en a devant le chifre multiplié par lui-même, & qu'on observe la *même regle des rangs* dans
* 81. tous les produits suivans, c'est à dire * de *mettre toujours devant le produit d'un chifre par un autre, la somme des rangs qui sont devant le multiplié & le multiplicateur.*

Après ces remarques on supposera d'abord le premier chifre 2 le plus à gauche du nombre complexe, representé par *a* de la formule, & le second 3 en allant vers la droite representé par *b* de la formule, & l'on prendra les puissances & les produits de 2 & de 3 marquez par les produits de *a* & de *b* de la formule que l'on écrira les uns sous les autres en observant de les placer aux rangs qui leur conviennent. Ensuite on supposera que *a* de la formule represente les deux premiers chifres 23 du nombre donné pris selon la valeur de leurs rangs, c'est à dire 2300, que *b* represente le troisiéme 4 pris aussi suivant la valeur de son rang, c'est à dire 40, & que la puissance de *a* qui est le premier terme de la formule represente la puissance déja trouvée de 23: & l'on prendra les puissances & les produits de 23 = *a* & de 4 = *b* que marque la formule, & on les écrira sous les autres chacun au rang qui lui convient. En un mot on supposera que tous les chifres dont on à déja trouvé la puissance, sont representez par *a*, & le suivant à droite par *b*, & on en écrira les puissances & les produits marquez par la formule aux rangs qui conviennent à chacun, jusqu'à ce qu'on ait employé le dernier chifre le plus à droite. Enfin on ajoutera tous ces produits en une somme qui sera la puissance que l'on cherche.

I. EXEMPLE.

POUR élever 2345 au quarré, on supposera que *a*, de la formule $a^2 + 2ab + b^2$, représente 2, & que *b* représente 3. Et l'on prendra comme le marque la formule,

2345

Exemple I.

2345 nombre à élever au quarré.

178.	$2000 = a$	$2 = a$	$4\cdot00\cdot00\cdot00 = a^2$	} $= a^2$	} $= a^2$
	$300 = b$	$3 = b$	$1\cdot20\cdot00\cdot00 = 2ab$		
			$9\cdot00\cdot00 = b^2$		
	$2300 = a$	$23 = a$	$18\cdot40\cdot00 = 2ab$		
	$40 = b$	$4 = b$	$16\cdot00 = b^2$		
	$2340 = a$	$234 = a$	$2\cdot34\cdot00 = 2ab$		
	$5 = b$	$5 = b$	$25 = b^2$		

: 5 : 49 : 90 : 25 quarré de 2345
q pq pq pq
A B C D

le quarré de 2 qui eſt $4 = a^2$, & on l'écrira en mettant au devant ſix rangs remplis de ſix zeros ou de ſix points, parceque $2 = a$, a trois rangs devant lui, & étant multiplié par lui-même, le produit 4 doit avoir ſix rangs devant lui. On prendra enſuite deux fois le produit de 2 par 3 qui eſt $12 = 2ab$. On l'écrira ſous le quarré précedent, mais on avancera le chifre 2 qui eſt le plus à droite du produit 12 d'un rang vers la droite, afin qu'il y ait cinq rangs devant 12, puiſqu'il y a trois rangs devant le multiplié 2, & deux rangs devant le multiplicateur 3. Puis on prendra le quarré de 3 qui eſt 9, qu'on écrira ſous les deux précedens, mais dans un rang plus avancé vers la droite, ne devant avoir que quatre rangs devant lui, puiſque c'eſt le produit de 300 par 300. On ne déſignera plus dans la ſuite les rangs où l'on doit commencer d'écrire les premiers chifres à droite de chaque produit : les Lecteurs ne peuvent plus avoir de peine à les diſtinguer.

Après cette premiere operation on ſuppoſera que a de la formule repréſente 23 ; que b repréſente 4, & que a^2 de la formule repréſente le quarré de 23 qu'on vient de trouver, & l'on prendra $2 \times 23 \times 4 = 184 = 2ab$, & $16 = b^2$ qu'on écrira ſous les produits précedens dans les rangs qui leur conviennent.

Enſuite on ſuppoſera que a de la formule repréſente 234 ; que b repréſente 5, & que a^2 repréſente le quarré de 234 qu'on a déja formé, & l'on prendra $2 \times 234 \times 5 = 2340 = 2ab$, & $25 = b^2$, & on écrira ces produits ſous les précedens dans les rangs qui leur conviennent.

Enfin on ajoutera tous les produits qu'on a formez, dans une ſomme, & l'on aura 5499025 pour le quarré de 2345.

REMARQUE.

$$
\begin{array}{r}
2345 \\
2345 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrl}
4000000 & = & 2000 & \times & 2000 & = a^2 \\
600000 & = & 2000 & \times & 300 & \\
600000 & = & 300 & \times & 2000 & \\
90000 & = & 300 & \times & 300 & = b^2 \\
92000 & = & 2300 & \times & 40 & \\
92000 & = & 40 & \times & 2300 & \\
1600 & = & 40 & \times & 40 & = b^2 \\
11700 & = & 2340 & \times & 5 & \\
11700 & = & 5 & \times & 2340 & \\
25 & = & 5 & \times & 5 & = b^2 \\
\hline
\end{array}
$$

(Accolades : 600000 + 600000 $= 2ab$; 92000 + 92000 $= 2ab$; 11700 + 11700 $= 2ab$; les quatre premières lignes $= a^2$; les sept premières lignes $= a^2$.)

5499025 quarré de 2345

Les Lecteurs qui commencent pourront remarquer, qu'en ſuivant la formule, on diſtingue les produits qui compoſent le quarré de 2345, & qu'on les range dans un ordre qui ſert à les retrouver, quand ce quarré etant donné on en cherche la racine quarrée 2345. Et s'ils multiplient 2345 par 2345 par la multiplication ordinaire, ſoit en commençant par la droite en allant vers la gauche, ſoit en commençant par la gauche en allant vers la droite, en obſervant de placer les produits particuliers dans les rangs qui leur conviennent, ils verront clairement que quoiqu'on ne diſtingue pas ces produits, en faiſant la multiplication ordinaire, elle les contient pourtant tous, & qu'elle n'en contient aucun autre. Il leur ſera plus utile de le voir eux-mêmes en faiſant beaucoup d'exemples, que ſi l'on employoit un long diſcours pour l'expliquer.

II. EXEMPLE.

179. POUR élever 2345 à la 3e puissance ou au cube, il faut se servir de la formule $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & supposer d'abord que a de la formule représente 2, & que b représente 3, & prendre les puissances & les produits de 2 & de 3 marquez par la formule ; les écrire les uns sous les autres dans les rangs qui leur conviennent, comme on le voit ici.

Exemple II.

2345 nombre à élever à la 3e puissance.

$2 = a$	8	000	000	000	$= a^3$	a^3	a^3
$3 = b$	3	600	000	000	$= 3a^2b$		
		540	000	000	$= 3ab^2$		
		27	000	000	$= b^3$		
$23 = a$		634	800	000	$= 3a^2b$		
$4 = b$		11	040	000	$= 3ab^2$		
			64	000	$= b^3$		
$234 = a$		82	134	000	$= 3a^2b$		
$5 = b$			175	500	$= 3ab^2$		
				125	$= b^3$		
	12 :	895 :	213 :	625	cube de 2345.		
	qr :	pqr :	pqr :	pqr			
	A	B	C	D			

Après cette premiere operation, il faut supposer que a de la formule représente 23, que b représente 4, & que a^3 représente la 3e puissance de 23 déja formée, & prendre les puissances & les produits des nombres représentez par a & par b que prescrit la formule, & les écrire sous les précedens dans les rangs qui leur conviennent, comme on le voit dans l'exemple.

Ensuite il faut supposer que a de la formule représente 234, que b représente 5, & que a^3 représente la 3e puissance de 234 déja formée, & prendre les puissances & les produits des grandeurs représentées par a & par b que prescrit la formule, & les écrire sous les précedens dans les rangs qui leur conviennent, comme on le voit dans l'exemple.

Enfin il faut ajouter tous les produits qu'on a trouvez dans une somme, & l'on aura 12895213625 pour le cube, ou la 3e puissance de 2345.

REMARQUES.

I.

180 POUR élever un nombre donné à la 4e puissance, il faut d'abord l'élever à la 2e puissance, & élever cette 2e puissance, considerée comme une racine, à la 2e puissance, & ce sera la 4e puissance du nombre proposé.

Pour élever un nombre à la 6e puissance, il faut d'abord l'élever à la 2e puissance, & élever cette 2e puissance à la 3e puissance, & ce sera la 6e puissance qu'on cherche. Ou bien il faut élever le nombre proposé à la 3e puissance, & élever cette 3e puissance à la 2e, & ce sera la 6e puissance qu'on cherche.

Pour élever un nombre à la 8e puissance, il faut d'abord l'élever à la 2e puissance; élever ensuite cette 2e puissance à la 2e puissance; enfin élever cette derniere à la 2e puissance: ce sera la 8e puissance qu'on cherche.

En general, lorsque l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever un nombre, se peut diviser exactement par des nombres entiers, differens de l'unité (par exemple, l'exposant 4 de la 4e puissance peut se diviser par 2 & 2; l'exposant 6 de la 6e par 2 & 3; l'exposant 8 de la 8e par 2, 2, 2, & encore par 2 & 4; l'exposant 9 de la 9e par 3 & 3; l'exposant 12 de la 12e par 2, 2, 3, & encore par 3 & 4, & encore par 2 & 6; & ainsi des autres:) au lieu d'élever le nombre immédiatement à la puissance proposée, il est plus court de choisir, pour exposans particuliers, les diviseurs, qui étant multipliez les uns par les autres, donnent pour produit l'exposant de la puissance cherchée, & d'élever le nombre proposé à la puissance marquée par le premier de ces diviseurs, celle-ci à la puissance marquée par le second des diviseurs, cette derniere à la puissance marquée par le diviseur suivant, & ainsi de suite jusqu'à la puissance marquée par le dernier des diviseurs, laquelle sera la puissance qu'on cherche.

Par exemple, pour élever un nombre à la 12e puissance, dont l'exposant 12 a pour diviseurs $2 \times 2 \times 3 = 12$, il faut l'élever à la 2e, celle-ci à la 2, & cette derniere à la 3e, la-

quelle sera la 12 puissance qu'on cherche. On remarquera qu'il faut choisir les diviseurs, dont le produit forme l'exposant de la puissance qu'on cherche, qui sont les exposans des puissances les plus faciles à former. Par exemple, les diviseurs de 12, dont le produit forme 12, étant $2 \times 2 \times 3$. 3×4; 2×6. il est visible que les trois $2 \times 2 \times 3$ sont les exposans des puissances plus aisées à calculer que 3×4, & que 2×6.

La raison de cette pratique est évidente. Car supposé que a représente le nombre à élever, que le nombre entier qui est l'exposant de la puissance qu'on cherche soit représenté par n, que les diviseurs exacts de n soient marquez par b, c, d. De façon que $bcd = n$, il est évident * que $a^n = a^{b \times c \times d} = a^{bcd}$. *150.

II. REMARQUE.

D'où l'on voit qu'il n'y a que les puissances, dont les exposans n'ont pas d'autres diviseurs que l'unité, comme la 2ᵉ, la 3ᵉ, la 5ᵉ, la 7ᵉ, la 11ᵉ, la 13ᵉ, la 17ᵉ, la 19ᵉ, &c. qu'il faille trouver immédiatement, & que toutes les autres peuvent s'y réduire.

III. EXEMPLE.

181. POUR élever 234 à la 5ᵉ puissance, il faut se servir de la formule $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, & supposer

Exemple III

234 nombre à élever à la 5ᵉ puissance.

$2 = a$	32	00000	00000 =	a^5	} $= a^5$
	24	0.0000	00000 =	$5a^4b$	
$3 = b$	7	20000	00000 =	$10a^3b^2$	
	1	080.00	00000 =	$10a^2b^3$	
		8100	00000 =	$5ab^4$	
		243	00000 =	b^5	
$23 = a$	5	59682	00000 =	$5a^4b$	
$4 = b$		19467	20000 =	$10a^3b^2$	
		338	560.00 =	$10a^2b^3$	
		2	94400 =	$5ab^4$	
			1024 =	b^5	
	: 70 :	15833 :	71424	5ᵉ puiss. de 234.	
	st	pqrst	pqrst		
	A	B	C		

d'abord que a repréſente 2 ; que b repréſente 3. Prendre les puiſſances & les produits de 2 & de 3 que preſcrit la formule, & les écrire les uns ſous les autres dans les rangs qui leur conviennent, comme on le voit dans la page précedente.

Il faut enſuite ſuppoſer $23 = a$, & $4 = b$, & que a^5 repréſente la 5e puiſſance de 23 qu'on vient de former, prendre les puiſſances & les produits de 23 & de 4 que preſcrit la formule, les écrire ſous les précedens dans les rangs qui leur conviennent ; enfin ajouter tous les produits dans une ſomme, & l'on aura 701583371424 pour la 5e puiſſance de 234.

REMARQUE.

Il eſt inutile d'apporter ici d'autres exemples de la formation des puiſſances numeriques. Il ſuffit aux Lecteurs de ſe rendre familiere la formation de la 2e & de la 3e puiſſance, & d'avoir entendu la methode de former les autres plus élevées, dont on a rarement beſoin dans les Mathematiques.

182. *Démonſtration de la methode de former les puiſſances par le moyen de la table des puiſſances*. 1°. Il eſt évident qu'une grandeur complexe litterale, comme $a + b + c + d$, &c. peut repréſenter un nombre qui aura autant de rangs qu'on voudra, en prenant autant de termes de la grandeur litterale qu'il y aura de rangs dans le nombre qu'on prendra ; par exemple $a + b + c + d$ peut repréſenter le nombre 2345, de maniere que a repréſentera 2; b, 3; c, 4; d, 5; & ainſi des autres. 2°. Il eſt clair qu'en élevant $a + b + c + d$ à telle puiſſance qu'on voudra, cette puiſſance litterale repréſentera tous les produits particuliers des termes d'une ſemblable puiſſance de la grandeur numerique repréſentée par $a + b + c + d$, leſquels produits particuliers compoſent la puiſſance ſemblable de la grandeur numerique, avec cette ſeule choſe particuliere à la puiſſance numerique, qu'il faut obſerver que tous ces produits particuliers de la puiſſance numerique ſoient placez dans les rangs qui leur conviennent, *ſuivant la regle des rangs* ; mais ce ſont toujours les vrais produits numeriques repréſentez par les produits des Lettres, qui, joints enſemble, forment la puiſſance numerique.

*172.& 175. Or on a fait voir * que les formules des puiſſances des grandeurs complexes binomes repréſentoient tous les produits des ſemblables puiſſances des grandeurs complexes litterales

de tant de termes qu'on voudra, & faisoient découvrir ces produits. Ces mêmes formules font donc aussi découvrir tous les produits particuliers des termes des grandeurs numeriques, qui composent joints ensemble chaque puissance de ces grandeurs numeriques, en observant de les placer les uns sous les autres, à mesure qu'on les trouve, dans les rangs qui leur conviennent, & en les ajoutant dans une somme qui les contient tous, & qui est la puissance numerique qu'on cherchoit.

DÉFINITION.

183. UN nombre entier qui est formé par le produit d'un nombre entier multiplié continuement par lui-même, s'appelle *une puissance parfaite*; Ainsi 4 produit de 2×2 est un quarré parfait. $8 = 2 \times 2 \times 2$ est un cube parfait. $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ est une 4e puissance parfaite. Les autres nombres entiers, quand on les considere comme des puissances, & qu'ils ne peuvent être formez par le produit d'un nombre entier multiplié continuement par lui-même, s'appellent *des puissances imparfaites*. Ainsi 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, & les autres semblables sont des puissances imparfaites.

COROLLAIRES.

I.

184. QUAND on a la puissance parfaite telle qu'on voudra d'un nombre entier quelconque qui sera nommé a, pour l'exprimer d'une maniere indéterminée qui convienne à tout nombre entier; si l'on veut trouver la puissance semblable parfaite du nombre $a + 1$, qui surpasse le nombre a d'une unité, il n'y a qu'à prendre dans la table des puissances la formule de cette puissance, supposer que a de la formule représente le nombre entier a qui est la racine de la puissance parfaite; que la puissance la plus haute de a, qui est le premier terme de la formule, représente la puissance parfaite du nombre supposé égal à a, & mettre 1 à la place de b, & des puissances de b dans la formule, & tous les termes de la formule ainsi changée, qui suivent le premier, marqueront les produits qu'il faut ajouter à la puissance supposée de a, pour former la puissance parfaite de $a + 1$.

Ainsi $a^2 + 2a + 1$ marque que, quand on a le quarré par-

fait d'un nombre, comme 9 quarré de 3; si l'on veut le quarré de $4 = 3 + 1$, il faut ajouter à 9, $2 \times 3 + 1$, & l'on aura 16 pour le quarré de $3 + 1 = 4$.

De même $a^3 + 3aa + 3a + 1$ est la formule pour trouver, quand on a le cube parfait d'un nombre, le cube parfait du nombre qui surpasse le premier d'une unité. Par exemple, 8 est le cube de 2; la formule fait découvrir $8 + 12 + 6 + 1 = 27$ pour le cube parfait de $3 = 2 + 1$. Il est facile de trouver les formules des puissances plus élevées, & de les appliquer à des exemples.

REMARQUE.

LA formule $a^2 + 2a + 1$ fait découvrir une proprieté des nombres impairs pris de suite 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. que voici.

L'unité qui est le premier terme, étant d'abord prise seule, & prenant ensuite les sommes des deux premiers termes, des trois premiers termes, des quatre premiers termes, & ainsi de suite; l'unité & ces sommes sont par ordre les quarrez parfaits des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. Cela vient, 1°, de ce que toutes les puissances & toutes les racines de l'unité n'étant que l'unité même, l'unité est le quarré de l'unité: 2°. De ce que la difference des nombres impairs est 2. 3°. Enfin, de ce que les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. expriment de suite les nombres des termes de la progression arithmetique des nombres impairs 1, 3, 5, &c. Ainsi le nombre impair qui suit une somme des termes impairs, contient le nombre des termes de cette somme deux fois, & 1 de plus. D'où il suit qu'en mettant dans $a^2 + 2a + 1$ le quarré de l'unité, qui est l'unité, à la place de a^2, & la racine de l'unité, qui est aussi l'unité, à la place de a, on aura $1 + 2 + 1 = 1 + 3 = 4$ quarré de $1 + 1 = 2$. Substituant ensuite 4 à la place de a^2, & 2, racine quarrée de 4, à la place de a, on aura $4 + 4 + 1 = 1 + 3 + 5 = 9$, quarré de $2 + 1 = 3$. Substituant à présent 9 à la place de a^2, & 3 racine quarrée de 9 à la place de a, on aura $9 + 2 \times 3 + 1 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ quarrée de $3 + 1 = 4$; & ainsi de suite. D'où l'on voit que le nombre des termes d'une somme des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c. est la racine quarrée de cette somme; & que cette somme est le quarré parfait du nombre des termes.

AVERTISSEMENT.

AVERTISSEMENT.

ON a vû * dans la formation des puissances numeriques d'un nombre complexe qui a plusieurs rangs ou caracteres, (lequel nombre est la racine de ces puissances,) que chaque puissance totale contenoit la semblable puissance de chacun des caracteres de la racine, & de plus les autres produits representez par la formule de cette puissance; par exemple, que le quarré de 2345 contenoit le quarré de chacun des caracteres 2, 3, 4, 5, & de plus les autres produits que fait découvrir la formule des quarrez. Il est important de bien distinguer dans chaque puissance totale numerique, les places ou les rangs des puissances semblables de chaque caractere de la racine de cette puissance, & les rangs ou les places des autres produits particuliers qui font, étant joints ensemble, la puissance totale. C'est ce qu'on va enseigner dans les Theorémes & les Corollaires suivans. * 177.

THEORÊME.

185. *DANS la puissance quelconque d'un nombre complexe, la puissance semblable particuliere de chaque caractere de la racine, a devant elle un nombre de rangs qui contient autant de fois le nombre des rangs qui sont devant ce caractere dans la racine, que l'exposant de la puissance contient d'unitez.*

Dans le quarré d'un nombre qui a plusieurs caracteres ou plusieurs rangs, par exemple, dans le quarré dont 2345 est la racine quarrée, le quarré particulier de chaque caractere a devant lui le double des rangs qui sont devant ce caractere dans la racine. Par exemple, 2 a trois rangs devant lui dans 2345; dans le quarré de 2345 le quarré particulier de 2 a deux fois trois rangs devant lui; le quarré de 3 a deux fois deux rangs devant lui; le quarré de 4 a deux fois un rang devant lui; le quarré de 5 est au rang des unitez.

Dans la 3[e] puissance, ou dans le cube d'un nombre, le cube particulier de chaque caractere de la racine a devant lui le triple des rangs qui sont devant ce caractere dans la racine.

Dans la 4[e] puissance d'un nombre, la 4[e] puissance particuliere de chaque chifre ou de chaque caractere de la racine

a devant elle le quadruple des rangs qui sont devant ce caractere dans la racine.

Dans la 5ᵉ puissance, dont l'exposant est 5, la 5ᵉ puissance particuliere de chaque caractere de la racine a devant elle le quintuple des rangs qui sont devant ce caractere dans la racine.

* 81. & 177. Ce Theorême est une suite évidente * de la regle que l'on a donnée pour placer les produits de la multiplication dans les rangs qui leur conviennent.

A B C D

DÉFINITION.

q.pq.pq.pq.

5,49,90,25

Si l'on distingue par des points ou par des virgules, ou par de petites lignes droites dans un nombre complexe comme 5499025, les rangs des deux en deux, ou de trois en trois, ou de quatre en quatre, &c. en commençant par les rangs de la droite en allant vers la gauche; on nommera cela partager ce nombre complexe *en tranches* chacune de deux rangs, ou chacune de trois rangs, ou chacune de quatre rangs, &c. & toutes les tranches auront chacune le même nombre de rangs, excepté celle qui est la plus à gauche qui peut en avoir moins.

On nommera *A* la tranche la plus à gauche, qui est celle qui se présente la derniere en partageant le nombre complexe en tranches; on nommera *B*, *C*, *D*, *E*, *&c.* celles qui suivent vers la droite. On nommera aussi *A* la premiere tranche; *B*, la seconde; *C*, la troisiéme, & ainsi de suite.

On nommera, dans chaque tranche, *p* le chifre le plus à gauche, *q*, *r*, *s*, *t*, *&c.* les autres suivans vers la droite. On nommera aussi dans chaque tranche le chifre ou le rang *p*, le premier rang de cette tranche; & *q*, *r*, *s*, *t*, *&c.* le second le troisiéme, le quatrieme rang, &c. de cette tranche,

* 177. On a fait distinguer * dans la puissance parfaite d'un nombre complexe qui en est la racine, quels étoient les puissances particulieres & les produits des caracteres de la racine, qui joints ensemble composoient la puissance totale. Pour marquer en quelle tranche & en quel rang d'une tranche chacun de ces produits commence à se trouver, on dira qu'il se trouve

en tel rang d'une telle tranche. Les Lecteurs voyent bien que si chacun de ces produits a plusieurs, rangs il ne peut y avoir au plus que son premier chifre à droite qui se trouve contenu dans le rang où l'on dira qu'il se trouve, & que les autres chifres sont dans les rangs qui suivent ce rang vers la gauche.

A	B	C	D	
q,	pq,	pq,	pq,	
5,	49,	90,	25	quarré de 2345

Par exemple le quarré 5 de la racine 2345, se trouve au dernier rang marqué *q* de la derniere tranche *D* du quarré de 2345; parcequ'il commence à se trouver dans ce dernier rang. Le quarré de 4 se trouve dans le dernier rang *q* de la troisiéme tranche *C*. Le quarré de 3 se trouve dans le rang *q* de la seconde tranche *B*. Le quarré de 2 se trouve dans le rang *q* de la premiere tranche *A*; il en est de même des autres.

THEORÊME.

186. *Si l'on partage une puissance numerique quelconque en tranches chacune d'autant de rangs que l'exposant de la puissance contient d'unitez, c'est à dire chacune de deux rangs, si c'est une 2e puissance; de trois rangs, si c'est une 3e puissance, & ainsi des autres; la racine de cette puissance contiendra autant de rangs ou de caractères qu'il y aura de tranches: & elle n'en sçauroit contenir ni plus ni moins.*

On prendra, afin de rendre la démonstration plus facile à concevoir, le quarré numerique qui a quatre tranches, & dont la racine est 2345.

A	B	C	D
q,	pq,	pq,	pq
5,	49,	90,	25

Démonstration. Si l'on suppose une racine 2345 qui ait autant de rangs que sa puissance a de tranches, c'est à dire dans notre exemple quatre rangs, sa puissance aura par le * Theorême précedent autant de tranches que cette racine a de rangs; car la puissance du premier chifre à gauche aura devant elle autant de tranches qu'il y a de rangs dans la racine devant ce caractere, & cette puissance elle-même en ajoutera une de plus. Mais si l'on suppose que la racine a un seul rang de plus ou de moins que sa puissance n'a de tranches; il est évident par le Theorême précedent que sa puissance aura une tranche de plus ou de moins. D'où il suit que la

* 185.

racine de cette puiſſance ne peut avoir qu'autant de rangs ou de caracteres que ſa puiſſance a de tranches.

2ᵉ *Démonſtration*. Suppoſant que la puiſſance numerique a quatre tranches, & que ce ſoit la 2ᵉ puiſſance, qu'on prenne l'unité précedée de quatre zero, il eſt évident que la 2ᵉ puiſſance de 10000, qui eſt 1, 00, 00, 00, 00 aura cinq tranches. Mais 10000 eſt le plus petit des nombres qui ont cinq rangs, & 1, 00, 00, 00, 00 le plus petit des nombres qui ont cinq tranches. La racine d'un nombre qui n'a que quatre tranches, ne peut donc avoir cinq rangs.

Si l'on prend l'unité précedée de trois zero 1000, il eſt évident que la ſeconde puiſſance 1, 00, 00, 00 aura quatre tranches. Et 1000 étant le plus petit des nombres qui ont quatre rangs, & 1, 00, 00, 00 le plus petit de ceux qui ont quatre tranches, il eſt clair que la racine d'un nombre qui a quatre tranches, ne ſçauroit avoir moins de quatre rangs, puiſque ſi elle n'en avoit que trois, étant moindre que 1000, ſa 2ᵉ puiſſance ſeroit moindre que celle de 1000, laquelle eſt la moindre de 2ᵉˢ puiſſances qui ont quatre tranches.

Comme l'on n'a pris la 2ᵉ puiſſance & quatre tranches que pour rendre la démonſtration plus facile à entendre, & qu'on peut l'appliquer à toute puiſſance numerique d'autant de tranches qu'on voudra. Il eſt évident que la racine d'une puiſſance numerique doit avoir autant de caracteres que cette puiſſance a de tranches.

THEORÊME.

187. *LES termes de chaque formule des puiſſances ſervent à diſtinguer, dans les puiſſances numeriques ſemblables, les puiſſances des caracteres de la racine de ces puiſſances, & les autres produits de ces caracteres, repréſentez par les termes de la formule.*

Explication. Si l'on partage une puiſſance numerique quelconque en tranches, chacune d'autant de rangs que l'expoſant de la puiſſance contient d'unitez; (ſi c'eſt une 2ᵉ puiſſance, chaque tranche contiendra deux rangs, comme dans le pre-
* 178. mier exemple. * Si c'eſt une 3ᵉ puiſſance, chaque tranche con-
* 179. tiendra trois rangs, comme dans le 2ᵉ exemple; * ſi c'eſt une 5ᵉ puiſſance, chaque tranche contiendra cinq rangs, comme
* 181. dans le 3ᵉ exemple, * & ainſi des autres.) Si l'on prend enſuite dans la table des puiſſances la formule de cette puiſſance,

& qu'on suppose d'abord, 1°, que *a* de la formule représente le premier caractere le plus à gauche de la racine, & *b* le second; la puissance du dernier caractere représentée par la plus haute puissance de *a*, commencera à se trouver dans le dernier rang, c'est à dire le plus à droite de la tranche *A*, & dans les rangs qui sont plus à gauche, s'il y en a. Ainsi * le quarré du premier caractere 2, représenté par a^2, se trouve au dernier rang *q* de la tranche *A*. Le cube * du premier caractere 2 représenté par a^3, se trouve au dernier rang *r* de la tranche *A*. * la 5e puissance de 2 représentée par a^5, se trouve au dernier rang *t* de la tranche *A*. Il en est de même des autres puissances.

* 178. * 179. * 181.

Les produits représentez par les autres termes de la formule qui suivent la plus haute puissance de *a*, & qui sont les produits des puissances du premier & du second caractere représentez par *a* & *b*, se trouvent de suite dans la tranche *B*; sçavoir celui de la puissance de *a* moindre d'un degré que la plus haute, par *b*, dans le premier rang *p* de *B*. Le suivant où est b^2, dans le second rang *q* de *B*, le suivant où est b^3, dans le troisiéme rang *r* de *B*, & ainsi de suite, jusqu'à la puissance la plus haute de *b* seule sans *a*, qui est dans le dernier rang de *B*.

Ainsi dans le quarré, * $2ab$ est dans le rang *p* de la tranche *B*; b^2 est dans le rang *q* de *B*. Dans le cube, * $3a^2b$ est dans le rang *p* de *B*; $3ab^2$ est dans le rang *q* de *B*; b^3 est dans le rang *r* de *B*. Il en est de même des autres puissances.

* 178. * 179.

2°. Supposant ensuite que les deux premiers caracteres à gauche de la racine sont représentez par *a* de la formule, & le troisiéme par *b*; la plus haute puissance de *a*, qui est seule, représentera la puissance semblable des deux premiers caracteres contenue dans les tranches *A* & *B* de la maniere qu'on vient d'expliquer, & les produits suivans de la formule dans lesquels se trouve *b*, représenteront de suite les produits des puissances des deux premiers caracteres & du troisiéme, lesquels se trouvent aussi de suite dans les rangs *p*, *q*, *r*, &c. de la tranche *C*, de la maniere qui à été expliquée dans le premier article précedent.

3°. Enfin si l'on suppose de suite, par rapport aux tranches suivantes *D*, *E*, &c. que *a* de la formule représente les trois premiers caracteres de la racine, & *b* le quatriéme; après cela

que *a* repréſente les quatre premiers caractéres, & *b* le cinquiéme, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier caractere à droite de la racine *a*; la plus haute puiſſance ſeule de *a* repréſentera la puiſſance de tous les caracteres marquez par *a*, qui eſt contenue dans les tranches précedentes, & les autres produits des puiſſances de *a* & de *b* qui ſuivent dans la formule, repréſenteront les produits qui ſe trouvent de ſuite dans les rangs de la tranche *D*, ou *E*, ou *F*, *&c.* qui répond au caractere de la racine repréſenté par *b*, c'eſt à dire de la quatriéme, de la cinquiéme tranche, &c. ſi *b* repréſente le quatriéme, le cinquiéme caractere, &c. de la racine.

*81. Ce Theorême eſt une ſuite évidente des précedens, & * de la regle des rangs des produits de la multiplication.

Corollaire ſur la formation des puiſſances des nombres qui contiennent des grandeurs décimales.

188. COMME la multiplication des grandeurs décimales ne differe point de la multiplication des nombres entiers, & qu'il n'y a qu'à obſerver de marquer le point qui ſépare les parties décimales des entiers, ou qui marque l'endroit où commencent les parties décimales; il eſt evident que la formation des puiſſances des nombres qui contiennent des parties décimales, eſt entierement ſemblable à la formation des puiſſances des nombres entiers, & qu'il n'y a auſſi qu'à obſerver de marquer le point qui précede les parties décimales à l'endroit qui lui convient; ce qui ne renferme aucune difficulté. Les rangs des produits particuliers ſont les mêmes que ſi les nombres étoient entiers.

SECTION VI.

Où l'on explique la réſolution des puiſſances numeriques & litterales, ce qu'on nomme auſſi l'extraction des racines.

DÉFINITION.

189. LA racine quarrée d'un nombre quarré, la racine cubique d'un nombre cubique; en un mot la racine d'une puiſſance

laquelle racine a le même exposant que cette puissance, se nommera simplement la racine de cette puissance. L'on a déja dit que l'operation par laquelle on éleve une grandeur donnée à une puissance, s'appelle la formation des puissances. L'operation par laquelle on trouve la racine d'une puissance donnée, s'appelle l'*extraction des racines*, ou *la résolution des puissances*.

Quand la puissance donnée n'est pas parfaite, l'extraction des racines fait découvrir la grandeur qui est la racine de la plus grande puissance parfaite qui est contenue dans la puissance imparfaite. Ainsi si l'on cherchoit la plus grande racine cubique de 40, on trouveroit 3 pour la racine cubique de 27, 27 est le plus grand nombre cube contenu dans 40.

De l'extraction des racines numeriques.

DEMANDE OU SUPPOSITION.

190. On suppose que l'on sçait les puissances des neufs chifres, 1, 2, 3, &c. voici la table qui les contient.

Table des puissances des neuf chifres.

racines	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9
quarrez	1	4	9	16	25	36	49	64	81
cubes.	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4es puiss.	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5es puiss.	1	32	243	1024	3125	7776.	16807.	32768	59049
6es puiss.	1.	128.	2187.	16384.	78125.	279936.	823743.	2097152.	4782969

PROBLÊME.

191. *TROUVER la racine d'une puissance numeriquè quelconque, dont l'exposant peut être représenté par l'indeterminée* n, *qui marquera un nombre entier quelconque.*

REGLE *ou Operation*. 1°. Il faut partager la puissance numerique donnée en tranches chacune d'autant de rangs que l'exposant *n* de la puissance contient d'unitez, excepté celle qui sera la plus à gauche qui peut en avoir moins. C'est à dire, si l'on cherche la racine de la 2e puissance, chaque tranche doit contenir deux rangs; si l'on cherche la racine

de la 3e puissance, chaque tranche doit contenir trois rangs; si l'on cherche la racine de la 4e puissance, chaque tranche doit contenir quatre rangs; & ainsi des autres.

Le nombre des tranches sera connoître le nombre des cara-
*186. cteres ou des rangs de la racine qu'on cherche, puisque * la racine doit avoir autant de caracteres que l'on trouvera de tranches.

On tirera une petite ligne ou un petit arc vers la droite de la puissance numerique; la place de la racine sera au devant de cet arc. La premiere tranche *A* seule fera le premier membre de l'extraction : ce qui restera de la premiere tranche, après qu'on aura operé sur elle, étant joint avec la seconde tranche *B*, fera le second membre de l'extraction. Quand on aura operé sur le second membre, le reste qui en viendra étant joint avec la troisiéme tranche *C*, fera le 3e membre de l'extraction, & ainsi de suite. De maniere qu'il y aura autant de membres, de l'extraction, qu'il y a de tranches, & qu'il y a de caracteres dans la racine qu'on cherche, & autant d'operations à faire pour découvrir ces caracteres.

Après cela il faut prendre dans la table des puissances la formule de la puissance dont on veut extraire la racine, sçavoir $a^2 + 2ab + b^2$ si l'on veut tirer la racine quarrée, $a^3 + 3a^2b +$ &c. si l'on veut extraire la racine cubique ou 3e, & ainsi des autres. Cette formule servira de regle pour
*172. trouver la racine que l'on cherche, puisqu'elle représente *
& 187. par ordre tous les produits qui composent la puissance qu'on veut resoudre, & qui sont formez par les caracteres de la racine qu'on cherche.

La plus haute puissance de la formule, sçavoir a^2 pour la 2e puissance, a^3 pour la 3e, &c. servira à trouver le premier caractere vers la gauche de la racine qu'on cherche, en supposant que a représente ce premier caractere.

Pour trouver ce premier caractere representé par a, on prendra dans la table des puissances des neuf chifres la puissance du degré dont on cherche la racine, qui est la plus grande qui soit contenue dans la premiere tranche *A*, & on écrira celui des neuf chifres, qui en est la racine, à la place destinée pour la racine.

On retranchera la puissance de ce chifre représentée par la puissance de a dans la formule, on la retranchera, dis-je,

dis-je, de la tranche *A*, & l'on écrira le reste au dessous.

On appliquera chacun des articles de l'operation à un exemple pour le faire concevoir clairement à ceux qui commencent.

Par exemple, pour trouver la racine cubique ou 3e du nombre 12895213625, 1°. On le partagera en tranches chacune de trois rangs en commençant par la droite, & allant vers la gauche; la premiere tranche A *peut avoir moins de trois rangs. On tirera un arc vers la droite, & la place qui est au devant de cet arc sera celle où il faudra écrire les caracteres de la racine à mesure qu'on les découvrira. Les quatre tranches que l'on trouve* * *font déja connoître que la racine aura quatre caracteres.* * 186.

A	B	C	D	
qr,	pqr,	pqr,	pqr,	(la racine. 2 . . .
12,	895,	213,	625	
8				
4, 8				

On prendra pour regle de l'operation la formule $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. *Et supposant que* a *represente le premier caractere à gauche de la racine,* a^3 *marque que, pour le trouver, il faut prendre parmi les cubes des neuf chifres, le cube* 8 *qui est le plus grand cube contenu dans la tranche* A. *En écrire la racine cubique* 2 *à la place destinée pour la racine, & retrancher* 8 *cube de* 2, *de la tranche* A, *& écrire le reste* 4 *au dessous de cette tranche. On sçait déja par cette premiere Operation que* 2 *précedé de trois rangs est le premier caractere de la racine qu'on cherche.*

On remarquera que la plus haute puissance a^3 de la formule ne sert que pour trouver le premier caractere ou celui dont la puissance est contenue dans la premiere tranche *A*. Et que les autres produits de la formule d'une puissance dans lesquels se trouve *b*, sont ceux qui doivent servir seuls de regle (sans la plus haute puissance de *a*) pour découvrir dans chaque tranche, par le moyen de la division, le caractere de la racine qui a rapport à cette tranche, comme on le va voir dans les articles suivans de l'operation.

2°. Il faut descendre le chifre *p* le plus à gauche de la 2e tranche *B* au devant du reste qu'a donné la premiere operation; ce reste joint au caractere *p* sera consideré comme un dividende. Il faut supposer que *a* de la formule represente le premier caractere de la racine déja découvert, que *b* represente le second caractere que l'on cherche, * & que le * 174

177 & 187 dividende eſt repréſenté par le premier des produits de la formule, dans lequel b eſt lineaire. Ainſi pour trouver le ſecond caractere repréſenté par b, il faut prendre le produit du premier caractere déja trouvé, qui eſt repréſenté par le premier des produits de la formule du même degré, dans lequel b eſt lineaire, diviſé par b, c'eſt à dire, ſans b; ce produit eſt repréſenté par $2a$ pour le quarré, par $3a^2$ pour la 3[e] puiſſance, par $4a^3$ pour la 4[e], & ainſi des autres: & diviſer le dividende par ce produit, le quotient qu'on trouvera ſera le ſecond caractere de la racine répréſenté par b de la formule.

Il faut former à part tous les produits, des deux premiers caracteres déja découverts, qui ſont repréſentez par ceux de la formule du degré de la puiſſance numerique, dont on cherche la racine.

Ajouter ces produits dans une ſomme, obſervant qu'ils ſoient placez dans les rangs qui leur conviennent; & après avoir écrit au devant du dividende tous les chifres q, r, $ſ$, *&c.* qui reſtent dans la tranche B, ce qui ſera le ſecond membre de l'extraction, il faut retrancher de ce ſecond membre la ſomme des produits, & écrire le reſte au deſſous.

$2 = a$

	A	*B*	*C*	*D*		
	qr,	pqr,	pqr,	pqr	la raciné.	$12 = 3a^2$ divis. du 2. m
	12,	895,	213,	625	23..	$3 = b$
	8					$3600 = 3a^2b$
2. membre.	4,	895				$540 = 3ab^2$
	4,	167				$27 = b^3$
		728,				$4167 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Dans notre exemple il faut tranſporter 8, *premier chifre à gauche de la tranche* B, *devant le reſte* 4 *de la premiere operation: &* 48 *ſera conſideré comme un dividende: & ſuppoſant que* a *de la formule repréſente le premier chifre* 2 *de la racine, & que*
* 187. b *repréſente le ſecond qu'on cherche,* * *le dividende* 48 *doit contenir le produit repréſenté par* $3a^2b$, *qui eſt formé par* $3a^2$ *multiplié par* b. *Dans ce produit le ſecond caractere de la racine repréſenté par* b *eſt inconnu, & c'eſt celui qu'on cherche; mais* 2 *repréſenté par* a *étant connu, il faut former le produit repréſenté*

par $3a^2$ *sans* b, *& l'on aura* $3 \times 4 = 12 = 3a^2$, *que l'on prendra pour diviseur. Il faut diviser le dividende* 48 *par* $12 = 3a^2$. *Et le quotient qui est* 3 (*car on verra bientôt que si l'on prenoit* 4 *pour le quotient, on trouveroit qu'il seroit trop grand*) *est le second caractere de la racine que l'on cherche, qui est représenté par* b; *il faut écrire* 3 *à la racine devant* 2.

Il faut ensuite former à part les trois produits représentez par $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, *& l'on trouvera* $3600 + 540 + 27$, *qu'il faut écrire les uns sous les autres dans les rangs qui leur conviennent; les ajouter ensemble, & après avoir écrit les chifres* 9 *&* 5 *de la tranche* B *devant le dividende pour en composer le second membre* 4, 895, *retrancher de ce membre la somme* 4167 *des produits, & marquer le reste* 728 *au dessous, & la partie de l'operation qui fait découvrir les deux premiers caracteres de la racine qu'on cherche est achevée.*

3°. Il faut transporter le premier chifre à gauche *p* de la troisiéme tranche C devant le reste qu'on a trouvé par l'operation précedente, & ce reste joint au caractere *p* sera consideré comme un dividende. Il faut supposer les deux premiers caracteres de la racine déja découverts représentez par *a* de la formule, & le troisiéme caractere qu'on cherche représenté par *b* de la formule, & former le produit des deux premiers représenté par le produit de la formule, dans lequel *b* est lineaire, sans pourtant que *b*, qui est inconnu, soit dans ce produit; c'est à dire, il faut former le produit des deux premiers caracteres, regardez comme une seule grandeur, représenté par $2a$ dans le quarré, par $3a^2$ dans la 3e puissance, & ainsi des autres; diviser le dividende par ce produit, & écrire le quotient de cette division à la racine pour son troisiéme caractere.

Il faut former à part les produits des deux premiers caracteres (marquez par *a*) & du troisiéme (marqué par *b*) qui sont représentez par les produits de la formule.

Ajouter ces produits dans une somme, observant qu'ils soient placez dans les rangs qui leur conviennent.

Après avoir ajouté devant le dividende les caracteres *q*, *r*, *s*, *&c.* qui restent dans la troisiéme tranche C, ce qui fera le troisiéme membre de l'extraction, il faut ôter de ce membre la somme des produits, & écrire le reste au dessous.

Dans notre exemple il faut abaisser le premier chifre à gauche

	A B C D		Pour le second membre.
	gr, pqr, pqr, pqr.	la racine.	$2 = a$
	12,895,213,625	234	$12 = 3a^2$ Divis. du 2. m.
	8		$3 = b$
2. memb.	4,895		$4167 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	4 167		Pour le troisiéme membre.
3. memb.	728,213		$23 = a$
	645 904		$1587 = 3a^2$ Divis. du 3. m.
	82 309		$4 = b$
			$634800 = 3a^2b$
			$11040 = 3ab^2$
			$64 = b^3$
			$645904 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2 de la troisiéme tranche C *devant le reste 728 de l'operation precedente, & 7282 sera regardé comme un dividende. Il faut supposer que les deux premiers chifres 23 de la racine déja découverts sont représentez par* a *de la formule, & que le troisiéme cara-*
* 187. *ctere qu'on cherche est représenté par* b. * *Et comme le dividende 7282 contient le produit représenté par* $3a^2b$, *il faut former le produit représenté par* $3a^2$, *que l'on trouvera être* $1587 = 3a^2$, *le prendre pour diviseur; diviser 7282 par 1587. Le quotient 4 que l'on trouvera, est le troisiéme caractere de la racine que l'on cherche, qui est représenté par* b *de la formule. Il faut l'écrire à la racine au devant de 23.*

Il faut ensuite former à part les produits représentez par $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, *& l'on trouvera* $634800 + 11040 + 64 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. *Il faut les écrire les uns sous les autres dans les rangs qui leur conviennent. On les ajoutera ensemble; & aprés avoir transporté les chifres 1 & 3 qui restoient dans la tranche* C, *au devant du dividende, pour rendre complet le troisiéme membre de l'extraction, on ôtera de ce membre 728213 la somme des produits 645904, & on écrira le reste 82309 au dessous: & la partie de l'operation qui fait découvrir les trois premiers caracteres de la racine est achevée.*

4°. Quand la puiſſance numerique, dont on cherche la racine, a beaucoup de tranches, on trouvera de ſuite le quatriéme caractere de la racine, le cinquiéme, le ſixiéme, & les autres ſuivans juſqu'au dernier, de la même maniere qu'on a trouvé le troiſiéme; en ſuppoſant pour découvrir de ſuite chacun de ces caracteres, que dans les produits de la formule, *a* repréſente tous les caracteres déja découverts, & que *b* repréſente le caractere qu'on cherche, qui eſt celui qui les ſuit; & employant les produits de la formule pour le découvrir, comme on l'a expliqué dans le troiſiéme article qui précede; & quand on aura operé ſur la derniere tranche à droite, l'operation ſera achevée; & ſi l'on ne trouve aucun reſte, c'eſt à dire, ſi après la derniere operation il reſte zero, la puiſſance numerique eſt *parfaite*, & la racine qu'on a découverte en eſt la racine exacte; ſi l'on trouve un reſte, la racine découverte eſt la racine de la plus grande puiſſance parfaite du même degré, qui eſt contenue dans la puiſſance numerique imparfaite propoſée; c'eſt à dire, le nombre propoſé étant diminué de ce reſte, eſt la puiſſance numerique parfaite de la racine qu'on a trouvée.

A B C D

qr, *pqr*, *pqr*, *pqr*, { la racine. 2345

12,895,213,625

8 $= a^3$

2. memb. 4,895

4 167 $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

3. memb. 728,213

645 904 $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

4. memb. 82 309,625

82 309,625 $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

00,000,000

Pour le ſecond membre.

$2 = a$

$12 = 3a^2$ diviſ. du 2. m.

$3 = b$

$4167 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pour le troiſiéme membre.

$23 = a$

$1587 = 3a^2$ diviſ. du 3. m.

$4 = b$

$645904 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pour le quatriéme membre.

$234 = a$

$164268 = 3a^2$ diviſ. du 4. m.

$5 = b$

$82134000 = 3a^2b$

$175500 = 3ab^2$

$125 = b^3$

$82309625 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

3.

194. Dans chaque tranche le dividende eſt toujours le reſte de l'operation précedente joint au premier chifre à gauche de cette tranche-là; le membre de l'extraction de cette tranche eſt le dividende joint à tous les caracteres qui reſtoient dans cette tranche-là. Dans la pratique on tranſporte ordinairement toute la tranche ſur laquelle on va operer au devant du reſte de l'operation précedente, ce qui fait le membre ſur lequel on va operer, & l'on met un point ſous le chifre de ce membre, qui eſt le premier à gauche de la tranche qu'on a tranſportée, pour marquer que le dividende de ce membre ne commence qu'à ce chifre-là. On tranche auſſi par une petite ligne chaque chifre de la tranche tranſportée, ou bien on marque des points au deſſous des chifres de cette tranche, pour faire ſouvenir qu'on a operé ſur cette tranche. Le diviſeur eſt toujours le double de tous les caracteres déja découverts pour la racine quarrée; le triple de la 2e puiſſance de la ſomme des caracteres déja découverts pour la racine cubique ou 3e, le quadruple de la 3e puiſſance de la ſomme des caracteres déja découverts pour la racine 4e, le quintuple de la 4e puiſſance de la ſomme des caracteres déja découverts pour la racine 5e, & ainſi de ſuite. Le caractere de la tranche ou du membre ſur lequel on opere, ſe trouve en faiſant la diviſion du dividende de ce membre par ſon diviſeur, & prenant le quotient de la diviſion pour ce caractere. Mais il arrive ſouvent qu'il eſt trop grand; c'eſt pourquoi avant de l'écrire à la racine, il faut former les produits que preſcrit la formule pour ce membre-là; & ſi l'on trouve que la ſomme de ces produits eſt contenue dans ce membre-là, il faut écrire à la racine le quotient qu'on a trouvé; ſi la ſomme de ces produits ſurpaſſe ce membre-là, ce qui arrive ſouvent, il faut diminuer le quotient de 1, 2, 3, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que la ſomme des produits que preſcrit la formule, ſoit contenue dans le membre ſur lequel on opere; & le quotient ainſi diminué ſera le caractere qui convient à la tranche ſur laquelle on opere. Et l'on remarquera que quand même la ſomme des produits ſe trouveroit préciſément égale au membre ſur lequel on opere, & qu'en l'ôtant de ce membre il ne reſteroit rien, le quotient n'en ſeroit pas

moins le caractere de cette tranche, & qu'ainsi, pourvû que la somme des produits prescrits par la formule puisse être retranchée du membre sur lequel on opere, le quotient ne sçauroit être trop grand.

4.

195. Si le diviseur d'une tranche n'étoit pas même contenu une fois dans le dividende, ou si y étant contenu une fois la somme des produits prescrits par la formule étoit plus grande que le membre sur lequel on opere, il faudroit écrire zero à la racine pour le caractere de cette tranche-là, & l'operation seroit finie pour cette tranche; il faudroit abbaisser le premier chifre à gauche de la tranche suivante devant le membre qui à donné zero pour la racine, & ce membre joint à ce premier chifre seroit le dividende de la tranche suivante : l'on peut même trouver plusieurs zeros de suite pour les caracteres de la racine.

5.

196. Lorsqu'on cherche la racine d'un nombre, qui est telle que son exposant a des nombres entiers pour diviseurs exacts, dont le produit forme cet exposant; on pourroit bien trouver cette racine par la formule qui lui convient; mais il est bien plus facile de trouver la racine du nombre proposé, en cherchant d'abord la racine de ce nombre marquée par l'un des diviseurs exacts, en commençant par le plus simple; puis la racine du nombre qu'on vient de trouver pour racine, qui est marquée par le diviseur suivant; ensuite la racine du nombre qu'on vient de découvrir, qui est marquée par le diviseur suivant, & continuer ainsi jusqu'à la racine qui est marquée par le dernier des diviseurs exacts, dont le produit forme l'exposant de la racine qu'on cherche. Par exemple, si l'on veut la racine 4e d'un nombre, l'exposant de cette racine étant $4 = 2 \times 2$, il faut d'abord chercher la racine 2e du nombre proposé, puis la racine 2e de la racine qu'on vient
* 180. de trouver : * cette derniere sera la racine 4e du nombre proposé. De même si l'on veut la racine 6e d'un nombre proposé, l'exposant étant $6 = 2 \times 3$, il faut d'abord chercher la racine 2e du nombre proposé, & ensuite la racine 3e de la racine précedente, & cette racine 3e sera la racine 6e du nombre proposé.

Si

Si l'on veut la racine 8ᵉ; l'exposant étant $8 = 2 \times 2 \times 2$, il faut d'abord chercher la racine 2ᵉ du nombre proposé, puis la racine 2ᵉ de la racine precedente; & enfin la racine 2ᵉ de la précedente. Cette derniere * sera la racine 8ᵉ qu'on cherchoit. * 180.

Si l'on veut la racine 12ᵉ, l'exposant étant $12 = 2 \times 2 \times 3$, il faut d'abord chercher la racine 2ᵉ, puis la racine 2ᵉ de la précedente, & enfin la racine 3ᵉ de la précedente. Cette derniere * sera la racine 12ᵉ qu'on cherchoit. Il en est de même des autres racines dont les exposans ont des nombres entiers pour diviseurs exacts. * 180.

Application du Problême à des exemples.

I.

Exemples de l'extraction de la racine quarrée.

AVERTISSEMENT.

L'EXTRACTION de la racine quarrée ou 2ᵉ est plus d'usage dans les Mathematiques que l'extraction des racines dont les exposans sont plus élevez; c'est pourquoi on en va donner la pratique qui paroît la plus facile de toutes, & qui est cependant déduite de la formule $a^2 + 2ab + b^2$.

Pratique qui paroît la plus facile de l'extraction de la racine quarrée.

ON partage le nombre, dont on cherche la racine quarrée, en tranches, chacune de deux rangs, allant de la droite à la gauche: la tranche la plus à gauche peut n'avoir qu'un caractere.

On tire un arc à la droite du nombre proposé, & la place qui est au haut de cette arc sera celle de la racine qu'on veut trouver.

On cherche par le moyen de la table *de l'article* 190 quel est le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche *A*. On en écrit la racine à la place qui lui est destinée, pour le premier caractere de la racine qu'on cherche. On retranche le quarré de cette racine de la tranche *A*; & l'on écrit le reste au dessous. On abbaisse la tranche *B* au devant du reste qu'on vient d'écrire, c'est le second membre de l'extraction.

On marque un point ſous celui des chiſres de la tranche *B* qu'on vient d'abbaiſſer, qui eſt le plus à gauche, & le reſte joint à ce chiſre eſt le dividende de ce membre. On diſtingue de la même maniere le dividende de chacun des membres ſuivans.

Pour avoir le diviſeur de chaque membre, on multiplie les caracteres de la racine déja découverts par 2, & on en écrit le produit au deſſous de la racine, c'eſt le diviſeur de ce membre; c'eſt à dire, on écrit le double des caracteres déja découverts, & ce double eſt le diviſeur du membre ſur lequel on opere.

On cherche combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende, & l'on écrit le quotient qui marque ce nombre de fois, au devant des caracteres de la racine qui ſont déja découverts, & on l'écrit encore au devant du diviſeur.

On multiplie par le quotient qu'on vient de trouver le diviſeur augmenté, comme on l'a dit, du même quotient, & à meſure qu'on fait cette multiplication, ſans l'écrire, on retranche les produits particuliers qu'on trouve, du membre ſur lequel on opere, comme dans la pratique abregée de la diviſion, & on écrit le reſte au deſſous du membre ſur lequel on opere.

On continue cette maniere d'operer ſur toutes les tranches; & quand on a operé ſur la derniere, l'operation eſt achevée, & le nombre que l'on a écrit à la racine, eſt la racine quarrée du nombre propoſé que l'on cherchoit.

I. EXEMPLE.

	A B C D	racine.	$2 = a$ } Pour le 1. membre.
	5, 49, 90, 25	2345	$3 = b$ }
	4		
2. membre.	1 49		$43 = 2a + b$
3. membre.	20 90		$464 = 2a + b$
4. membre.	2 34 25		$4685 = 2a + b$
reſte.	0 00 00		

Pour extraire la racine quarrée du nombre 5499025, 1°, on le partage en tranches chacune de deux caracteres allant de droite à gauche, & la tranche la plus à gauche n'a que le

ſeul chifre 5. Comme il y a quatre tranches, la racine doit avoir quatre caractéres. On trouve le premier en conſiderant que 4 eſt le plus grand quarré contenu dans 5 qui fait la tranche A. On écrit la racine du quarré 4, qui eſt $2 = a$, à la racine, & l'on retranche 4 quarré du premier caractere 2, de 5, & l'on écrit le reſte 1 au deſſous.

2°. Pour trouver le ſecond caractere repréſenté par b, on abbaiſſe la ſeconde tranche B devant le reſte 1, & l'on a le ſecond membre 149. On marque un point ſous 4 pour diſtinguer le dividende qui eſt 14. On écrit le double du premier caractere $2 = a$, lequel double de 2 eſt $4 = 2a$, ſous la racine : c'eſt le diviſeur de ce membre.

On dit enſuite combien de fois le diviſeur 4 eſt-il dans le dividende 14? On trouve qu'il y eſt 3 fois. On écrit $3 = b$ à la racine, & encore au devant du diviſeur 4.

Puis on multiplie $43 = 2a + b$ par $3 = b$, & en même temps l'on ôte le produit $129 = 2ab + b^2$ du membre 149, ſans rien écrire que le reſte, de cette maniere. $3 \times 3 = 9$, ôtant 9 de 9 il reſte o. On écrit o ſous 9. Puis on dit $3 \times 4 = 12$; $14 - 12 = 2$, on écrit 2 ſous 4, & l'operation du ſecond membre eſt finie, & le reſte eſt 20.

3°. On abbaiſſe devant le reſte 20 la tranche C, c'eſt à dire 90, & l'on a le troiſiéme membre 2090, on marque un point ſous 9, & le dividende eſt 209. On multiplie les deux caracteres déja découverts $23 = a$ par 2, & l'on écrit le produit $46 = 2a$ ſous le diviſeur du membre précedent, & c'eſt le diviſeur du troiſiéme membre. Comme le diviſeur $46 = 2a$ a deux rangs, on conçoit que 6 eſt ſous 9 du dividende, & 4 ſous o. Et l'on dit combien de fois 4 eſt-il dans 20? Il y eſt 5 fois; mais voyant que 5×46 ſurpaſſeroit le dividende 209, on ne prend que 4 pour quotient. On écrit $4 = b$ à la racine, & encore au devant du diviſeur 46, ce qui fait $464 = 2a + b$. On multiplie $464 = 2a + b$ par $4 = b$, ce qui fait $1856 = 2ab + b^2$, & on retranche 1856 du troiſiéme membrè 2090, & l'on écrit le reſte 234 au deſſous. Cette multiplication & cette ſouſtraction ſe font en même temps de cette façon. $4 \times 4 = 16$. On ne peut ôter 16 de o; mais ôtant 16 de 20, il reſte 4, qu'on écrit au deſſous de o, & on retient 2. Puis on dit $4 \times 6 = 24$, & 2 qu'on retenoit, cela fait 26. On ôte 26 de 29, & l'on écrit le reſte 3 ſous 9, &

on retient 2. Enfin l'on dit $4 \times 4 = 16$, $+ 2 = 18$; or $20 - 18 = 2$. On écrit 2 ſous 0, & l'operation de ce membre eſt finie, le reſte eſt 234.

4°. On abbaiſſe la tranche D, c'eſt à dire 25 devant 234, cela fait le quatriéme membre 23425. On marque un point ſous 2 pour diſtinguer le dividende 2342. On multiplie les trois caractéres $234 = a$ déja découverts par 2, & l'on écrit le produit $468 = 2a$ pour diviſeur de ce membre ſous le diviſeur du précedent.

On conçoit que le diviſeur 468 eſt ſous le dividende 2342, & l'on dit combien de fois 4 eſt-il dans 23? On trouve qu'il y eſt 5 fois. On écrit $5 = b$ à la racine, & encore devant le diviſeur, ce qui fait $4685 = 2a + b$. On le multiplie par $5 = b$, & l'on ôte le produit $23425 = 2ab + b^2$ du membre 23425, & il ne reſte rien. Cela ſe fait en même temps de cette façon. $5 \times 5 = 25$. $25 - 25 = 0$, on écrit 0 ſous 5, & on retient 2. Puis on dit $5 \times 8 = 40$, $40 + 2 = 42$. $42 - 42 = 0$, on écrit 0 ſous 2, & on retient 4. Après on dit $5 \times 6 = 30$, $30 + 4 = 34$. $34 - 34 = 0$, on écrit 0 ſous 4, & on retient 3. Enfin $5 \times 4 = 20$, $20 + 3 = 23$. $23 - 23 = 0$. On écrit ſi l'on veut 0 ſous 23.

L'operation ayant été faite ſur le dernier membre, elle eſt achevée, & comme le dernier reſte eſt 0; 2345 eſt la racine exacte du nombre propoſée 5499025 qui eſt un quarré parfait.

On a marqué dans ce premier exemple le rapport de chaque operation à la formule, pour faire voir que la methode dont on s'eſt ſervi revient à celle du Problême. Pour abreger, on ne marquera plus ce rapport de la formule dans les exemples ſuivans.

II. EXEMPLE.

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	racine. 2700300	
7,	29,	16,	20,	09,	00,	00,		
3	29						47	Diviſeurs.
0	00	16	20	09			54	
		00	00	00			540	
							54003	

Pour trouver la racine quarrée du nombre 7291620090000,

1°. On le partagera en tranches chacune de deux rangs, excepté celle qui eſt à gauche; & s'en trouvant ſept, il y aura ſept caracteres dans la racine. Pour avoir le premier caractere, on dira, le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche à gauche, c'eſt à dire dans 7 eſt 4, dont la racine 2 doit être le premier caractere de la racine qu'on cherche. Il faut écrire 2 à la racine, & retrancher 4 quarré de 2, de 7, & écrire le reſte 3 ſous la premiere tranche.

2°. Il faut tranſporter la ſeconde tranche 29 au devant du reſte, ce qui fera le ſecond membre 329, & marquer un point ſous 2, pour diſtinguer le dividende 32. Il faut auſſi doubler le caractere 2 déja découvert, & écrire 4 pour le diviſeur du ſecond membre: & dire le diviſeur 4 eſt contenu 8 fois dans le dividende 32. Mais pour examiner, avant d'écrire le quotient 8 à la racine, s'il n'eſt point trop grand, il faut imaginer 8 écrit à la racine & devant le diviſeur, & faire par la penſée la multiplication de 48 par 8, en commençant de gauche à droite, & faire en même temps la ſouſtraction, en diſant $8 \times 4 = 32$, $32 - 32 = 0$, ainſi il ne reſteroit que 9 dans le ſecond membre; & diſant $8 \times 8 = 64$; mais 64 ne peut pas ſe retrancher de 9, étant plus grand. Cette operation faite par la ſeule penſée, fait connoître que 8 eſt trop grand; ainſi il ne faut écrire que 7 à la racine, & encore devant le diviſeur 4; & dire $7 \times 7 = 49$. $49 - 49 = 0$, on écrit le reſte 0 ſous 9, & on retient 4 dixaines ajoutées à 9 pour le faire valoir 49, & l'on dit $7 \times 4 = 28$. $28 + 4$ qu'on retenoit $= 32$. $32 - 32 = 0$; on écrit le reſte 0 ſous 2 & ſous 3, & le reſte de ce membre n'eſt que 0.

3°. On tranſporte la troiſiéme tranche 16 devant le reſte précedent, on marque un point ſous le chifre 1 pour diſtinguer le dividende, & l'on écrit pour diviſeur $2 \times 27 = 54$. Mais appercevant que 54 n'eſt point contenu dans le dividende 1, on écrit 0 à la racine, & l'operation de ce troiſiéme membre eſt achevée.

4°. On tranſporte la quatriéme tranche 20 devant le membre précedent, & l'on a 1620 pour le quatriéme membre, on marque un point ſous 2, pour diſtinguer le dividende 162, & l'on écrit pour diviſeur $2 \times 270 = 540$. Mais voyant que ce diviſeur ſurpaſſe le dividende 162, on écrit 0 à la racine pour ſon quatriéme caractere, & l'operation du quatriéme membre eſt achevée.

5°. On abbaiſſe la cinquiéme tranche 09 devant le membre précedent, ce qui fait le cinquiéme membre 162009. On marque un point ſous 0, qui eſt le premier caractere à gauche de la cinquiéme tranche abbaiſſée, pour diſtinguer le dividende 16200. On écrit $2 \times 2700 = 5400$ pour le diviſeur de ce membre : & imaginant ce diviſeur ſous le dividende, le chifre 5 du diviſeur ſe trouve ſous 16 du dividende : & l'on dit 5 eſt 3 fois dans 16 ; ainſi il faut mettre le quotient 3 à la racine & encore au devant du diviſeur, & dire $3 \times 3 = 9$. $9 - 9 = 0$. On écrit le reſte 0 ſous 9. Puis on dit $3 \times 0 = 0$, $0 - 0 = 0$, on écrit le reſte 0 ſous 0 du dividende, & l'on dit $3 \times 0 = 0$, $0 - 0 = 0$, on écrit le reſte 0 ſous 0 du dividende : & l'on dit $3 \times 4 = 12$, $12 - 12 = 0$, on écrit le reſte 0 ſous 2, & l'on retient 1. Enfin l'on dit $3 \times 5 = 15$, $15 + 1$ qu'on retenoit $= 16$, $16 - 16 = 0$, on écrit le reſte 0 ſous 16. Ainſi l'operation du cinquiéme membre eſt achevée, & le reſte eſt 0.

6°. Le dernier reſte étant 0, & n'y ayant plus que des zeros dans les tranches ſuivantes, il eſt inutile de faire des operations pour ces tranches, par leſquelles on ne trouveroit que 0 pour le caractere de chaque tranche ; il ſuffit d'écrire au devant des caracteres de la racine déja découverts autant de zeros qu'il reſte de tranches ; ſçavoir un zero pour le caractere de chacune de ces tranches, & l'operation ſera entierement achevée. 2700300 eſt la racine quarrée exacte du nombre propoſé 7291620090000.

III. EXEMPLE.

On trouvera de la même maniere la racine quarrée du nombre 3433923. 1°. Après l'avoir partagé en tranches, on dira le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche à gauche 3 eſt 1. La racine quarré de 1 eſt 1. Il faut écrire 1 pour le premier caractere de la racine, & retrancher le quarré 1, de la tranche 3, & écrire au deſſous le reſte 2.

```
 ..  ..  ..
3,43,39,23     ( racine.
               ( 1853
2 43
                 28   }
  19 39          365  } Diviſ.
                 3703 }
  11 42 3
reſte 31 4
```

2°. On abbaiſſera la ſeconde tranche 43 devant le reſte 2,

ce qui fera le ſecond membre 243, on mettra un point ſous 4 pour diſtinguer le dividende 24. On écrira 2, double du premier caractere 1, pour le diviſeur du ſecond membre. Et l'on dira combien de fois le diviſeur 2 eſt-il contenu dans dividende 24 ? Il y eſt 12 fois; mais on ne peut écrire que 9: & faiſant l'operation par la penſée, comme dans l'article ſecond de l'exemple précedent, pour éprouver ſi le quotient 9 n'eſt point trop grand, on trouvera qu'on ne peut écrire que 8 pour le ſecond caractere de la racine; on écrira encore 8 au devant du diviſeur 2. Puis on multipliera 28 par 8, & on retranchera du ſecond membre 243 le produit à meſure qu'on le formera, & l'on écrira le reſte 19 au deſſous du ſecond membre.

3°. On tranſportera la troiſiéme tranche 39 devant le reſte 19, & l'on aura le troiſiéme membre 1939. On diſtinguera par un point ſous 3 le dividende 193. On écrira auſſi le diviſeur $2 \times 18 = 36$; & l'on trouvera en faiſant l'épreuve qu'on ne doit écrire que 5 pour le troiſiéme caractere de la racine, on l'écrira encore devant le diviſeur 36, & l'on ôtera le produit 5×365, du troiſiéme membre 1939, & l'on écrira le reſte 114 au deſſous.

4°. On deſcendra la derniere tranche 23 au devant du reſte 114, ce qui donnera le quatriéme & dernier membre 11423. On diſtinguera par un point le dividende 1142. On formera le diviſeur $2 \times 185 = 370$. On trouvera que le quotient eſt 3. On l'écrira pour le dernier caractere de la racine, & encore au devant du diviſeur 370. On retranchera le produit 3×3703 du dernier membre 11423, & l'on écrira au deſſous le reſte 314.

Le reſte 314 fait voir que le nombre propoſé 2433923, n'eſt pas un quarré parfait. La racine trouvée 1853 eſt la racine du plus grand quarré parfait contenu dans le nombre propoſé, lequel quarré eſt 3433609; c'eſt à dire le nombre propoſé diminué du reſte 314.

La Methode pour extraire les racines des nombres qui contiennent des parties décimales.

197. L'EXTRACTION des racines des nombres qui contiennent des parties décimales, ſe fait de la même maniere que l'extraction des racines des nombres entiers. Il faut ſeule-

ment obſerver, 1°. Quand le nombre propoſé contient des nombres entiers & des parties décimales, d'extraire d'abord la racine des entiers, comme s'ils étoient ſeuls, en les diſtinguant en tranches, comme s'il n'y avoit que ces entiers, & d'ajouter aux tranches des entiers les tranches des parties décimales du nombre propoſé, faiſant la diſtinction de ces tranches des parties décimales en allant de gauche à droite. Par exemple, ſi l'on propoſe de trouver la racine quarrée de 13.242321, les entiers 13 n'occupant que deux rangs, il en faut faire une tranche comme s'ils étoient ſeuls, & diſtinguer enſuite les tranches des parties décimales chacune de deux rangs en allant de gauche à droite de cette maniere 13., 24, 23, 21. Et ſi la derniere tranche à droite n'avoit qu'un caractere, par exemple, le ſeul caractere 2, il faudroit ajouter un 0. pour la faire de deux rangs. Si dans le nombre propoſé il y avoit eu trois rangs de nombres entiers comme dans 132 42321, il auroit fallu faire deux tranches des ſeuls nombres entiers, & ajouter à ces tranches celles des parties décimales de cette maniere 1, 32., 42, 32, 10. S'il falloit trouver la racine cubique ou 3e de 1324 . 2321 où les entiers 1324 occupent quatre rangs, il en faudroit diſtinguer les tranches comme on le voit ici 1, 324., 232, 100; c'eſt à dire, il faudroit diſtinguer les tranches des entiers comme s'ils étoient ſeuls, & y ajouter les tranches des parties décimales chacune de trois rangs.

2°. On remarquera que le point qui diſtinguera dans la racine les parties décimales des entiers, doit être placé immédiatement après les caracteres de la racine des entiers.

3°. Quand le nombre dont on veut extraire la racine ne contient que des parties décimales ſans entiers, il faut commencer la diſtinction des tranches par la gauche en allant vers la droite; & pour faire mieux concevoir aux Commençans la maniere de diſtinguer les tranches, on ſuppoſera toujours que zero qui eſt au devant du point qui ſepare les parties décimales d'avec les entiers qui ſont repréſentez par zero quand il n'y en a point, que ce zero, dis-je, qui repréſente la place des entiers, doit faire la premiere tranche, laquelle ne donnera pour la racine que zero : la tranche ſuivante en allant de gauche à droite, doit contenir deux rangs quand on cherche la racine quarrée; trois rangs quand on cherche

cherche la racine 3ᵉ; quatre rangs quand on cherche la racine 4ᵉ, & ainsi de suite. Les tranches suivantes vers la droite doivent contenir chacune autant de rangs que la précedente, & quand la derniere à droite en contient moins, il faut lui donner le même nombre de rangs en lui ajoutant des zeros.

Par exemple, si l'on veut trouver la racine quarrée de o. 13242321, on distinguera ainsi les tranches o., 13, 24, 23, 21. Si l'on veut chercher la racine quarrée de o. 013242321, on en distinguera ainsi les tranches o., 01, 32, 42, 32, 10. Si l'on cherche la racine quarrée de o. 00013242321, on en distinguera ainsi les tranches o., 00, 01, 32, 42, 32, 10.

Si l'on cherche la racine 3ᵉ de o. 13242321, on en distinguera ainsi les tranches o., 132, 423, 210. Si c'est la racine 3ᵉ de o. 013242321, on en distinguera ainsi les tranches o., 013, 242, 321. Si l'on veut la racine 3ᵉ de o 0013242321, on le distinguera ainsi en tranches o., 001, 324, 232, 100. Si l'on cherche la racine 3ᵉ de o. 0000013242321, on en marquera ainsi les tranches o., 000, 001, 324, 232, 100. Il en est de même des autres.

Il faut d'abord écrire o dans la racine pour représenter la racine des entiers, & marquer ensuite à droite de ce o le point qui separe les parties décimales de la racine d'avec les entiers; & quand il y a encore des tranches de zeros, comme dans o., 000, 000, 001, 324, 232, 100, il faut marquer à la racine un o pour chaque tranche qui ne contient que des zeros sans chifre, & commencer l'operation à la tranche qui contient quelque chifre; dans cet exemple on la commencera à la tranche 001.

IV. EXEMPLE.

Qui contient des parties décimales.

```
      .   .   .   .
    13., 24, 23, 21   { racine.
     4   24           { 3.639
         28  23          66  }
          6  54  21      723 } diviseurs.
                         7269}
reste.    0  00  00
```

POUR trouver la racine quarrée du nombre 13.242321, 1°. On le partagera en tranches suivant la methode d'extraire

les racines des nombres qui ont des parties décimales, comme on le voit dans l'exemple. Ensuite on dira, 1°. Le plus grand quarré contenu en 13 est 9, sa racine est 3, qu'on écrira à la racine, & on marquera au devant de ce 3 le point qui doit séparer les parties décimales. On retranchera 9, quarré de 3, de 13, & on écrira le reste 4.

2°. On abbaissera 24 devant le reste 4, & le second membre sera 424. On distinguera le dividende 42 par un point sous 2, & on doublera 3 de la racine pour avoir le diviseur 6. Puis on dira 6 est 7 fois dans 42; mais faisant l'épreuve par la pensée, on trouvera qu'il ne faut écrire que 6 à la racine & encore au devant du diviseur; on ôtera le produit 6 x 66 de 424, & on écrira le reste 28 au dessous.

3°. On transportera 23 devant le reste, l'on distinguera par un point dans le troisiéme membre 2823, le dividende 282; on écrira 2 x 36 = 72 pour diviseur; & ayant trouvé le quotient 3, on l'écrira à la racine & encore au devant du diviseur. On ôtera 3 x 723, de 2823, & l'on écrira le reste 654 au dessous.

4°. On descendra 21 devant le reste précedent, & on distinguera par un point dans le quatriéme membre 65421, le dividende 6542. On écrira le diviseur 2 x 363 = 726; on écrira à la racine le quotient 9 & encore devant le diviseur. On ôtera 9 x 7269 de 65421, & l'on écrira le reste 0 au dessous. Et ce dernier reste 0 fera connoître que 3. 639 est la racine exacte du nombre proposé.

V. EXEMPLE.

1, 32., 42, 32, 10	racine. 11.507	
0 32		
11 42	21	diviseurs.
0 17 32 10	225	
	230	
reste 1 21 61	23007	

POUR trouver la racine 2° du nombre décimal 132.42321 qui a trois rangs d'entiers, 1°. Il faut partager les entiers en deux tranches 1, 32, & partager, en allant de gauche à droite, les parties décimales en tranches chacune de deux rangs, ajoutant un zero à la derniere tranche à droite pour lui donner

deux rangs. Ensuite on dira 1 est le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche à gauche. On écrira 1 racine quarré de 1 à la racine. On retranchera 1, quarré de 1, de la premiere tranche 1, & on écrira le reste zero au dessous. On abbaissera la seconde tranche 32 devant le reste 0; on continuera l'operation comme on le voit dans l'exemple, & l'on trouvera la racine 11. 507, & le reste 12161 qui marque que le nombre proposé n'est pas un quarré parfait; mais étant diminué du reste 12161, il devient 132. 411049 qui est un quarré parfait, dont la racine est 11. 507. On marquera dans la racine le point qui sépare les parties décimales après 11, qui expriment la racine des tranches du nombre entier 132.

VI. EXEMPLE.

0,00,01,32,42,32,10	racine. 0.011507	
0 32		
11 42	21	diviseurs.
	225	
0 17 32 10	230	
reste 1 21 61	23007	

POUR trouver la racine quarrée du nombre décimal 0. 0001324232310, 1°, on le partagera en tranches, comme on le voit dans l'exemple; on écrira d'abord 0 à la racine pour le caractere de la premiere tranche à gauche, & il représentera la place des entiers. On marquera devant ce 0 de la racine, le point qui doit séparer les parties décimales de la racine d'avec les entiers; & à cause de la seconde tranche 00, qui ne contient que des zeros, on écrira un zero à la racine pour le caractere de cette tranche. Mais la troisiéme tranche 01 contenant le chifre 1, on commencera à cette tranche l'operation, & l'on dira 1 est le plus grand quarré contenu dans cette tranche, la racine quarrée de 1 est 1, on écrira 1 à la racine, l'on retranchera 1 quarré de 1, de la tranche 01, & on écrira le reste 0 sous cette tranche.

2°. On abbaissera la tranche suivante 32 devant ce reste; on continuera l'operation que l'on voit toute faite dans l'exemple, comme dans les exemples précedens.

Exemples de l'extraction de la racine cubique ou 3ᵉ.

VII. EXEMPLE.

A B C D

19,748,688,691 } racine. 2703
8
11 748 second membre.
11 683
00065,688,691 3ᵉ & 4ᵉ membr.
65 682 927
00 005 764 reste.

Pour le troisiéme membre:

$0=b$ | $27=a$
$2187\,..=3a^2$ diviseur.

Pour le quatriéme membre:

$270=a$
$218700\,..=3a^2$ diviseur.
$3=b$ | $2430\,.=3ab$
$9=b^2$
$21894309=3a^2+3ab+b^2$
$3=b$
$65682927=3a^2b+3ab^2+b^3$

Pour le second membre.

$2=a$
$9=b$ | $12\,..=3a^2$ diviseur.
$54\,.=3ab$
$81=b^2$
$1821=3a^2+3ab+b^2$
$9=b$
$16389=3a^2b+3ab^2+b^3$

Pour le second membre.

$2=a$
$8=b$ | $12\,..=3a^2$ diviseur.
$48\,.=3ab$
$64=b^2$
$1744=3a^2+3ab+b^2$
$8=b$
$13952=3a^2b+3ab^2+b^3$

Pour le second membre.

$2=a$
$7=b$ | $12\,..=3a^2$ diviseur.
$42\,.=3ab$
$49=b^2$
$1669=3a^2+3ab+b^2$
$7=b$
$11683=3a^2b+3ab^2+b^3$

POUR trouver la racine cubique ou troisiéme du nombre 19748688691, 1°, on le partagera en tranches de trois rangs chacune, en allant de la droite à la gauche. La premiere à gauche ne se trouve avoir que deux rangs. Ensuite on dira le plus grand cube contenu dans la premiere tranche *A* est 8. Sa racine cubique est 2, on écrira $2=a$ pour le premier

caractere de la racine, on ôtera de la premiere tranche, 8 cube de 2, & l'on écrira le reste 11 au dessous.

2°. On abbaissera la seconde tranche 748 au devant du reste 11, ce qui donnera le second membre 11748. On distinguera le dividende 117 par un point sous 7. On formera le diviseur en multipliant $2 \times 2 = 4 = a^2$ par 3, & l'on aura $12 = 3a^2$ pour diviseur, qu'on écrira à part. Faisant la division on trouvera le quotient 9. Mais avant de l'écrire à la racine, on examinera si 9 n'est point trop grand: on supposera $9 = b$ de la formule, on formera à deux fois les produits prescrits par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. On prendra d'abord les produits $3 \times 2 \times 9 = 54 = 3ab$, & $9 \times 9 = 81 = b^2$, qu'on écrira les uns sur les autres dans les rangs qui leur conviennent, & on multipliera leur somme $1821 = 3a^2 + 3ab + b^2$ par $9 = b$, & on verra que le produit $16389 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ surpasse le second membre 11748. Ainsi 9 est trop grand.

On forme à deux fois les produits prescrits par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ pour abreger le calcul dans la pratique, comme on le va voir dans cet exemple. Pour éprouver si 9 n'est point trop grand, on fera par la pensée la multiplication de $1821 = 3a^2 + 3ab + b^2$ par $9 = b$, en allant de la gauche à la droite, & l'on fera en même temps la soustraction du second membre, en disant $9 \times 1 = 9$; $11 - 9 = 2$; 2 avec 7 dans le rang suivant $= 27$. Puis on dira $9 \times 8 = 72$, mais 72 surpasse 27, ainsi on ne peut pas faire la soustraction. Cela fait connoître que 9 est trop grand.

On supposera que le quotient qui doit être le second caractere de la racine est $8 = b$, on formera les produits prescrits par $3a^2 + 3ab + b^2$ qu'on ajoutera dans une somme, & l'on multipliera par la pensée cette somme $1744 = 3a^2 + 3ab + b^2$ par $8 = b$, en allant de gauche à droite pour voir si 8 n'est point trop grand, & on fera en même temps la soustraction des produits à mesure qu'on les formera, du second membre, en disant $8 \times 1 = 8$. $11 - 8 = 3$. 3 avec 7 dans le rang suivant $= 37$. Puis on dira $8 \times 7 = 56$. On ne peut pas ôter 56 de 37. Ainsi 8 est encore trop grand.

On n'écrira donc que 7 à la racine pour le caractere du 2ᵉ membre, & même on ne l'écrira qu'après avoir éprouvé par l'esprit, de la maniere qu'on vient de le faire pour 9 & pour 8,

que 7 n'eſt point trop grand. On ſuppoſera $7 = b$, on formera les produits preſcrits par la formule $3a^2 + 3ab + b^2$, & on fera à l'ordinaire la multiplication de la ſomme de $1669 = 3a^2 + 3ab + b^2$ par $7 = b$, en allant de la droite à la gauche; & à meſure qu'on trouvera les produits particuliers, on les retranchera, ſans les écrire, du ſecond membre, & l'on écrira ſeulement le reſte au deſſous du ſecond membre, en diſant $7 \times 9 = 63$. $68 - 63 = 5$, on écrira le reſte 5 ſous 8 du ſecond membre, & l'on retiendra 6 ajouté à 8 pour le faire valoir 68. Puis l'on dira $7 \times 6 = 42$, $42 + 6$ qu'on retenoit $= 48$. $54 - 48 = 6$. On écrira le reſte 6 ſous 4, & on retiendra 5. Après on dira $7 \times 6 = 42$. $42 + 5$ qu'on retenoit $= 47$. $47 - 47 = 0$. On écrira le reſte 0 ſous 7, & on retiendra 4. Après on dira $7 \times 1 = 7$. $7 + 4$ qu'on retenoit $= 11$. $11 - 11 = 0$. On écrira le reſte 0 ſous 11, & l'operation du ſecond membre ſera achevée : le reſte ſera 65.

3°. On tranſportera la troiſiéme tranche 688 devant le reſte 65. Cela ſera le troiſiéme membre 65688. On diſtinguera le dividende 656 par un point ſous 6. On formera le diviſeur en ſuppoſant $27 = a$, & prenant le produit $3 \times 27 \times 27 = 2187 = 3a^2$. Ce produit ſera le diviſeur du troiſiéme membre. Mais voyant que le diviſeur 2187 n'eſt pas contenu dans le dividende 656, on écrira 0 pour le troiſiéme caractere de la racine, & l'operation du troiſiéme membre ſera achevée.

4°. On écrira la quatrieme tranche 691 devant le troiſiéme membre. Cela ſera le quatriéme membre 65688691. On diſtinguera le dividende 656886 par un point ſous 6. Pour avoir le diviſeur de ce membre on ſuppoſera $270 = a$, & l'on prendra le produit $3 \times 270 \times 270 = 218700 = 3a^2$. On trouvera que le quotient eſt 3, que l'on écrira à la racine. On ſuppoſera $3 = b$. On formera les produits que preſcrit la formule $3a^2 + 3ab + b^2$: On les ajoutera dans une ſomme : on multipliera par l'eſprit cette ſomme $21894309 = 3a^2 + 3ab + b^2$ par $3 = b$, & à meſure qu'on formera les produits particuliers, on les retranchera, ſans les écrire, du quatrieme membre, & on écrira le reſte au deſſous. On dira donc $3 \times 9 = 27$. $31 - 27 = 4$; on écrira le reſte 4 ſous 1, & on retiendra 3 qu'on a ajouté à 1 pour le faire valoir 31. Puis on dira $3 \times 0 = 0$. $0 + 3$ qu'on retenoit $= 3$. $9 - 3 = 6$. On écrira le reſte 6

ſous 9. Après on dira $3 \times 3 = 9$. $16 - 9 = 7$. On écrira le reſte 7 ſous 6, & on retiendra 1. On dira enſuite $3 \times 4 = 12$. $12 + 1$ qu'on retenoit $= 13$. $18 - 13 = 5$. On écrira 5 au deſſous de 8, & on retiendra 1. Après quoi on dira $3 \times 9 = 27$. $27 + 1$ qu'on retenoit $= 28$. $28 - 28 = 0$. On écrira le reſte 0 ſous 8, & on retiendra 2; & l'on dira $3 \times 8 = 24$, $24 + 2$ qu'on retenoit $= 26$. $26 - 26 = 0$. On écrira le reſte 0 ſous 6, & on retiendra 2. Enſuite on dira $3 \times 1 = 3$. $3 + 2$ qu'on retenoit $= 5$. $5 - 5 = 0$; on écrira le reſte 0 ſous 5. Enfin on dira $3 \times 2 = 6$. $6 - 6 = 0$. On écrira, ſi l'on veut, le reſte 0 ſous 6. Le reſte du quatriéme membre eſt 5764.

L'operation eſt achevée, n'y ayant plus de tranches ſur leſquelles il faille operer. 2703 eſt la racine du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé 19748688691. Si l'on diminue le nombre propoſé du dernier reſte 5764, on aura ce plus grand cube.

VIII. EXEMPLE.

Qui contient des parties décimales.

A B C (racine.
932.,413,024 (9.76
729

203 413 ſecond membr.
183 673

19 740 024 3. membr.
17 041 176

2 698 848 reſte.

Pour le troiſiéme membre.

$97 = a$

$28227.. = 3a^2$

$6 = b$ $\quad 1746. = 3ab$

$36 = b^2$

$2840196 = 3a^2 + 3ab + b^2$

$6 = b$

$17041176 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pour le ſecond membre.

$9 = a$

$243.. = 3a^2$ diviſeur.

$8 = b$ $\quad 216. = 3ab$

$64 = b^2$

$26524 = 3a^2 + 3ab + b^2$

$8 = b$

$212192 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pour le ſecond membre.

$9 = a$

$243.. = 3a^2$ diviſeur.

$7 = b$ $\quad 189. = 3ab$

$49 = b^2$

$26239 = 3a^2 + 3ab + b^2$

$7 = b$

$183673 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

On trouvera de la même maniere la racine cubique du nombre décimal 932.413024 : la seule chose à quoi il faut prendre garde, est de commencer le partage des tranches par les entiers. Et comme ils occupent trois rangs, ce qui fait une tranche; la premiere tranche sera des nombres entiers 932. On fera les tranches suivantes, en allant de gauche à droite, chacune de trois rangs; & si la derniere à droite avoit moins de trois rangs, on y suppléroit par des zeros. On operera ensuite à l'ordinaire.

1°. On cherchera dans la table des puissances des neuf chifres le plus grand cube contenu dans la premiere tranche 932, & l'on trouvera que c'est 729 cube de 9. Ainsi on écrira 9 à la racine pour le premier caractere qui est celui des entiers, & l'on mettra au devant de 9 le point qui doit distinguer les parties décimales d'avec les entiers, on ôtera 729, cube de 9, de la premiere tranche 932, & on écrira le reste 203 au dessous.

2°. On abbaissera la seconde tranche 413 devant le reste, ce qui fera le second membre 203413. On distinguera le dividende 2034 par un point sous 4. On supposera $9 = a$; on formera le diviseur $243 \ldots = 3a^2$. On fera la division, & on verra d'abord que le quotient 9 seroit trop grand. Car en multipliant par la pensée le diviseur 243 de gauche à droite par 9, & faisant en même temps la soustraction, on diroit $9 \times 2 = 18$. $20 - 18 = 2$. Et 2 avec le 3 suivant seroit 23. On diroit ensuite $9 \times 4 = 36$: on ne peut pas ôter 36 de 23. Ainsi 9 seroit trop grand.

On éprouvera aussi, comme on le voit marqué dans l'exemple, que 8 seroit trop grand; c'est pourquoi on n'écrira que 7 à la racine : & supposant $7 = b$, on formera les produits représentez par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, si l'on veut à deux fois, comme on l'a expliqué dans l'exemple précedent. On retranchera du second membre la somme de ces produits, & l'on écrira le reste 19740 au dessous.

3°. On transportera la troisiéme tranche 024 au devant du reste précedent, ce qui fera le troisiéme membre 19740024. On distinguera le dividende 197400 par un point sous 0 de la tranche abbaissée. On supposera la somme des caracteres de la racine deja découverts $97 = a$, & on formera le diviseur

viseur 28227 $= 3a^2$. Faisant la division on trouvera le quotient $6 = b$ qu'on écrira à la racine. On prendra, si l'on veut, à deux fois les produits prescrits par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. On retranchera du troisiéme membre la somme de ces produits 17041176, & l'on écrira le reste 2698848 au dessous. L'operation est achevée. 9. 76 est la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre proposé. Ce plus grand cube est 932. 413024 — 2698848 = 929. 714176.

De l'Extraction de la racine 5e.

IX. EXEMPLE.

A B C
70, 15833, 71424 (234
32
38 15833 2. memb.
32 36343
5 79490 71424 3. memb.
5 79490 71424
0, 00000, 00000 reste.

Pour le second membre.

$2 = a$

$4 = b$
$80 \ldots\ldots = 5a^4$ diviseur.
$320 \ldots = 10a^3b$
$640 \ldots = 10a^2b^2$
$640 . = 5ab^3$
$256 = b^4$

$1290656 = 5a^4 + 10a^3b + 10a^2b^2 + 5ab^3 + b^4$
$4 = b$

$5162624 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Pour le second membre.

$2 = a$

$3 = b$
$80 \ldots\ldots = 5a^4$ diviseur.
$240 \ldots = 10a^3b$
$360 \ldots = 10a^2b^2$
$270 . = 5ab^3$
$81 = b^4$

$1078781 = 5a^4 + 10a^3b + 10a^2b^2 + 5ab^3 + b^4$
$3 = b$

$3236343 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Pour le troisiéme membre.

$23 = a$

$4 = b$
$1399205 \ldots\ldots = 5a^4$ diviseur.
$486680 \ldots = 10a^3b$
$84640 \ldots = 10a^2b^2$
$7360 . = 5ab^3$
$256 = b^4$

$14487267856 = 5a^4 + 10a^3b + 10a^2b^2 + 5ab^3 + b^4$
$4 = b$

$57949071424 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Pour trouver la racine 5e du nombre 70158337142 4, 1°. On le partagera en tranches chacune de cinq rangs en allant de la droite à la gauche; la premiere à gauche se trouvera n'avoir que deux rangs. On cherchera dans la table des puissances des neuf chifres la plus grande cinquiéme puissance, représentée par a^5 de la formule de la 5e puissance, qui est contenue dans la premiere tranche à gauche 70, & ayant trouvé que c'est 32, 5e puissance de 2, on écrira 2 à la racine pour le premier caractere. On retranchera 32, 5e puissance de 2, de la premiere tranche 70, & l'on écrira le reste 38 au dessous.

2°. On abbaissera la seconde tranche au devant du reste 38, ce qui fera le second membre 3815833. On distinguera le dividende 381 par un point sous 1. La formule de la 5e puissance $5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ fait voir qu'en supposant le premier caractere de la racine $2 = a$, il faut prendre $5a^4 = 80$ pour diviseur. Et faisant la division, on trouvera d'abord le quotient 4. Mais supposant $4 = b$, & prenant, si l'on veut à deux fois (comme dans les exemples de l'extraction de la racine cubique) les produits que prescrit la formule, on verra, comme il est marqué dans l'exemple, que la somme des produits surpasse le second membre; ainsi 4 est trop grand, il ne faut écrire que 3 à la racine. Et supposant $3 = b$, il faut former, si l'on veut, à deux fois les produits représentez par $5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, retrancher du second membre la somme de ces produits, & en écrire le reste 579490 au dessous: On en voit l'operation dans l'exemple.

3°. On transportera la troisiéme tranche au devant du reste précedent, ce qui fera le troisiéme membre 57949071424, On distinguera le dividende 5794907 par un point sous 7. Pour trouver le diviseur on supposera la somme des deux caracteres déja découverts $23 = a$, & l'on formera le diviseur $1399205 \ldots = 5a^4$. On trouvera que le quotient est 4, que l'on écrira à la racine; & supposant $4 = b$, on prendra les produits représentez par la formule $5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, comme on le voit dans l'exemple. On retranchera du troisiéme membre la somme de ces produits 57949071424, & le reste étant zero, on sera assuré que 234 est la racine 5e exacte du nombre proposé qui est une 5e puissance parfaite.

AVERTISSEMENT.

SI l'on veut un exemple de l'extraction de la racine 5ᵉ d'un nombre qui contienne des parties décimales, il n'y a qu'à mettre le point qui distingue les parties décimales d'avec les entiers après 70 dans le nombre 70. 15833, 41424 de l'exemple précédent, faire la premiere tranche à gauche des seuls entiers 70, & distinguer les tranches suivantes de droite à gauche, en donnant à chacune cinq rangs; extraire ensuite la racine cinquiéme comme dans l'exemple précedent, & mettre un point dans la racine après 2 qui est le chifre de la racine des entiers, pour distinguer le caractere 2 des entiers d'avec les caracteres suivans 34 des parties decimales.

Les Commençans peuvent faire tant d'exemples de l'extraction des racines qu'ils voudront; ceux que l'on a mis suffisent pour leur faire concevoir la methode generale de faire ces extractions. Il est bon qu'ils se rendent familiere l'extraction de la racine quarrée, qui est celle dont on peut faire plus d'usage dans les Mathematiques. Ils pourront aussi faire quelques exemples de l'extraction de la racine cubique, dont la pratique est necessaire en quelques occasions. Les extractions des racines plus élevées se présentent si rarement qu'il suffit d'avoir bien conçu la maniere de les faire, sans qu'il soit necessaire de se les rendre familieres; & ils se souviendront qu'il suffit de sçavoir trouver les racines 2ᵉ & 3ᵉ, pour découvrir * les racines 4ᵉˢ, 6ᵉˢ, 8ᵉˢ, 9ᵉˢ, 12ᵉˢ, &c. * 196.

Démonstration du Problême de l'extraction des racines des nombres.

198. QUAND il ne reste rien à la fin de l'operation, le Problême fait découvrir les caracteres de la racine d'une puissance numerique quelconque, qui sont tels qu'en prenant par ordre les produits de ces caracteres * comme le prescrit la formule de la puissance, on formera la même puissance numerique proposée; car par l'operation du Problême on retranche par ordre ces mêmes produits de la puissance numerique proposée, & il ne reste rien. Le Problême fait donc trouver la racine de la puissance numerique proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.* * 177.

Quand il y a un reste à la fin de l'operation, il est évident

par le raiſonnement qui précede, que le Problême fait découvrir la racine de la plus grande puiſſance numerique parfaite du même degré, qui eſt contenue dans la puiſſance numerique imparfaite propoſée; laquelle puiſſance numerique parfaite eſt égale à la puiſſance numerique imparfaite propoſée diminuée du reſte qui s'eſt trouvé à la fin de l'operation.

La formation des puiſſances des nombres qui contiennent des parties décimales étant ſemblable à celle des nombres entiers, la réſolution des unes & des autres, c'eſt à dire, l'extraction de leurs racines eſt auſſi ſemblable, & la démonſtration de l'extraction des racines des unes eſt ſemblable à la démonſtration de l'extraction des racines des autres.

La maniere de s'aſſurer dans la pratique, ſi l'on a ſuivi exactement les regles du Problême.

LA demonſtration précedente ſert à faire connoître que les regles que l'on a données pour l'extraction des racines ſont infaillibles; mais pour s'aſſurer ſi dans la pratique on les a ſuivies, & ſi l'on n'a point pris un nombre pour un autre, il n'y a qu'à élever la racine qu'on a trouvée à la puiſſance marquée par l'expoſant de la racine, c'eſt à dire au quarré, ſi l'on a extrait la racine quarrée; au cube, ſi l'on a extrait la racine cubique, &c. & la puiſſance qu'on trouvera doit être égale au nombre propoſé dont on a extrait la racine, s'il n'y a point eu de reſte à la fin de l'operation; s'il y a eu un reſte à la fin de l'operation, il faudra ajouter ce reſte à la puiſſance qu'on trouvera, & la ſomme doit être égale au nombre propoſé.

La maniere de s'aſſurer quand il y a un reſte conſiderable à la fin de l'operation, ſi la racine qu'on a trouvée eſt celle de la plus grande puiſſance du même degré contenue dans le nombre propoſé.

ON a vû, *article* 184, qu'en ſuppoſant que a de la formule de la ſeconde puiſſance repréſente tous les caracteres de la racine d'un quarré parfait, ſi l'on met 1 à la place de b dans $2ab + b^2$, l'on aura $2a + 1$ qui repréſente ce qu'il faut ajouter à ce quarré parfait, pour en faire le quarré parfait, dont la racine ſurpaſſe d'une unité la racine du quarré précedent.

Qu'en ſuppoſant de même que a repréſente tous les caracteres de la racine d'un cube parfait, $3a^2 + 3a + 1$ repréſente les produits qu'il faut ajouter à ce cube, pour avoir le cube de la racine qui ſurpaſſe la premiere de l'unité. Il en eſt de même des puiſſances plus élevées.

L'on déduit de-là que pour s'aſſurer ſi le reſte qu'on trouve après chaque operation de l'extraction de la racine quelconque d'un nombre n'eſt point trop grand, il n'y a qu'à ſuppoſer que a repréſente tous les caracteres de la racine déja découverts, & prendre, quand c'eſt la racine quarrée, les produits repréſentez par $2a + 1$; quand c'eſt la racine cubique, les produits repréſentez par $3a^2 + 3a + 1$; quand c'eſt la racine 5[e], les produits repréſentez par $5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$, & ainſi des autres. Si le reſte qu'on a trouvé eſt moindre que la ſomme de ces produits, il eſt évident que la racine découverte eſt celle de la plus grande puiſſance parfaite du même degré, qui eſt contenue dans les tranches ſur leſquelles on a fait l'operation: ſi le reſte qu'on a trouvé ſurpaſſe la ſomme des produits, il eſt évident que la racine trouvée eſt trop petite, & dans ce cas il faut recommencer l'extraction de la racine qu'on cherchoit.

Par exemple, pour s'aſſurer que le reſte 2698848 qu'on a trouvé à la fin de l'operation de la troiſiéme tranche de l'exemple huitiéme n'eſt point trop grand, on ſuppoſera la ſomme des caracteres de la racine déja découverts $976 = a$, & l'on prendra la ſomme des produits que repréſente $3a^2 + 3a + 1$. Cette ſomme 2860657 eſt plus grande que le reſte 2698848; on eſt aſſuré par-là que le reſte n'eſt pas trop grand; c'eſt à dire, que le plus grand cube parfait contenu dans le nombre 932413024, dont on a extrait la racine cubique, eſt le cube parfait qui a pour ſa racine 976.

$$
\begin{array}{r}
2857728 = 3a^2 \\
2928 = 3a \\
1 = 1 \\
\hline
2860657 = 3a^2 + 3a + 1
\end{array}
$$

De l'approximation des racines.

On demontrera dans la ſuite qu'il n'y a aucun nombre, ſoit entier, ſoit rompu, ou l'un & l'autre enſemble, qui puiſſe être la racine exacte d'une puiſſance numerique imparfaite.

Ainſi quand en faiſant l'extraction de la racine d'un nombre, on trouve un reſte à la fin de l'operation, il eſt certain qu'on ne ſçauroit exprimer par un nombre entier, ni par une fraction, ni par un entier & une fraction joints enſemble, la racine exacte de ce nombre. Cependant la Geometrie fournit une ligne qui eſt la racine exacte d'une puiſſance numerique imparfaite, en ſuppoſant cette puiſſance imparfaite exprimée par une ligne diviſée en autant de parties égales que la puiſſance numerique imparfaite contient d'unitez.

Dans la ſcience du calcul des grandeurs en general que nous expliquons ici, on fait deux choſes par rapport à ces racines des puiſſances numeriques imparfaites. 1°. On les exprime par le ſigne radical $\surd$, au deſſus duquel on écrit l'expoſant de la racine. Par exemple, 3 eſt un quarré imparfait, on en exprime la racine de cette maniere $\sqrt[2]{3}$, c'eſt à dire racine 2e ou quarrée de 3. De même 12 eſt une 3e puiſſance imparfaite, on en exprime ainſi la racine $\sqrt[3]{12}$; c'eſt à dire racine 3e ou cubique de 12. Il en eſt de même des autres. Ces expreſſions des racines des puiſſances imparfaites, s'appellent les expreſſions des grandeurs *incommenſurables*. On en expliquera le calcul dans le 2e Livre. 2°. Comme l'on a ſouvent beſoin dans les Mathematiques-pratiques d'avoir les racines les plus approchantes qu'il ſe puiſſe des veritables racines de ces puiſſances numeriques imparfaites, leſquelles racines veritables ne peuvent s'exprimer exactement par nombres, la ſcience du calcul donne la methode pour trouver les racines les plus approchantes qu'il ſoit poſſible des veritables racines des puiſſances imparfaites; c'eſt à dire, ces racines approchantes étant multipliées par elles-mêmes continuement autant de fois moins une que leur expoſant contient d'unitez, (une fois quand c'eſt la racine quarrée; deux fois quand c'eſt la racine 3e, & ainſi des autres) les produits approchent de ſi près des puiſſances numeriques imparfaites, que la difference en eſt inſenſible. On appelle cette methode *l'approximation des racines*. La voici.

Methode pour l'approximation des racines.

199. APRES avoir trouvé, par le Problême précedent, la racine de la plus grande puiſſance parfaite, qui eſt contenue dans la puiſſance imparfaite propoſée, il faut marquer au devant de la racine découverte vers la droite le point qui doit diſtinguer les entiers d'avec les parties décimales; ajouter au devant du dernier reſte qui s'eſt trouvé à la fin de l'operation une tranche d'autant de zeros qu'il y a de rangs dans chaque tranche du nombre propoſé ſur lequel on a operé, c'eſt à dire deux zeros ſi l'on extrait la racine quarrée; trois zeros ſi c'eſt la racine 3ᵉ, & ainſi des autres; regarder ce reſte avec les zeros ajoutez, comme un nouveau membre de l'extraction; operer ſur ce membre comme l'on a fait ſur ceux qui le précedent, & écrire le caractere, qui convient à ce membre, à la racine au devant du point qui diſtingue les entiers d'avec les parties décimales; c'eſt à dire ce caractere de la racine exprimera des dixiémes; & écrire le reſte que donnera l'operation au deſſous de ce membre.

Il faut ajouter à ce reſte autant de zeros qu'au précedent, ce qui en fera le membre ſuivant de l'operation, & operer ſur ce membre comme ſur le précedent; écrire le caractere qui lui convient à la racine au devant du membre précedent, & le reſte au deſſous.

Il faut continuer d'ajouter ainſi au dernier reſte autant de zeros qu'au précedent, ce qui donnera le membre ſuivant de l'extraction; ajouter au reſte que donnera ce membre le même nombre de zeros qu'au précedent, & ainſi à l'infini ou tant que l'on voudra. Les caracteres des entiers écrits à la racine, joints aux parties décimales qu'on a découvertes par les operations qu'on vient de preſcrire, feront la racine approchée de la puiſſance numerique imparfaite ſur laquelle on operoit.

L'approximation des racines des nombres qui contiennent des parties décimales, & où l'on a trouvé un reſte à la fin de l'operation, ſe fait de la même maniere que celles des nombres entiers, excepté qu'il ne faut point marquer d'autre point dans la racine pour diſtinguer les parties décimales d'avec les entiers, que celui qui a été marqué au commencement de l'operation.

Exemple de l'approximation des racines.

```
3,43,39,23 (1853.0847
2 43                        28      }
 19 39                      365     } diviseurs.
   1 14 23                  3703    }
                            3706
reste  3 140000             370608
         17513600           3706164
          268894400         37061687
         009462591
```

En faisant l'extraction de la racine quarrée du quarré imparfait 3433923, dans le troisiéme exemple, on a trouvé la racine 1853, & le reste 314. Pour découvrir une racine qui approche tant près qu'on voudra de la veritable racine qu'on ne sçauroit exprimer par nombres, il faut mettre un point au devant de la racine déja trouvée en entiers 1853; ce point servira à distinguer les entiers déja découverts d'avec les parties décimales qu'on va y ajouter. Il faut ajouter deux zeros au reste 314, ce qui donnera le nouveau membre 31400. On distinguera le dividende de ce membre 3140 par un point sous le zero plus à gauche. On formera le diviseur de ce membre, comme on a formé le diviseur des autres en multipliant par 2 les caracteres déja découverts, & l'on trouvera 3706 pour le diviseur; & voyant que ce diviseur n'est pas contenu dans le dividende 3140, on écrira 0 à la racine pour le caractere de ce membre. On ajoutera deux zeros à ce membre, ce qui donnera le nouveau membre 3140000. On distinguera le dividende 314000 par un point sous le zero le plus à gauche des deux qu'on a ajoutez. On formera le diviseur 37060. Faisant la division on trouvera le quotient 8 qu'on écrira à la racine; & faisant l'operation sur ce membre, on trouvera le reste 175136. On ajoutera deux zeros à ce reste, ce qui fera le membre suivant 17513600. On distinguera le dividende par un point sous le zero plus à gauche des deux qu'on a ajoutez. On formera le diviseur de ce membre 370616. On trouvera le quotient 4 qu'on écrira à la

à la racine ; & faiſant l'operation, on aura le reſte 2688944. On lui ajoutera deux zeros, ce qui ſera le membre ſuivant 268894400. On diſtinguera le dividende par un point ſous le zero plus à gauche des deux qu'on a ajoutez. On formera le diviſeur 3706168. On trouvera le quotient 7 qu'on écrira à la racine; & faiſant l'operation ſur ce membre, on trouvera le reſte 9462591.

On peut continuer l'approximation tant qu'on voudra, en ajoutant toujours deux zeros au dernier reſte qu'on aura trouvé, pour en faire le membre ſuivant. Les operations qu'on vient de faire ſuffiſent pour en faire concevoir la methode : & il eſt évident qu'on peut l'appliquer aiſément à l'approximation des racines des nombres qui contiennent des parties décimales; à l'approximation des racines cubiques, en ajoutant trois zeros au dernier reſte, & de même à chacun des reſtes ſuivans; à l'approximation des racines 4es, en ajoutant quatre zeros au dernier reſte, & de même à chacun des reſtes ſuivans : enfin à l'approximation des racines dont l'expoſant ſera tel nombre entier qu'on voudra, en ajoutant au dernier reſte, & à chacun des reſtes ſuivans, autant de zeros que l'expoſant de la racine contient d'unitez.

Démonſtration. Il eſt évident qu'ajouter des tranches de zeros au dernier reſte de l'extraction, & aux reſtes ſuivans, eſt la même choſe que de les ajouter d'abord à la puiſſance numerique, dont on a extrait la racine. Par exemple, ajouter deux zeros au reſte 314, enſuite deux au reſte ſuivant, encore deux au troiſiéme reſte, & enfin deux au quatriéme reſte, eſt la même choſe que d'ajouter d'abord huit zeros au quarré imparfait 3433923, en mettant entre ce nombre & ces zeros ajoutez le point qui diſtingue les entiers des parties décimales. De plus ce nombre avec les zeros ajoutez 3433923. 00000000 * n'a point changé de valeur, & il n'y a de difference entre 3433923 & 3433923. 00000000 qu'en ce que la premiere expreſſion marque les unitez de ce nombre entieres & ſans être diviſées en parties décimales, & la ſeconde marque les unitez qui compoſent le même nombre partagées en parties décimales. * 17.

Or on trouve par la methode d'approximation la racine 1853. 0847 qui contient & la racine 1853 de la plus grande puiſſance en entiers 3433609 contenue dans la puiſſance im-

parfaite proposée, & de plus le nombre décimal 0. 0847; & la somme de ces entiers & de ces parties décimales 1853. 0847 est la racine de la puissance parfaite 3433922. 90537409, qui est un nombre décimal moindre que 3433923. 00000000, & plus grand que 3433609. 00000000.

La methode d'approximation des racines fait donc trouver une racine d'une puissance numerique imparfaite, qui approche plus de la veritable racine que la racine qu'on avoit trouvée avant l'approximation.

Il est évident que plus on continuera l'approximation, & plus la racine qui viendra de cette approximation sera approchante de la veritable racine qu'on ne sçauroit exprimer par nombres.

Dans la pratique, quand on est arrivé au rang des parties décimales de la racine approchée où l'on veut terminer l'approximation, (on a terminé l'approximation précedente aux dix milliémes qui occupent le quatriéme rang des parties décimales) on examine si dans l'operation suivante on trouveroit un nombre décimal pour le caractere suivant de la racine approchée, qui fût plus grand ou moindre que 5; si l'on voit qu'il doive être plus grand que 5, on augmente d'une unité le caractere décimal, par lequel on a terminé l'operation; & si l'on voit qu'il doive être moindre que 5, c'est à dire moindre que la moitié d'une unité du rang où l'on a voulu terminer la racine, on laisse le dernier caractere décimal tel qu'on l'a trouvé par l'operation. Il est visible que cela se fait afin que la racine approchée differe moins de la veritable racine, & que le reste qu'on néglige soit moins considerable.

De l'extraction des racines des puissances litterales.

L'extraction des puissances litterales incomplexes.

200. 1°. POUR extraire la racine quelconque, dont l'exposant est un nombre entier, d'une grandeur litterale incomplexe qui n'a qu'une seule lettre, comme la racine 3e de a^6, il faut diviser l'exposant de la puissance de la grandeur litterale par l'exposant de la racine; & écrire le quotient pour l'exposant de la racine qu'on cherchoit. Ainsi la racine 3e de a^6 est a^2. La racine 2e de a^2 est a^1; la racine 4e de a^4 est a^1; la racine

3ᵉ de a^{12} est a^4. C'est une suite évidente de l'*article* 150, & de la formation des puissances d'une grandeur.

201. 2°. Quand l'exposant de la racine n'est pas un diviseur exact de l'exposant de la puissance; on écrit pour l'exposant de la racine qu'on cherche * la fraction dont le numerateur est l'exposant de la puissance, & le dénominateur l'exposant de la racine. Ainsi la racine 2ᵉ de a^3 est $a^{\frac{3}{2}}$. La racine 2ᵉ de a^1 est $a^{\frac{1}{2}}$. La racine 5ᵉ de a^6 est $a^{\frac{6}{5}}$. Ces expressions sont des signes arbitraires qu'on a déterminez à marquer les racines des puissances. * 153.

202. Quand les exposans des grandeurs litterales sont indéterminez, c'est à dire quand ces exposans sont des lettres, l'extraction de la racine se fait de la même maniere. Ainsi la racine *m* de la puissance a^{mn} est a^n. La racine *m* de a^n est $a^{\frac{n}{m}}$ la racine *m* de a^m est a^1. La racine 2ᵉ de a^n est $a^{\frac{n}{2}}$. La racine *n* de a^1 est $a^{\frac{1}{n}}$. Il en est de même des autres. C'est une suite évidente des articles 150 & 153.

REMARQUE.

203. QUAND l'exposant de la racine est un diviseur exact de l'exposant de la puissance, l'exposant de la racine étant un nombre entier, en y comprenant l'unité, il est clair que les racines sont des puissances parfaites aussi-bien que les puissances dont elles sont les racines. Ainsi a^2, racine 3ᵉ de a^6 est une puissance parfaite. Mais quand l'exposant de la racine n'est pas un diviseur exact de l'exposant de la puissance, alors l'exposant de la racine est une fraction. Cependant ces racines étant marquées par des exposans comme les puissances, on les nomme *des puissances imparfaites*. Ainsi $a^{\frac{2}{3}}$, racine 3ᵉ de a^2, ayant la fraction $\frac{2}{3}$ pour exposant, est une puissance imparfaite. Ce sont proprement ces puissances imparfaites que l'on exprime par le signe radical $\sqrt{}$, en mettant au dessus l'exposant de la racine. Ainsi $\sqrt[3]{a^2}$ est la même chose que $a^{\frac{2}{3}}$. $\sqrt[n]{a^m}$ est la même chose que $a^{\frac{m}{n}}$. Ces puissances imparfaites

ſont des grandeurs incommenſurables, dont on traitera à fond dans le ſecond Livre vers la fin.

Ainſi quand on met le ſigne $\sqrt{}$ devant une puiſſance parfaite pour en exprimer la racine, cela ne ſe fait que pour marquer en abregé qu'il faut faire l'extraction de la racine de cette puiſſance. Ainſi $\sqrt[3]{a^6} = a^2$ exprime qu'en faiſant l'extraction de la racine 3e de a^6 on trouve a^2. Mais le ſigne radical devant une puiſſance, dont on ne ſçauroit exprimer la racine qu'en lui donnant pour expoſant une fraction, eſt l'expreſſion propre de cette racine. Comme $\sqrt[2]{a^3}$ eſt l'expreſſion propre de la racine 2e de a^3. Ou bien encore $a^{\frac{3}{2}}$ eſt l'expreſſion propre de la racine 2e de a^3; mais alors on la regarde comme une puiſſance. Ces expreſſions des puiſſances imparfaites, ou des racines qui ne ſont pas elles-mêmes des puiſſances parfaites, ſont des ſignes arbitraires qu'on à determinez à repréſenter ces racines ou puiſſances imparfaites.

204. 3°. Pour extraire la racine d'une grandeur incomplexe qui contient pluſieurs lettres differentes, il faut diviſer l'expoſant de chaque lettre par celui de la racine, & écrire le quotient qui convient à chaque lettre differente au haut de cette lettre, pour lui ſervir d'expoſant, & ce ſera la racine. Par exemple, la racine 2e de $a^6b^2c^4$ eſt a^3bc^2. La racine 3e de $a^3b^2c^6$ eſt $ab^{\frac{2}{3}}c^2$. La racine 2e de ax^2 eſt $a^{\frac{1}{2}}x$. La racine m de a^nb^{mp} eſt $a^{\frac{n}{m}}b^p$. La racine n de $a^{m-n}x^p$ eſt $a^{\frac{m-n}{n}}x^{\frac{p}{n}}$. La racine n de a^nx eſt $ax^{\frac{1}{n}}$. La racine 2e de $a^{2n}b^2$ eſt a^nb; la racine n de $a^{2n}b^n$ eſt a^2b, &c.

205. 4°. Lorſqu'il faut extraire la racine d'une puiſſance litterale précedée d'un nombre, par lequel elle eſt multipliée, il faut trouver ſéparément la racine du nombre, & celle de la grandeur litterale, & écrire pour la racine qu'on cherche la racine du nombre, & au devant la racine litterale. Ainſi la racine 2e de $9a^2$ eſt $3a$. La racine cubique de $8a^3$ eſt $2a$. La racine 3e de $27a^{3n}$ eſt $3a^n$. La racine 3e de $12a^6$ eſt $a^2 \times \sqrt[3]{12}$. On remarquera que dans le cas où la racine eſt compoſée d'une grandeur commenſurable, & d'une incommenſurable marquée par le ſigne $\sqrt{}$, qui ſont multipliées l'une par l'autre,

on écrit la partie commensurable la premiere, & l'on écrit au devant vers la droite, la partie incommensurable précedée du signe $\sqrt{}$, comme on le voit dans $a^2 \sqrt[3]{12}$, & cette expression marque le produit de l'une de ces parties par l'autre. $a^2\sqrt[3]{12} = a^2 \times \sqrt[3]{12}$.

206. 5°. On remarquera sur les signes + & —, 1°, que quand on extrait la racine dont l'exposant est un nombre impair, comme 3, 5, 7, &c. d'une grandeur qui a le signe + *, le signe de la racine doit toujours être +; & que si la grandeur a — *, la racine doit toujours avoir le signe —: 2°. Mais, lorsque l'exposant de la racine est pair, comme 2, 4, 6, &c. que la racine * peut avoir le signe +, & * qu'elle peut aussi avoir le signe —. Par exemple, $+ a$ est la racine 2e de $+ a^2$, & $— a$ est aussi la racine 2e de $+ a^2$. Quand il est necessaire de marquer ces deux racines positive & négative, on les marque ainsi, $\pm a$ est la racine 2e de $+ a^2$. Mais comme on cherche plus ordinairement les grandeurs positives que les négatives, on prend d'ordinaire la racine positive. 3°. Enfin que si la grandeur litterale avoit le signe —, & que l'exposant de la racine fût un nombre pair, * la racine seroit une grandeur impossible, qu'on nomme *imaginaire*: on expliquera dans le second Livre les racines impossibles. Ainsi la racine 2e de $— a$ se marque ainsi $\sqrt[2]{— a}$.

* 99. * 99. * 99. * 99. * 100.

L'extraction des racines des puissances litterales complexes.

PROBLÊME.

207. *TROUVER la racine d'une puissance litterale complexe de quelque degré que soit la puissance.*

REGLE OU OPERATION. La maniere de trouver la racine d'une puissance litterale complexe quelconque est semblable à la methode de trouver la racine d'une puissance numerique quelconque, si ce n'est qu'on ne partage pas la puissance litterale en tranches comme la numerique, qu'on n'y distingue pas les membres de l'extraction comme dans les nombres, & qu'on n'y observe pas non plus les rangs qui sont particuliers aux nombres; mais on ordonne la puissance litterale en termes differens, par rapport à l'une des lettres de cette

puiſſance, mettant au premier terme la plus haute puiſſance de cette lettre, & les autres puiſſances qui deſcendent d'un degré de l'une à l'autre dans les termes ſuivans, obſervant de choiſir la lettre qui donnera pour premier terme une puiſſance parfaite du degré de celle dont on cherche la racine.

On trace un petit arc au devant de cette puiſſance, pour marquer la place où l'on doit écrire les parties de la racine à meſure qu'on les trouvera. On prend dans la table des puiſ-
* 160. ſances * pour regle de l'extraction de la racine, la formule litterale du degré de la puiſſance litterale ſur laquelle on veut operer: & 1°, ſuppoſant que le premier terme de la formule repréſente le premier terme de la puiſſance propoſeé, on prend la racine du premier terme repréſentée par *a* de la formule, & l'on écrit pour premiere partie de la racine qu'on cherche, cette racine du premier terme de la puiſſance litterale du degré de celle que l'on cherche. On retranche la puiſſance de cette premiere partie de la racine du degré de la puiſſance propoſée, on la retranche, dis-je, du premier terme; mais comme elle eſt toujours égale à ce premier terme, on efface ſimplement le premier terme de la puiſſance litterale, ou bien l'on met un point ou zero au deſſous, pour marquer qu'on a retranché cette puiſſance.

2°. Suppoſant que *a* de la formule repréſente la premiere partie de la racine découverte par la premiere operation, & que *b* de la formule repréſente la ſeconde partie qu'on cherche, on prendra pour diviſeur la grandeur repréſentée par le ſecond terme de la formule, dont on a effacé *b*; on diviſera le ſecond terme de la puiſſance propoſée par ce diviſeur, & l'on écrira le quotient pour la ſeconde partie de la racine. Puis ſuppoſant la ſeconde partie de la racine qu'on vient de découvrir repréſentée par *b* de la formule, on formera les produits preſcrits par la formule, & on les retranchera de la puiſſance propoſée, écrivant le reſte au deſſous, & zero quand il n'y a pas de reſte.

3° Le reſte précedent joint aux grandeurs de la puiſſance propoſée, ſur leſquelles on n'a pas encore operé, eſt la grandeur litterale ſur laquelle on doit continuer l'operation; on la continuera en ſuppoſant les deux premieres parties de la racine déja découvertes repréſentées par *a* de

la formule, & la troisiéme qu'on cherche représentée par b. On prendra pour diviseur le produit représenté par le second terme de la formule, dont on a effacé b. On divisera celui des termes de la puissance, sur lesquels on doit operer, qui contient la plus haute puissance de la lettre, suivant laquelle on a ordonné la puissance proposée, par le premier terme du diviseur. On écrira le quotient pour la troisiéme partie de la racine; & la supposant cette troisiéme partie représentée par b de la formule, on formera les produits prescrits par la formule, on les retranchera de la puissance proposée, & l'on écrira le reste au dessous.

4°. Ce dernier reste & les grandeurs de la puissance sur lesquelles on n'a pas encore operé, sont la grandeur litterale sur laquelle on doit continuer l'operation. On la continuera, en supposant les trois parties de la racine déja découvertes représentées par a de la formule, & la quatriéme qu'on cherche représentée par b; & operant comme dans l'article précedent, on trouvera la quatriéme partie de la racine, & ensuite la cinquiéme, la sixiéme, & les autres suivantes jusqu'à la derniere, qui doit donner zero pour reste, si la puissance proposée est parfaite.

5°. Quand on a trouvé zero pour le dernier reste, & qu'il n'y a plus de grandeurs sur lesquelles on doive operer, l'operation est finie, la racine qu'on a trouvée est exacte, & la puissance proposée est une puissance parfaite. Mais quand on arrive à un reste sur lequel on ne peut plus continuer l'operation sans trouver pour quotient une fraction, la puissance proposée est imparfaite, ou bien elle ne peut se continuer sans fraction.

Quand on s'apperçoit que la puissance litterale, dont on cherche la racine, est imparfaite, ou bien que sa racine que l'on cherche n'est pas une grandeur entiere, on ne fait point d'ordinaire l'extraction de la racine de la plus grande puissance parfaite du même degré contenue dans la proposée, on se contente de mettre au devant de cette puissance le signe $\sqrt{}$, écrivant au dessus de $\sqrt{}$ l'exposant de la racine qu'on demande, & on tire une ligne du haut du signe $\sqrt{}$ qui va couvrir toute la puissance imparfaite de cette maniere $\sqrt[2]{a^2 + 2ax + x^2 - b^2}$. Mais si l'on a besoin d'avoir cette racine, on trouve d'abord

la racine de la plus grande puissance parfaite entiere contenue dans la puissance imparfaite proposée, & l'on continue l'operation pour avoir une racine autant approchée qu'on le voudra, par la methode qu'on expliquera dans le Livre suivant.

I. EXEMPLE.

$$9c^4 + 24c^3d - 14c^2d^2 - 40cd^3 + 25d^4 \quad (\text{racine. } 3c^2 + 4cd - 5d^2$$

$$\begin{array}{lllll} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$-9c^4 \qquad\qquad \text{diviseurs.}$$

$$- - 24c^3d - 16c^2d^2 \qquad 6c^2, + 4cd$$

$$0 \quad 0 \quad - 30c^2d^2 - 40cd^3 + 25d^4 \qquad 6c^2 + 8cd, - 5d^2$$

$$+ 30c^2d^2 + 40cd^3 - 25d^4$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

POUR trouver la racine 2ᵉ ou quarrée de la grandeur $9c^4 + 24c^3d - 14c^2d^2 - 40cd^3 + 25d^4$, qui est ordonnée par rapport à la lettre c. On se servira de la formule $a^2 + 2ab + b^2$ de la 2ᵉ puissance; & 1°, supposant que a^2 de la formule représente $9c^4$, on prendra la racine 2ᵉ de $9c^4$, qui est $3c^2$, qu'on écrira pour la premiere partie de la racine. On ôtera $9c^4$, quarré de $3c^2$ de $9c^4$, & on écrira le reste zero au dessous. Cette operation ne convient qu'à la premiere partie de la racine.

2°. Supposant $3c^2$ représentée par a de la formule, $2a$ de la formule fait voir que le diviseur qui doit servir à trouver la seconde partie de la racine est $6c^2$. Ainsi on écrira $6c^2$, ou ce qui revient au même dans l'extraction de la racine quarrée, on multipliera par 2 la partie $3c^2$ de la racine déja découverte, & l'on écrira le produit $6c^2$ pour le diviseur. On divisera $+ 24c^3d$ par $+ 6c^2$, & on écrira le quotient $+ 4cd$ à la racine. On écrira encore $+ 4cd$ devant le diviseur, ce qui fera $6c^2 + 4cd$. Puis supposant que $+ 4cd$ est représentée par b de la formule, on multipliera $6c^2 + 4cd$, représentée par $2a + b$ de la formule, par $4cd$ représentée par $+ b$, & on retranchera de la puissance proposée, les produits $+ 24c^3d + 16c^2d^2$ représentez par la formule $2ab + b^2$, & on écrira le reste $- 30c^2d^2$ au dessous du terme de la puissance $- 14c^2d^2$, & on effacera les termes de la puissance sur lesquels on a operé, ou bien on écrira des zeros au dessous pour faire souvenir qu'ils ne doivent plus servir.

On

On remarquera que quand on s'eſt rendu familiere l'extraction des racines, la multiplication & la ſouſtraction, dont on vient de parler ſe ſont par l'eſprit ſans écrire autre choſe que le reſte de la ſouſtraction. Cette remarque ſervira pour le reſte de cet exemple, & pour les ſuivans.

3°. Pour continuer l'operation ſur le reſte précedent $-30c^2d^2$, joint aux termes de la puiſſance propoſée, ſur leſquels on n'a pas encore operé, on ſuppoſera les deux parties de la racine déja découvertes $3c^2 + 4cd$ repréſentées par a de la formule $2ab + b^2$. On formera le diviſeur $6c^2 + 8cd$, comme le preſcrit $2a$ de la formule. Et diviſant $-30c^2d^2$ par le premier terme $+6c^2$ du diviſeur, on trouvera le quotient $-5d^2$ qu'on écrira à la racine, & encore au devant du diviſeur. Puis ſuppoſant $-5d^2$ repréſentée par b de la formule, on multipliera $6c^2 + 8cd - 5d^2$ que repréſente $2a + b$ de la formule par $-5d^2$ repréſentée par b, & l'on ôtera les produits $-30c^2d^2 - 40cd^3 + 25d^4$, des termes qui reſtent dans la puiſſance propoſée. Et trouvant que le reſte eſt zero, & qu'il n'y a plus de termes dans la puiſſance propoſée ſur leſquels on n'ait operé; on eſt aſſuré par là que $3c^2 + 4cd - 5d^2$ eſt racine exacte de la puiſſance propoſée, qui eſt une 2e puiſſance parfaite, dont la racine eſt une grandeur entiere.

II. EXEMPLE.

B

$$\left.\begin{array}{rrr} 4x^2y^2 & -12cx^2y & +9c^2x^2 \\ 0 & -16cdxy & +24c^2dx \\ & & +16c^2d^2 \\ -4x^2y^2 & & \end{array}\right\}\begin{array}{l} \text{racine.} \\ 2xy - 3cx - 4cd \\ \\ +4xy - 3cx - 4cd \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} \overline{0} & +12cx^2y & -9c^2x^2 \\ & +16cdxy & -24c^2dx \\ & & -16c^2d^2 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}$$

On trouvera de même la racine quarrée de la 2e puiſſance complexe B, après l'avoir ordonnée par rapport à la lettre y. 1°. On dira la racine quarrée de $4x^2y^2$ eſt $2xy$; on écrira $2xy$ pour la premiere partie de la racine. On retranchera $4x^2y^2$ quarré de $2xy$, de $4x^2y^2$; on écrira au deſſous le reſte o.

2°. On multipliera la racine $2xy$ par 2, & on écrira le

produit $4xy$ pour le diviſeur. On diviſera le ſecond terme $-12cx^2y - 16cdxy$ par $+4xy$, & on écrira à la racine le quotient $-3cx - 4cd$, & encore au devant du diviſeur. On multipliera $4xy - 3cx - 4cd$ par $-3cx - 4cd$; on retranchera le produit $-12cx^2y - 16cdxy + 9c^2x^2 + 24c^2dx + 16c^2d^2$ de la puiſſance B; & trouvant zero pour reſte, & qu'il n'eſt reſté aucune grandeur dans la puiſſance B; on voit par là que $2xy - 3cx - 4cd$ eſt la racine exacte de la puiſſance B, qui eſt une ſeconde puiſſance parfaite.

Remarques ſur l'extraction de la racine quarrée.

I.

208. Un quarré poſitif comme $+4x^2y^2$ pouvant avoir pour racine la même grandeur $2xy$ poſitive & négative, ſi l'on s'appercevoit dans la ſuite de l'operation qu'ayant pris la racine poſitive, l'extraction ne pût pas ſe faire; il faudroit prendre la même racine negative.

2.

209. Il peut arriver qu'en ordonnant la puiſſance dont on cherche la racine ſuivant une lettre, le premier terme ſe trouve une grandeur complexe; par exemple, ſi l'on ordonnoit la puiſſance B par rapport à la lettre c, le premier terme auroit été composé de trois grandeurs. Dans ce cas il faut voir s'il n'y auroit point une lettre dans la puiſſance propoſée, dont la plus haute puiſſance ne fiſt qu'une grandeur incomplexe, qui fût en même tems une puiſſance parfaite, & ordonner la puiſſance propoſée par rapport à cette lettre, comme on a fait la puiſſance B par rapport à la lettre y. Ou bien, ſi l'on ne vouloit pas prendre cette peine, ou qu'il n'y eût pas de lettre qui pût ainſi ſervir à ordonner la puiſſance propoſée, on prendroit dans le premier terme complexe de la puiſſance propoſée, pour la premiere operation, la ſeule grandeur incomplexe, qui ſeroit une puiſſance parfaite. Dans le ſecond exemple on prendroit pour la premiere operation la grandeur $+9c^2x^2$, ou la grandeur $+16c^2d^2$, qui ſont chacune une puiſſance parfaite. On écriroit la racine de l'une des ces grandeurs pour la premiere partie de la racine de la puiſſance B, & l'on continueroit l'operation comme le preſcrit la regle de l'extraction des racines. Mais l'on a vû dans le ſecond

exemple, que si l'on prenoit $+ 9c^2x^2$, ou bien $+ 16c^2d^2$ pour faire la premiere operation, il faudroit prendre $- 3cx$ ou $- 4cd$ negative pour la premiere partie de la racine. On pourroit cependant prendre cette premiere partie positive, & l'operation ne laisseroit pas de se faire exactement; on trouveroit la racine exacte $+ 3cx + 4cd - 2xy$. Quand on a acquis un peu d'habitude à extraire les racines, on voit facilement qu'en prenant pour premier terme de la puissance *B* la grandeur complexe $+ 9c^2x^2 + 24c^2dx + 16c^2d^2$, cette grandeur est une puissance parfaite dont la racine est $\pm 3cx \pm 4cd$, & l'on fait la premiere operation sur cette puissance parfaite, on écrit sa racine pour la premiere partie de la racine qu'on cherche, on ôte son quarré de la puissance *B*; c'est à dire, on en efface le premier terme entier, & on continue l'operation en prenant $\pm 3cx \pm 4cd$ pour la premiere partie de la racine découverte par la premiere operation.

III. EXEMPLE.

POUR trouver la racine 3e ou cubique de la grandeur litterale complexe *C* qu'on a ordonnée suivant la lettre y. On se servira de la formule de la 3e puissance $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. & 1°, regardant le premier terme de *C* $27y^6$ représenté par a^3, on prendra la racine 3^e $3y^2$, représentée, par a, du premier terme $27y^6$. On écrira $+ 3y^2$ pour la premiere partie de la racine. On retranchera $27y^6$ (3e puissance de $3y^2$) du premier terme $27y^6$, & on écrira le reste zero au dessous. a^3 de la formule ne sert que pour cette operation.

2°. Pour trouver la seconde partie de la racine représentée par b de la formule, il faut effacer b dans le second terme $3a^2b$ de la formule, & $3a^2$ fera connoître que pour avoir le diviseur de la second operation, il faut multiplier par 3 le quarré de $3y^2$ représentée par a de la formule, & l'on aura $+ 27y^4$ pour le diviseur représenté par $3a^2$. Il faut diviser $- 54cy^5$ par ce diviseur, & écrire le quotient $- 2cy$ pour la seconde partie de la racine. Puis supposant $- 2cy$ représentée par b de la formule, il faut former à part le produit représenté par $- 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (où le premier & le troisiéme termes ont le signe $-$, à cause du signe $-$ de la seconde partie $- 2cy$ de la racine.) Ce produit est $- 54cy^5$

$+ 36c^2y^4 - 8c^3y^3$. On le retranchera de la puiſſance C, & l'on joindra au reſte de cette ſouſtraction les termes de C, ſur leſquels on n'a pas encore operé.

3°. On trouvera la troiſiéme partie de la racine de la même maniere qu'on a trouvé la ſeconde. On ſuppoſera que a de la formule repréſente les deux parties $3y^2 - 2cy$ de la racine déja découvertes, & que b repréſente la troiſiéme qu'on cherche. $3a^2$ fait voir qu'il faut prendre pour diviſeur le produit de 3 par le quarré de $3y^2 - 2cy$ repréſentée par a. Ainſi il faut écrire pour diviſeur $+ 27y^4 - 36cy^3 + 12c^2y^2 = 3a^2$. Il faut diviſer $+ 108c^2y^4$, qui eſt le premier des termes de C ſur leſquels on doit operer, par le premier terme $+ 27y^4$ du diviſeur; écrire le quotient $+ 4c^2$ pour la troiſiéme partie de la racine. Puis ſuppoſant $+ 4c^2$ repréſentée par b de la formule, il faut former les produits repréſentez par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Ces produits ſont $+ 108c^2y^4 - 144c^3y^3 + 192c^4y^2 - 96c^5y + 64c^6$. Enfin il faut retrancher ces produits des termes qui reſtent de la puiſſance C joints au reſte de l'operation précedente: & comme il reſte zero, cela fait voir que $+ 3y^2 - 2cy + 4c^2$ eſt la racine exacte de la puiſſance C, qui eſt une 3e puiſſance parfaite.

Exemple III.

Extraction de la racine cubique ou 3e.

C

$$27y^6 - 54cy^5 + 144c^2y^4 - 152c^3y^3 + 192c^4y^2 - 96c^5y + 64c^6 \;(\, 3y^2 - 2cy + 4c^2.$$

o o o o o o o

$$- 27y^6$$

$$\overline{\;0\;} \quad + 54cy^5 - 36c^2y^4 + 8c^3y^3$$

$$0 \quad + 108c^2y^4 - 144c^3y^3 + 192c^4y^2 - 96c^5y + 64c^6$$

$$- 108c^2y^4 + 144c^3y^3 - 192c^4y^2 + 96c^5y - 64c^9$$

o o o o o

Seconde operation.

$$3y^2 = a$$
$$+ 27y^4 \quad \text{diviseur} = 3a^2$$
$$- \quad 2cy = b$$
$$- 54cy^3 = - 3a^2b$$
$$+ 36c^2y^4 = + 3ab^2$$
$$- 8c^3y^3 = - b^3$$

$$- 54cy^5 + 36c^2y^4 - 8c^3y^3 = - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Troisiéme operation.

$$3y^2 - 2cy = a$$
$$+ 27y^4 - 36cy^3 + 12c^2y^2 \quad \text{diviseur} = 3a^2$$
$$+ 4c^2 = b$$
$$+ 108c^2y^4 - 144c^3y^3 + 48c^4y^2 = + 3a^2b$$
$$+ 144c^4y^2 - 96c^5y = 3ab^2$$
$$+ 64c^6 = b^3$$

$$+ 108c^2y^4 - 144c^3y^3 + 192c^4y^2 - 96c^5y + 64c^6 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

AVERTISSEMENT.

Les exemples qu'on vient de donner suffisent pour faire clairement concevoir la methode d'extraire les racines des grandeurs litterales complexes, & la maniere d'en faire usage. Ceux qui voudront se la rendre familiere, pourront se faire eux-mêmes tant d'exemples qu'il leur plaira. Ils n'auront qu'à prendre une grandeur complexe, la multiplier par elle-même une fois, deux fois, trois fois, &c. observant d'ordonner les puissances 2e, 3e, 4e, &c. qui viendront de ces multiplications, par rapport à une lettre qui donne pour premier terme une puissance parfaite du degré de celle dont ils voudront extraire la racine. Enfin ils feront l'extraction de la racine de cette puissance suivant la regle du Problême, comme dans les exemples précedens; & s'ils ont bien suivi cette regle, ils trouveront zero pour le dernier reste de l'operation.

210. *Démonstration du Problême*. Le Problême fait découvrir, pour la racine que l'on cherche, les grandeurs dont les pro-
* 172. duits, pris dans l'ordre que prescrit * la formation des puissances, composent la puissance parfaite de cette racine, & qui composent aussi la grandeur proposée, dont on a extrait la racine, puisqu'en étant retranchez par ordre, dans l'operation, il n'y a eu aucun reste. Le Problême fait donc découvrir la racine exacte d'une puissance complexe parfaite. *Ce qu'il falloit démontrer*.

Pour s'assurer qu'on a suivi exactement la regle de l'extraction des racines, il n'y a qu'à élever la racine qu'on a découverte à la puissance qui à le même exposant que cette racine ; & si l'on a bien operé, on doit trouver la grandeur proposée.

Axiomes sur les puissances & sur les racines.

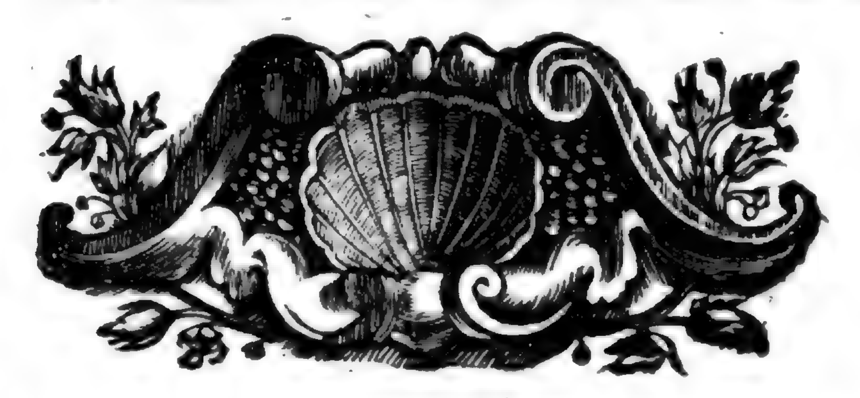
I.

211. LES puissances égales du même degré ont leurs racines égales ; les racines égales qui ont le même exposant, ont leurs puissances du même degré égales. Par exemple, si $a = b$, l'on aura $a^2 = b^2$; $a^3 = b^3$; $a^4 = b^4$, en general $a^n = b^n$; & si $a^n = b^n$, l'on aura $a = b$.

2.

212. Les racines inégales ont leurs puissances du même degré inégales, & la moindre racine a une puissance moindre que la puissance du même degré de la plus grande racine ; & réciproquement les puissances d'un même dégré étant inégales, les racines sont inégales, & la plus grande puissance a une plus grande racine que la moindre puissance.





LA SCIENCE DU CALCUL

DES GRANDEURS EN GENERAL

LIVRE II.

Où l'on explique le calcul des grandeurs rompues, qu'on nomme aussi fractions; tout ce qui regarde les comparaisons des rapports simples; ce qu'il faut sçavoir des rapports composez; & le calcul des grandeurs incommensurables.

SECTION I.

Où l'on explique les grandeurs simples ou premieres, & les grandeurs composées; la methode pour trouver le plus grand diviseur commun à deux & à plusieurs grandeurs; & la methode de trouver tous les diviseurs d'une grandeur composée.

213 N a dit * au commencement du Livre précedent qu'un *nombre entier*, étoit celui qui contenoit exactement l'unité un nombre déterminé de fois, comme 4 pieds, 10 pieds: & qu'un *nombre rompu*, ou *une fraction* * exprimoit un nombre de parties égales quelconques de l'unité, ou d'un tout qui est regardé comme l'unité par rapport à la fraction. Par exemple, deux tiers d'un pied, trois quarts d'un pied, sont des fractions. Trois quarts de deux pieds, quatre sixiémes parties de deux pieds, sont aussi des fractions, & deux

* 9.

* 19.

pieds sont regardez comme l'unité à laquelle se rapportent les deux dernieres fractions.

On a aussi dit qu'une fraction s'exprimoit par deux nombres, dont l'un étoit sur une ligne, & l'autre au dessous : que la fraction deux tiers, par exemple, s'exprimoit par $\frac{2}{3}$; que le nombre 3 qui étoit sous la ligne, se nommoit *le dénominateur*, & qu'il marquoit en combien de parties egales l'unité étoit conçue partagée, qu'il se nommoit encore *le second terme*, & encore *le consequent*, & enfin *le diviseur* : que le nombre 2 qui étoit sur la ligne, se nommoit *le numerateur*, & qu'il exprimoit combien la fraction contenoit de parties égales de l'unité déterminées par le dénominateur ; qu'il s'appelloit encore *le premier terme*, & encore l'*antecedent*, & enfin *le dividende*.

214. Cette notion d'un nombre rompu fait clairement connoître que si l'on regarde les parties égales de l'unité déterminées par le dénominateur, comme des unitez elles-mêmes; la fraction pourra être considerée comme un nombre entier qui exprime autant d'unitez qu'en contient le numerateur. Par exemple, en regardant dans la fraction $\frac{2}{3}$, les trois parties égales, dans lesquelles le dénominateur 3 marque que l'unité est divisée, comme des unitez elles-mêmes; on pourra considerer $\frac{2}{3}$ comme un entier, qui contient deux unitez, dont chacune est contenue trois fois dans son tout qui est l'unité.

D'où il suit évidemment, 1°, que pour ajouter des fractions, qui ont le même dénominateur, comme $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; il faut ajouter les seuls numerateurs, & écrire leur somme sur une ligne, & le dénominateur commun au dessous; & l'on aura la somme de ces fractions, qui est dans cet exemple $\frac{2}{3}$. 2°. Que pour ôter une fraction, comme $\frac{1}{3}$, d'une autre fraction, comme $\frac{2}{3}$, qui à le même dénominateur; il faut retrancher le numerateur de la premiere du numerateur de la seconde ; écrire le reste sur une ligne, & le dénominateur commun au dessous; & cette fraction, qui dans cet exemple est $\frac{1}{3}$, sera la difference des deux fractions.

D'où l'on voit que, quand les fractions n'ont pas le même dénominateur, il faut, pour les ajouter les unes aux autres, ou pour les retrancher les unes des autres, les réduire à avoir un même dénominateur, sans changer leur valeur. Cela

Cela fait déja appercevoir que le calcul des fractions contient, outre l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, la formation des puissances, & l'extraction des racines, qui sont les operations qui lui sont communes avec le calcul des grandeurs entieres ; il contient, dis-je, de plus des operations particulieres aux nombres rompus, qu'on appelle *les réductions*.

On a fait voir dans le Livre précedent * qu'une fraction & un rapport étoient la même chose: que la fraction $\frac{2}{3}$, par exemple, étoit la même chose que le rapport de 2 à 3 ; car le rapport de 2 à 3 ne signifie autre chose, sinon, que le consequent 3 étant conçu partagé en trois parties égales, l'antecedent 2 contient deux de ces parties: Mais en comparant ce rapport avec l'unité, qu'on conçoit partagée en autant de parties égales qu'en contient le dénominateur 3, le rapport lui même $\frac{2}{3}$ contient deux de ces parties, dont l'unité ($=\frac{3}{3}$) en contient 3. C'est en ce sens que $\frac{2}{3}$ est une fraction. Cependant comme le rapport de 2 à 3 est le même que celui de $\frac{2}{3}$ à 1 ($=\frac{3}{3}$;) on peut dire que $\frac{2}{3}$, consideré comme rapport & comme fraction, est toujours la même grandeur. C'est la même chose de toute fraction $\frac{a}{b}$ exprimée en general par les lettres: cette fraction $\frac{a}{b}$, & le rapport de a à b ne sont qu'une même chose. * 115.

Enfin on a fait voir dans le Livre précedent * qu'une fraction $\frac{a}{b}$ exprimoit la division du premier terme a par le second terme b ; & que la fraction $\frac{a}{b}$ étoit le quotient de a divisé par b. * 115.

Ainsi le calcul des fractions, des rapports, & des quotiens, (exprimez en fraction, dont le dividende est le premier terme, & le diviseur le second terme,) est le calcul des mêmes grandeurs.

Une grandeur litterale, soit incomplexe comme a, ab, abc, *&c.* soit complexe comme $a^2 + 2ab + b^2$, est une grandeur entiere, quand elle n'a pas de diviseur écrit au dessous. Mais $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a - b}$, sont des fractions.

On remarquera aussi que quand une grandeur quelconque représentée par x, est écrite au devant d'une fraction vers la droite, comme $\frac{1}{3}x$, $\frac{a}{b}x$, $\frac{2a}{c}x$, cette grandeur x est censée au numerateur de la fraction. Ainsi $\frac{1x}{2} = \frac{1}{2}x$; $\frac{ax}{b} = \frac{a}{b}x$; $\frac{2ax}{c} = \frac{2a}{c}x$,

AVERTISSEMENT.

LES Commençans doivent relire ici tout ce que l'on a expliqué des rapports & des proportions dans la premiere section *depuis l'article 35 jusqu'à la fin de la premiere section*. Au commencement de la 3e section *depuis l'article 72 jusqu'à 77*, & au commencement de la 4e section depuis l'*art.* 106 *jusqu'à* 125, & se rendre toutes ces choses très familieres, comme on les a avertis en ces endroits-là.

I. THEORÊME.

215. *LORSQUE deux rapports numeriques sont égaux comme* $\frac{2}{3}$ *&* $\frac{4}{6}$, *& pour les exprimer en general* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; *celui de ces deux rapports dont l'antecedent est le moindre, a aussi son consequent moindre que l'autre.*

Démonstration. Il faut démontrer que si *a* est moindre que *c*, necessairement *b* est moindre que *d*. Le consequent *b* ne peut pas être égal au consequent *d*; car *a* moindre, par la supposition que *c*, auroit un moindre rapport à la gran-
* 41. deur *b* * que ne seroit celui de *c* à la grandeur *d* égale à *b*; ce qui est contre la supposition. Il est encore moins possible que le consequent *b* soit plus grand que *d*; car le rap-
* 39. port de *a* * devenant plus petit à mesure que le consequent avec lequel on le compare devient plus grand, si le rapport de *a* à une grandeur *b* égale à *d*, est déja moindre que le rapport de *c* à *d*, à plus forte raison le rapport de *a* à une grandeur *b* plus grande que *d*, seroit plus petit que le rapport $\frac{c}{d}$. Donc le rapport $\frac{a}{b}$ étant supposé égal à $\frac{c}{d}$, si *a* est moindre que *c*, il faut nécessairement que *b* soit moindre que *d*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

216. PARMI tous les rapports numeriques égaux, comme $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$, *&c.* Il y en a un seul, dans cet exemple, c'est $\frac{2}{3}$, dont l'antecedent est moindre (c'est à dire contient moins d'unitez) que l'antecedent de chacun des autres, & dont le consequent est moindre que le consequent de chacun des autres. Car les deux termes de chaque rapport étant des nombres entiers, il ne peut pas se trouver plus d'un rapport

égal à chacun des autres, dont les deux termes contiennent chacun le plus petit nombre d'unitez qu'il se puisse.

DE'FINITION.

CELUI d'entre plusieurs rapports égaux qui a les moindres termes s'appellera *le moindre rapport*, *le rapport réduit aux moindres termes*, *le rapport le plus simple*, *la rapport primitif*, *la fraction primitive*.

COROLLAIRE II.

217. TOUT rapport ou toute fraction, dont l'unité est l'un des deux termes, est toujours un moindre rapport. Ainsi en supposant que *n* représente tel nombre entier qu'on voudra, $\frac{1}{n}$ & $\frac{n}{1}$ sont chacun un moindre rapport. Car en toute fraction qui sera égale à $\frac{1}{n}$ ou à $\frac{n}{1}$, il est évident que le terme correspondant à 1 sera toujours plus grand que 1; par consequent le terme correspondant à *n* * sera plus grand que *n*. * 215.

D'où l'on voit que tout nombre entier $\frac{n}{1}$ *, regardé comme une fraction, dont l'unité est le dénominateur, est toujours un moindre rapport. * 215.

COROLLAIRE III.

218. TOUS les rapports, d'une suite infinie de rapports égaux, sont égaux chacun au moindre rapport; & tous les rapports égaux au moindre rapport, sont égaux entr'eux. Car tous les rapports égaux sont des grandeurs égales, dont l'expression la plus simple est celle du moindre rapport qui leur est égal.

II. THEORÊME.

219. *DANS une suite infinie qu'on peut concevoir de rapports numeriques égaux, nommant le moindre* $\frac{a}{b}$, *& chaque autre* $\frac{c}{d}$: *l'antecedent* c *de chaque rapport contient toujours exactement l'antecedent* a *du moindre rapport un certain nombre de fois qu'on nommera* n, *& le consequent* d *du même rapport* $\frac{c}{d}$ *contient toujours exactement le consequent* b *du moindre rapport le même nombre de fois* n, *c'est à dire* $\frac{c}{d} = \frac{na}{nb}$.

Démonstration. Les deux termes du rapport $\frac{c}{d}$ * étant plus grands que les termes correspondans du moindre rapport $\frac{a}{b}$, on peut ôter *a* de *c*, & *b* de *d*. Or qu'on ôte *a* de *c* une fois, deux fois, trois fois, & ainsi de suite autant qu'on le pourra; * 215.

& qu'en même temps on ôte b de d une fois, deux fois, trois fois, ainsi de suite; de maniere que b soit retranché de d au-
*58. tant à chaque fois que a est retranché de c: il est évident * que les rapports $\frac{c-1a}{d-1b}$, $\frac{c-2a}{d-2b}$, $\frac{c-3a}{d-3b}$, & ainsi de suite, formez par les restes, seront tous égaux chacun au rapport $\frac{c}{d}$, & à son égal $\frac{a}{b}$. On va démontrer qu'après tous ces retranchemens on arrivera à un rapport formé par les derniers restes, qui sera précisément le moindre rapport $\frac{a}{b}$.

Car, 1°, le dernier reste ne sçauroit avoir ses termes plus grands que $\frac{a}{b}$, puisqu'on pourroit encore retrancher a de l'antecedent de ce reste, & b du consequent de ce reste. 2°. Le dernier reste ne sçauroit avoir son antecedent plus petit que a, & son consequent moindre que b, puisque si cela arrivoit, $\frac{a}{b}$ ne seroit pas le moindre rapport, celui que formeroient les derniers restes étant moindre que $\frac{a}{b}$; ce qui est contre la supposition. On arrivera donc necessairement en retranchant a de c, & en même temps b de d le même nombre de fois, & continuant de faire ces retranchemens autant qu'on pourra, à un rapport qui sera le même que $\frac{a}{b}$. Par consequent chacun des rapports égaux représentez par $\frac{c}{d}$ peut être représenté par $\frac{na}{nb}$: *Ce qu'il falloit démontrer*.

COROLLAIRE I.

220. LES deux termes d'un rapport numerique quelconque qui n'est pas le moindre, ont toujours un diviseur exact n qui leur est commun.

COROLLAIRE II.

221. $\frac{a}{b}$ étant un moindre rapport, & $\frac{c}{d}$ représentant chaque rapport égal à $\frac{a}{b}$, l'antecedent a est toujours un diviseur exact de c, & le consequent b un diviseur exact de d. Et a est toujours contenu dans c autant de fois que b est contenu dans d.

AVERTISSEMENT.

ON peut étendre à autant de nombres qu'on voudra, ce qu'on vient de démontrer de deux nombres. Par exemple, autant de nombres entiers qu'on voudra, qui seront représentez par les lettres A, B, C, D, *&c.* étant donnez, il est évident que les rapports qui sont entre ces nombres sont determinez (on voit bien qu'il n'est pas necessaire que ces rap-

ports soient égaux.) On n'en prendra que trois *A*, *B*, *C*, & ce qu'on en dira dans le 3e Theorême & ses Corollaires, pourra aisément s'appliquer à tant d'autres qu'on voudra.

III. THEORÊME.

222. *LORSQUE trois nombres entiers* A, B, C, *sont déterminez, & que trois autres*, a, b, c, *ont les mêmes rapports entr'eux qu'ont les trois* A, B, C *pris dans le même ordre, de maniere que ceux qui sont marquez par les mêmes lettres* A, a, &c. *soient ceux qui se répondent; si l'un des trois derniers comme* a *est moindre que le correspondant* A *des trois autres;* b *est aussi moindre que* B, *&* c *moindre que* C.

Car les rapports de *A*, *B*, *C* étant déterminez, & les trois *a*, *b*, *c* ayant les mêmes rapports; il est évident * que *a* ne peut être moindre que *A*, que *b* ne soit aussi moindre que *B*, & *c* moindre que *C*. * 215.

COROLLAIRE I.

223. TROIS nombres entiers *A*, *B*, *C* étant déterminez, il ne peut y avoir que trois nombres *a*, *b*, *c*, qui soient les moindres qu'il se puisse, qui ayent entr'eux les mêmes rapports, qu'ont entr'eux *A*, *B*, *C*.

COROLLAIRE II.

224. TROIS nombres étant donnez *A*, *B*, *C*, qui ont entr'eux trois rapports déterminez par ces nombres; si l'unité est l'un de trois nombres donnez, par exemple si $A = 1$; ils sont moindres que trois autres nombres entiers tels qu'ils puissent être, qui auront les mêmes rapports entr'eux qu'ont les trois nombres donnez, dont l'un est l'unité.

COROLLAIRE III.

225. TROIS nombres *a*, *b*, *c*, étant les moindres qui ayent entr'eux les rapports qu'ils ont, si *A*, *B*, *C* représentent trois autres nombres qui ont les mêmes rapports; *a* est autant de fois contenu dans *A*, que *b* dans *B*, & que *c* dans *C*. Ainsi *n* représentant le nombre de fois que *a* est dans *A*, on a toujours $na = A$; $nb = B$; $nc = C$.

Ce Corollaire se démontre comme * le second Theorême. * 219.

COROLLAIRE IV.

226. TROIS nombres entiers *A*, *B*, *C* n'étant pas les moindres qui ayent les mêmes rapports, ils ont toujours un même diviseur commun *n*.

COROLLAIRE V.

227. *a*, *b*, *c* étant les moindres nombres entiers entre les nombres entiers qui ont les mêmes rapports, lesquels autres nombres entiers sont ici représentez par *A*, *B*, *C*; ces trois moindres nombres *a*, *b*, *c*, sont chacun un diviseur exact de leur nombre correspondant; & chacun des trois moindres *a*, *b*, *c* est contenu le même nombre de fois dans son correspondant.

Tous ces Corollaires se déduisent évidemment du troisiéme Theorême, comme l'on a déduit les semblables propositions sur le moindre rapport, du I. Theorême.

DE'FINITION.

228. UN nombre qui n'a aucun diviseur exact que lui-même & l'unité, s'appelle un nombre *simple*, & encore un nombre *premier*. Ainsi 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, &c. sont des nombres *premiers* ou *simples*.

DE'FINITION.

229. DEUX ou plusieurs nombres s'appellent *premiers entr'eux*, lorsqu'ils n'ont aucun diviseur commun que l'unité. On nomme aussi le diviseur d'un nombre la *mesure* de ce nombre-là. Ainsi deux ou plusieurs nombres premiers entr'eux n'ont aucune autre mesure commune que l'unité. Par exemple 2 & 3 sont premiers entr'eux. 12 & 25 sont aussi premiers entr'eux: car quoique 12 & 25 ayent chacun separément des diviseurs, cependant ils n'en ont aucun de commun que l'unité.

COROLLAIRE.

230. DEUX nombres qui sont chacun un nombre premier, sont toujours premiers entr'eux; car chacun n'ayant aucun diviseur commun que lui-même & l'unité, ils ne peuvent avoir aucun diviseur commun.

DE'FINITION.

231. DEUX ou plusieurs nombres qui ont quelque diviseur commun, s'appellent *composez*, l'un par rapport à l'autre. Quand même un nombre seroit premier, s'il est lui-même un diviseur exact d'un ou de plusieurs autres ; ce nombre premier & les autres dont il est diviseur, ne sont pas premiers entr'eux, mais ils sont des nombres composez. Ainsi 5 & 15 sont des nombres composez. 3 & 6 sont des nombres composez. 3, 6, 30 sont des nombres composez.

IV. THEORÊME.

232. *LES deux nombres qui sont les termes d'un moindre rapport, sont premiers entr'eux : Et deux nombres premiers entr'eux sont toujours un moindre rapport.*

Démonstration de la premiere partie. Car s'ils avoient un diviseur commun, en divisant chaque terme par ce commun diviseur, les deux quotients * auroient le même rapport, *109.
qui seroit pourtant en moindres termes. Ainsi le rapport proposé ne seroit pas un moindre rapport, ce qui est contre la supposition.

Démonstration de la seconde partie. Deux nombres, qui ne sont pas un moindre rapport, * ont toujours un diviseur *220.
commun : Donc deux nombres qui n'ont pas de diviseur commun, sont un moindre rapport.

REMARQUES.

233. IL y a aussi parmi les grandeurs litterales des grandeurs premieres, des grandeurs premieres entr'elles & des grandeurs composées. Une grandeur litterale, soit incomplexe comme a, b, c, &c. soit complexe d'une ou de plusieurs dimensions, comme les grandeurs lineaires $a + b$; $a - b$, $a + b - c$; les grandeurs de deux dimensions $a^2 + b^2$, $a^2 + ab + cc$; les grandeurs de trois dimensions $x^3 + a^3$, $x^3 - ax^2 + a^2b$, & ainsi des autres; chacune de ces grandeurs litterales est nommée *premiere* ou *simple*, quand elle n'a aucun diviseur exact qu'elle-même ou l'unité, comme sont chacune des grandeurs qu'on vient de marquer.

Deux ou plusieurs grandeurs litterales incomplexes ou complexes, d'une seule dimension ou de plusieurs dimensions,

sont nommées *premieres entr'elles*, quand elles n'ont aucun diviseur commun, & que la moindre de ces grandeurs n'est pas un diviseur exact des autres. Ainsi a^2 & b^2 sont premieres entr'elles. $a + b - c$, & $a - b + d$, sont premieres entr'elles. $a^2 + ab + b^2$, & $a^2, - ab + c^2$, sont premieres entr'elles.

Deux ou plusieurs grandeurs litterales sont composées, quand elles ont quelque diviseur commun. Ainsi a^2 & ab, qui ont a pour diviseur commun, sont composées. $a^2 - b^2$, & $a + b$, qui ont $a + b$ pour diviseur commun, sont composées.

AXIOMES *sur les diviseurs des grandeurs.*

1.

234. UNE grandeur (par exemple d) qui est un diviseur exact de chacune des parties ad, bd, cd d'un tout $ad + bd + cd$, est aussi un diviseur exact du tout $ad + bd + cd$.

2.

235. Un diviseur exact (qu'on représentera par d) d'une grandeur a, est aussi un diviseur exact de toute grandeur, dont a est un diviseur exact, c'est à dire, qui est multiple de a, comme de $2a$, $3a$, $4a$, en general de na, en supposant que n représente tel nombre entier qu'on voudra.

3.

236. Un diviseur exact d d'une grandeur entiere $ad + bd$, & de l'une de ses deux parties ad, est aussi diviseur exact de l'autre partie bd.

4.

237. Un diviseur exact d d'un nombre a, est premier à l'égard de tout nombre b, avec qui a est un nombre premier. Car il est évident que si b avoit un diviseur commun avec d, il auroit un diviseur commun avec a, dont d est diviseur; ce qui est contre la supposition.

V. THEORÊME.

238 *SI un nombre* c *est premier à l'égard de chacun de deux autres* a *&* b, *ce nombre* c *& le produit* ab *des deux autres, sont premiers entr'eux.*

Démonstration,

Démonstration. Si ab & c pouvoient avoir un diviseur commun d, que q soit le quotient de ab divisé par ce diviseur d commun à c & à ab. L'on en déduira * $ab = dq$; ce qui * 107.
donnera * $\frac{a}{d} = \frac{q}{b}$. Mais c étant premier avec a par la supposition; d diviseur de c, & a, sont * premiers entr'eux. Par * 120. * 237.
consequent * $\frac{a}{d}$ est un moindre rapport : d'où il suivra * que c * 232.
& b auront d pour diviseur commun. Mais cela * détruit la * 221.
supposition que c & b n'ont aucun diviseur commun. Par consequent il ne se peut pas faire que c & le produit ab ne soient pas premiers entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.* * 237.

COROLLAIRE I.

239. Si les nombres a & b sont premier l'un & l'autre à chacun des nombres c & d; les produits ab & cd sont premiers entr'eux.

Car a & b étant premiers avec c; * ab & c sont premiers entr'eux. Par la même raison a & b étant premiers avec d; * 238.
* ab & d sont premiers entr'eux. Ainsi ab est premier avec c * 238.
& avec d : par consequent * ab & cd sont premiers entr'eux. * 238.

COROLLAIRE II.

240. Si deux nombres a & b sont premiers entr'eux, toutes les puissances a^2, a^3, a^4, &c. du premier a n'ont aucun diviseur commun avec le second b, ni avec ses puissances.

Démonstration. Car a & a sont chacun par la supposition un nombre premier avec b ; donc * a^2 & b sont premiers entr'eux : par consequent a^2 est premier à l'égard de b & de b ; * 238.
d'où il suit que * a^2 & b^2 sont premiers entr'eux. Il est évident qu'on peut continuer d'appliquer successivement cette démonstration à toutes les puissances de a & de b, & faire voir que a, & chacune de ses puissances, n'ont point de diviseur commun avec b, ni avec chacune des puissances de b. * 238.

COROLLAIRE III.

241. Les termes a & b d'un moindre rapport $\frac{a}{b}$ * étant premiers * 232.
entr'eux; chacun des rapports à l'infini $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, $\frac{a^5}{b^5}$, en general $\frac{a^m}{b^m}$ (en supposant que m représente un nombre entier quelconque) dont les termes sont les semblables puis-

*232. sances de a & de b; sont * un moindre rapport; car les deux
*240. termes de chacun de ces rapports * sont premiers entr'eux.

COROLLAIRE IV.

242. Si $\frac{a}{b}$ est un moindre rapport, & que chacun des rapports
*241. égaux à $\frac{a}{b}$ soit représenté par $\frac{c}{d}$; le rapport $\frac{a^m}{b^m}$ (qui * est toujours un moindre rapport) formé de deux puissances du même degré de a & de b, dont l'exposant est un nombre entier quelconque représenté par m, est égal au rapport $\frac{c^m}{d^m}$ des deux termes c & d élevez à la même puissance dont m est l'exposant.

Démonstration. a & b étant contenus, le premier dans c,
*221. le second en d *, le même nombre de fois qu'on nommera n;
*107. il est évident que $c =$ * an, & $d = bn$. Ansi $\frac{c}{d} = \frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$
*211. Par consequent * $\frac{c^m}{d^m} = \frac{a^m n^m}{b^m n^m}$. Mais $\frac{a^m n^m}{b^m n^m} =$ * $\frac{a^m}{b^m}$. Donc *
*75. & 109.
*52. $\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$.

COROLLAIRE V.

243. Si chacun des termes d'une fraction $\frac{a}{b}$ est une puissance numerique parfaite du même degré, par exemple, chacun un quarré parfait $\frac{a^2}{b^2}$ ou une 3e puissance parfaite $\frac{a^3}{b^3}$, ou une 4e $\frac{a^4}{b^4}$, ou en general $\frac{a^m}{b^m}$; & que cette fraction soit égale à un nombre entier qu'on représentera par $\frac{n}{1}$; ce nombre entier sera necessairement une puissance parfaite du degré de la puissance de chaque terme de la fraction.

Démonstration. Si la fraction numerique $\frac{a}{b}$ n'est pas un moindre rapport; que la fraction numerique $\frac{e}{f}$ soit le moindre rapport égal à $\frac{a}{b}$. (Si $\frac{a}{b}$ est un moindre rapport, ce que l'on va démontrer par rapport à $\frac{e}{f}$, conviendra aussi à $\frac{a}{b}$.)
*241. Puisque $\frac{e}{f}$ est un moindre rapport, $\frac{e^m}{f^m}$ * est aussi un moindre
*242. rapport. Mais $\frac{e^m}{f^m}$ * est égale à $\frac{a^m}{b^m}$ qui est égale par la supposition au nombre entier $\frac{n}{1}$, & ce nombre entier $\frac{n}{1}$ est tou-

jours * un moindre rapport : ainsi $\frac{e^m}{f^m}$ qui est le même moindre rapport, ne differe point de * $\frac{n}{1}$. Par consequent f^m est l'unité, & $e^m = n$. Or e^m est la puissance parfaite d'un nombre entier e, laquelle puissance a pour exposant le nombre entier représenté par m. Le nombre entier n, égal par la supposition à la fraction $\frac{a^m}{b^m}$, est donc une puissance numerique parfaite, dont l'exposant est m. *Ce qu'il falloit démontrer.* * 217. * 216.

AVERTISSEMENT.

On déduira de là, *art.* 305. *& les suivans*, la démonstration qui fait voir qu'il y a des grandeurs incommensurables ; quand on aura expliqué le calcul des grandeurs rompues.

COROLLAIRE VI.

244. Soient tant de nombres premiers qu'on voudra représentez par a, b, c, d, *&c.* Soit un autre nombre premier représenté par f ; le produit de tous les nombres premiers $abcd$, ou de telles puissances qu'on voudra de chacun de ces nombres premiers, qu'on peut représenter en general par $a^m b^n c^p d^q$, ne sçauroit avoir, pour un de ses diviseurs exacts, aucun autre nombre premier, comme f, different des nombres premiers qui composent le produit ; ni aucune puissance f^r du nombre premier f.

Démonstration. 1°. a, b & f étant chacun un nombre premier ; ab & f * sont premiers entr'eux. A présent ab, & le nombre premier c, sont premiers avec f. Ainsi * abc & f, sont premiers entr'eux. Enfin abc, & le nombre premier d, sont premiers avec f ; par consequent * $abcd$ & f sont premiers entr'eux. 2°. a & a sont, par la supposition, premiers avec f ; par consequent * a^2 & f sont premiers entr'eux : a^2 & a sont donc premiers avec f, par consequent a^3 & f sont premiers entr'eux. Il est facile d'étendre la démonstration à toutes les puissances de a & de f. Ainsi on peut supposer démontré, que a^m & f sont premiers entr'eux. 3° a^m & b sont premiers avec f ; donc $a^m b$ & f sont premiers entr'eux. Ainsi $a^m b$ & b sont premiers avec f ; par consequent $a^m b^2$ & f sont premiers entr'eux ; & comme il est évident que la même démonstra- * 238. * 238. * 238. * 240.

tion peut s'étendre au produit de a^m par toutes les puiſſances de b, qu'on peut repréſenter par $a^m b^n$; il eſt clair qu'on peut regarder comme démontré que $a^m b^n$ & f ſont premiers entr'eux. Ainſi $a^m b^n$, & le nombre premier c, ſont premiers avec f; par conſequent $a^m b^n c$ & f ſont premiers entr'eux. D'où l'on voit clairement que la démonſtration convient au produit $a^m b^n c^p d^q$, par rapport à f, & aux puiſſances de f; & que $a^m b^n c^p d^q$ eſt premier avec f, & encore avec f^r. *Ce qu'il falloit démontrer*.

COROLLAIRE VII.

245. Si deux nombres, repréſentez par a & b, ſont premiers entr'eux ; leur produit ab, eſt le plus petit de tous les nombres, qui ont a & b pour diviſeurs exacts.

Démonſtration. Si ab n'étoit pas le moindre nombre qui eût a & b pour diviſeurs, il faudroit qu'il y eût un autre nombre, qu'on nommera c, qui fût moindre que ab, & qui eût a & b pour diviſeurs. On va démontrer que ce nombre c, qu'on prétendroit ſuppoſer moindre que ab, eſt neceſſairement plus grand que ab.

Que le quotient de c diviſé par a ſoit q ; & le quotient
* 107. de c, diviſé par b, ſoit r. On aura donc * $aq = c = br$. Ce
* 120. qui donnera * $\frac{a}{b} = \frac{r}{q}$. Mais a & b étant premiers entr'eux,
* 232. $\frac{a}{b}$ eſt * un moindre rapport. Par conſequent * a eſt un divi-
* 221. ſeur de r : ainſi a eſt moindre que r. Par la même raiſon, b eſt moindre que q. Si donc l'on met dans $aq = br = c$, b à la place de q, & a à la place de r, l'on aura ab & ba chacun moindre que aq, & que br, c'eſt à dire, moindre que c. On a donc démontré que c eſt plus grand que ab.

COROLLAIRE VIII.

246. Le plus petit nombre, qu'on nommera d, qui a pour diviſeurs exacts, les deux nombres a & b, eſt un diviſeur exact de tout autre nombre, qu'on repréſentera par c, qui a pour diviſeurs exacts a & b.

Démonſtration. Puiſque d eſt ſuppoſé le moindre nombre qui ait a & b pour diviſeurs exacts; le nombre c, qui a auſſi a & b pour diviſeurs exacts, doit être plus grand que d; ainſi qu'on ôte d de c autant de fois qu'on pourra ; ſi après le dernier retranchement l'on a zero pour reſte, d eſt un diviſeur

exact de c : *ce qu'il falloit prouver*. Si après la derniere soustraction, on trouve un reste, qu'on nommera r, qui doit être moindre que d, & que n marque le nombre de fois que l'on aura ôté d de c, l'on aura * $nd + r = c$. Mais a & b étant des diviseurs exacts de d & de c, a & b sont aussi des diviseurs exacts * de nd multiple de d, & * du reste r. Si donc ce reste r est moindre que d; le nombre r, moindre que d, aura pour diviseurs a & b: ce qui détruit la supposition qu'on a faite, que d étoit le plus petit nombre qui avoit pour diviseurs a & b. Il ne se peut donc pas faire que le plus petit nombre d, qui a pour diviseurs a & b, ne soit pas un diviseur exact de tout nombre c, qui a pour diviseurs a & b. *Ce qu'il falloit démontrer*.

* 107. * 235. * 236.

COROLLAIRE IX.

247. QU'ON suppose telle suite de nombres qu'on voudra a, b, c, d, &c. qui soient premiers entr'eux; leur produit $abcd$ sera le plus petit nombre qui ait pour ses diviseurs les mêmes nombres a, b, c, d.

Démonstration. Le moindre nombre qui aura pour diviseurs a, b, c, doit avoir pour diviseur * ab, qui * est le moindre nombre qui ait a & b pour diviseurs. Puis donc qu'il doit avoir ab & c pour diviseurs, & que ab & c * sont premiers entr'eux; il est évident que abc * étant le plus petit nombre qui ait ab & c pour diviseurs, il est aussi le plus petit nombre qui ait a, b, c pour diviseurs.

* 246. * 245. * 239. * 245.

Il est évident qu'on peut appliquer cette démonstration par ordre aux produits $abcd$, $abcde$, &c. des nombres, a, b, c, d, e, &c. qu'on suppose premiers entr'eux.

COROLLAIRE X.

248. LE moindre nombre, qui a pour diviseurs exacts tant de nombres a, b, c, d, qu'on voudra, est un diviseur exact de tout autre nombre, qui a les mêmes nombres pour diviseurs.

La démonstration est semblable à celle du 8e Corollaire *. * 246.

REMARQUE.

249. LES propositions qu'on vient de demontrer sur les nombres, sont des axiomes par rapport aux grandeurs litterales; & les expressions litterales en font clairement voir la verité.

PROBLÊME.

250. *TROUVER le plus grand diviſeur commun de deux grandeurs numeriques ou litterales.*

Regle ou operation. Nommant la premiere celle des deux grandeurs qui eſt la plus grande, & l'autre la ſeconde; 1°. Il faut diviſer la premiere qu'on nommera *A*, par la ſeconde qu'on nommera *B*. Si la diviſion ſe peut faire exactement, la ſeconde grandeur *B* eſt évidemment le plus grand diviſeur commun qu'on cherche.

2°. Si la diviſion ne peut ſe faire ſans un reſte, qu'on nommera *C*; il faut négliger le quotient de la diviſion, & diviſer la ſeconde grandeur *B* par le reſte *C*. Si la diviſion eſt exacte; *C* eſt le plus grand diviſeur commun qu'on cherche.

3°. Si la diviſion laiſſe un reſte *D*, il faut négliger le quotient, & diviſer le premier reſte *C* par le ſecond *D*; & ſi la diviſion laiſſe un reſte *E*, diviſer le ſecond reſte *D* par le troiſiéme *E*, & continuer ainſi de diviſer (en négligeant les quotients) le reſte précedent par le ſuivant, juſqu'à ce qu'on trouve un reſte qui faſſe la diviſion exactement. Ce reſte ſera le plus grand diviſeur commun. Si l'on arrivoit à l'unité, & qu'on ne trouvât que l'unité pour diviſeur commun; les deux grandeurs propoſées n'auroient pas d'autre diviſeur commun que l'unité.

Exemples ſur les grandeurs numeriques.

I. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun de 35 & de 7; On diviſera 35 par 7; & la diviſion étant exacte, il eſt évident que 7 eſt le plus grand diviſeur commun que l'on cherchoit.

II. EXEMPLE.

ON trouvera de même le plus grand diviſeur commun de 255 & de 80. 1°. En diviſant 255 par 80, on trouvera le quotient 3, qu'on négligera, & le reſte 15. 2°. On diviſera la ſeconde grandeur 80 par 15, & l'on trouvera le quotient 5, qu'on négligera, & le reſte 5. 3°. On diviſera le premier reſte 15 par le ſecond reſte 5; & la diviſion étant exacte, le ſecond reſte 5 eſt le plus grand diviſeur commun de 255 & de 80 que l'on cherchoit.

III. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun de 6503 & de 3010, 1°. On diviſera 6503 par 3010, on trouvera le quotient 2, qu'on négligera, & le reſte 483. 2°. On diviſera 3010 par le premier reſte 483. On trouvera le quotient 6, qu'on négligera, & le reſte 112. 3°. On diviſera le premier reſte 483 par le ſecond reſte 112; & l'on trouvera le quotient 4, qu'on négligera, & le reſte 35. 4°. On diviſera le ſecond reſte 112 par le troiſiéme reſte 35; & on trouvera le quotient 3, qu'on négligera, & le reſte 7. Enfin on diviſera le troiſiéme reſte 35 par le quatriéme reſte 7; & la diviſion étant exacte, le dernier reſte 7, qui eſt un diviſeur exact du reſte précedent, eſt le plus grand diviſeur qu'on cherchoit.

Methode pour les grandeurs litterales.

I. *Pour les grandeurs incomplexes.*

251. REGLE. Quand les grandeurs ſont incomplexes, il eſt inutile de ſuivre la regle du Problême; il ſuffit de prendre le produit de toutes les lettres communes à chacune des grandeurs, dont on cherche le plus grand diviſeur commun; ce produit de toutes les lettres communes eſt le plus grand diviſeur commun qu'on cherche.

Par exemple pour trouver le plus grand diviſeur commun des deux grandeurs $a^5b^3c^4de$, $a^3bc^3d^3f$, il faut prendre le produit a^3bc^3d de toutes les lettres communes; il eſt évident que ce produit eſt le plus grand diviſeur commun qu'on cherche.

II. *Pour les grandeurs complexes.*

252. REGLE *ou methode*. Il faut ſuivre la regle du Problême; mais les grandeurs litterales complexes ayant encore quelque choſe qui leur eſt propre, on va mettre ici la methode entiere qui leur convient. Il faut d'abord ordonner les termes de chacune des grandeurs, dont on cherche le plus grand diviſeur commun, par rapport à une même lettre. Quand ces grandeurs contiennent quelque lettre qui marque une grandeur inconnue, il faut les ordonner par rapport à cette lettre. Quand les lettres ſont toutes connues, on peut ordonner les termes de ces grandeurs, par rapport

à celle des lettres qu'on voudra. On mettra dans les exemples les deux grandeurs complexes toutes ordonnées par rapport à la lettre qui en distinguera les termes, & cet article n'est que pour en avertir. 1°. Si les termes de chacune des deux grandeurs complexes sont tous multipliez par quelque grandeur litterale ou numerique, il faut les diviser tous par cette grandeur, qui en est un diviseur commun; & écrire à part ce diviseur commun; & quand on aura trouvé le plus grand diviseur commun des deux quotients, il faudra le multiplier par ce diviseur commun qu'on aura trouvé d'abord; & le produit sera le plus grand diviseur commun des deux grandeurs proposées.

2°. On nommera *A* celle des deux grandeurs proposées, qui doit servir de dividende dans la recherche du plus grand diviseur commun; *B*, celle qui doit servir de diviseur; *C*, le reste qu'on peut trouver après avoir divisé *A* par *B*; *D*, le reste qui peut se rencontrer après avoir divisé *B* par le premier reste *C*; & ainsi de suite. Quand on apperçoit, avant de diviser soit *A* par *B*; soit *B* par *C*, soit *C* par *D*, *&c.* que tous les termes du diviseur de quelqu'une de ces divisions sont multipliez par une même grandeur qui en est un diviseur commun, mais qui n'est pas en même temps un diviseur commun de tous les termes du dividende, & qui par consequent ne doit pas entrer dans le plus grand diviseur commun; il faut toujours abreger l'expression du diviseur, en divisant tous ses termes par le diviseur qui leur est commun à tous, & prendre le quotient qui en viendra pour le diviseur. Quand ce sont tous les termes du dividende qui ont un diviseur commun entr'eux, mais qui n'est pas commun au diviseur, & qui par consequent ne doit pas entrer dans le plus grand diviseur commun; on doit aussi abreger l'expression du dividende, en le divisant par le diviseur commun à tous les termes, quand cela n'empêche pas de faire la division de ce dividende par le diviseur, c'est à dire, quand ce diviseur commun à tous les termes du dividende, ne contient point la lettre qui en distingue les termes.

3°. Il faut diviser celle des deux grandeurs complexes proposées, dans laquelle la lettre, qui en distingue les termes, a le plus de dimensions dans le premier terme (qu'on a nommée *A*) par l'autre grandeur qu'on a nommée *B*; & si le premier

premier terme de chacune de ces deux grandeurs complexes contient une égale puissance de la lettre qui distingue les termes, on prendra celle des deux qu'on voudra pour dividende *A*, & l'autre pour diviseur *B*. Si la division est exacte, la grandeur *B*, qui a servi de diviseur, sera elle-même le plus grand diviseur commun qu'on cherche.

Si la division de tous les termes du dividende ne se peut faire exactement, on la continuera toujours jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste *C* dans le 1[er] terme du quel reste *C*, la lettre qui distingue les termes, soit d'un moindre degré, que dans le premier terme du diviseur *B*. On négligera le quotient, & l'on divisera la grandeur *B* par le reste *C*. Si la division est exacte, le reste *C* est le plus grand diviseur commun qu'on cherche.

Si la division de *B* par le reste *C* donne un reste *D*; on négligera le quotient, & on divisera le premier reste *C* par le second reste *D*; & si la division laisse un reste *E*, on divisera le second reste *D* par le troisiéme *E*; & l'on continuera de diviser ainsi le reste précedent par le suivant, jusqu'à ce qu'on ait trouvé un reste qui divise exactement le precedent. Le dernier reste, qui sera un diviseur exact du précedent, sera le plus grand diviseur commun qu'on cherchoit.

4°. Si l'on arrive à un reste qui soit une grandeur simple ou premiere, c'est à dire, qui n'ait point d'autre diviseur qu'elle-même & l'unité; & que ce reste ne soit pas un diviseur exact du reste précedent, & que l'on n'ait pas trouvé par le premier article de diviseur commun à tous les termes de l'une & de l'autre des deux grandeurs proposées, elles n'ont point de plus grand diviseur commun que l'unité.

5°. Quand en faisant les divisions que prescrit cette méthode, on trouve une fraction pour quotient; il faut préparer le dividende de maniere que la division donne une grandeur entiere pour quotient. Voici comment se fait cette préparation. On efface du quotient qui est une fraction, dont le numerateur est le premier terme du dividende, & le dénominateur est le premier terme du diviseur; on efface, dis-je, les lettres communes, ou le diviseur qui est commun au numerateur & au dénominateur, * ce qui ne change point la valeur de la fraction. Ensuite on multiplie tous les termes du dividende par le dénominateur de la fraction, qu'on a

* 109.

trouvée pour quotient, ainſi abregée. Après cette préparation du dividende, on trouvera, en faiſant la diviſion, une grandeur entiere pour quotient de cette diviſion.

Quand on ſçaura la diviſion des fractions, qu'on expliquera dans la ſuite ; on pourra faire la diviſion ſans cette préparation, laquelle neanmoins rend le calcul plus facile.

I. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun de $a^3b^2 - a^3c^2$ & $adb - acd$, qui ſont ordonnées par rapport à la lettre b

1°. Voyant que a eſt un diviſeur commun de ces deux grandeurs, je l'efface de tous les termes de l'une & de l'autre; & les deux grandeurs ſur leſquelles je dois operer, ſont $a^2b^2 - a^2c^2$ & $db - dc$. Et quand j'aurai trouvé leur plus grand diviſeur commun, il faudra le multiplier par a, pour avoir le plus grand diviſeur commun des deux grandeurs propoſées.

$a^3b^2 - a^3c^2$	diviſeur commun a
$adb - acd$	plus grand diviſeur commun $ab - ac$

2°. Je remarque que tous les termes du diviſeur $db - cd$ ont d pour diviſeur commun; mais n'étant pas un diviſeur commun des termes du dividende $a^2b^2 - a^2c^2$, il ne doit point entrer dans le plus grand diviſeur commun. J'efface d, & la grandeur qui doit ſervir de diviſeur eſt réduite à $b - c$. Je remarque auſſi que a^2 eſt un diviſeur commun de tous les termes du dividende $a^2b^2 - a^2c^2$; mais n'étant pas commun aux termes du diviſeur, il ne doit pas entrer dans le plus grand diviſeur commun; & comme ce diviſeur a^2, commun à tous les termes du dividende, ne contient point la lettre b qui en diſtingue les termes, je diviſe le dividende $a^2b^2 - a^2c^2$ par a^2, & le dividende eſt réduit à l'expreſſion plus ſimple $b^2 - c^2$.

3°. Je diviſe $b^2 - c^2$ par $b - c$; & je trouve que la diviſion eſt exacte. Ainſi $b - c$ eſt le plus grand diviſeur commun de $b^2 - c^2$, & de $b - c$; & le multipliant par le diviſeur commun a aux deux grandeurs propoſées trouvé par la premiere operation, le produit $ab - ac$ eſt le plus grand diviſeur commun des deux grandeurs propoſées $a^3b^2 - a^3c^2$, $adb - acd$.

REMARQUE.

Si $b - c$ n'eût pas été un diviseur exact de $b^2 - c^2$; comme $b - c$ est une grandeur simple qui ne peut avoir de diviseur qu'elle & l'unité, les deux grandeurs proposées n'auroient point eu d'autre plus grand diviseur commun que a, que l'on a trouvé par le premier article de l'operation.

AVERTISSEMENT.

On a mis dans ce premier exemple, qui est très simple, la pratique des deux premiers articles de la methode; afin que les Commençans les conçussent clairement, leur attention n'étant partagée par aucune autre chose.

II. EXEMPLE.

$$a^2x^2 - a^2c^2$$
$$- c^2x^2 + c^4$$

$$4a^2x - 2ac^2$$
$$- 4acx + 2c^3$$

Soit proposé de trouver le plus grand diviseur commun de $a^2x^2 - c^2x^2 - a^2c^2 + c^4$, & de $4a^2x - 4acx - 2ac^2 + 2c^3$, qui sont ordonnées par rapport à la lettre x. Appercevant que le premier terme de l'une & l'autre de ces deux grandeurs complexes proposées, est une grandeur complexe; j'examine si la grandeur complexe $a^2 - c^2$ qui est multiplicateur de la plus haute puissance x^2 de la premiere grandeur dans son premier terme, n'est point un diviseur commun de tous les termes de la premiere grandeur, je trouve qu'elle en est un diviseur exact: mais pour voir si je dois diviser le dividende par ce diviseur exact $a^2 - c^2$, je cherche si la même grandeur $a^2 - c^2$ ou quelqu'un de ses diviseurs n'est point aussi un diviseur exact de la seconde grandeur. Je vois d'abord que $a^2 - c^2$ n'est pas elle-même un diviseur exact de la seconde grandeur, & qu'ainsi $a^2 - c^2$ n'est pas un diviseur commun aux deux grandeurs proposées. Mais je cherche s'il n'y a point de diviseur exact de $a^2 - c^2$ qui le soit aussi de la seconde grandeur proposée. Et pour cela je cherche le plus grand diviseur commun de $a^2 - c^2$, & de la grandeur $4a^2 - 4ac$, par laquelle la plus haute puissance de x, qui est x même, est multipliée dans le premier terme de la seconde grandeur proposée, & je verrai ensuite plus facilement si ce plus grand diviseur

commun ou quelqu'un de ses diviseurs, ne sera point aussi un diviseur commun des deux grandeurs proposées.

J'opere donc d'abord sur $a^2 - c^2$, & $4a^2 - 4ac$; & voyant que $4a^2 - 4ac$ a pour diviseur $4a$, qui n'est point un diviseur commun à $a^2 - c^2$, je la divise par $4a$, & elle devient $a - c$. Comme $a - c$ est une grandeur simple ou premiere, je cherche si elle n'est point un diviseur de $a^2 - c^2$, & trouvant, en faisant la division, qu'elle en est un diviseur exact; je cherche si chacune des deux grandeurs proposées $a^2x^2 - c^2x^2 - a^2c^2 + c^4$, & $4a^2x - 4acx - 2ac^2 + 2c^3$ peut se diviser exactement par $a - c$; & je trouve, en faisant les deux divisions, que $a - c$ en est un diviseur exact, que le quotient de la premiere est $ax^2 + cx^2 - ac^2 - c^3$, & celui de la seconde $4ax - 2c^2$, j'écris à part le diviseur commun $a - c$.

Je cherche à présent le plus grand diviseur commun de $ax^2 + cx^2 - ac^2 - c^3$, & de $4ax - 2c^2$. Mais je remarque que la premiere de ces grandeurs peut se diviser par $a + c$ qui n'est point un diviseur de la seconde. Je divise donc la premiere par $a + c$, & le quotient est $x^2 - c^2$. Je remarque aussi que la seconde $4ax - 2c^2$ peut se diviser par 2, & le quotient est $2ax - c^2$. Ainsi je cherche le plus grand diviseur commun de $x^2 - c^2$, & de $2ax - c^2$. Mais voyant que la grandeur $2ax - c^2$, qui doit servir de diviseur, est une grandeur premiere ou simple; & qu'elle n'est pas un diviseur exact de $x^2 - c^2$, cela me fait connoître que les deux grandeurs proposées n'ont pas d'autre plus grand diviseur commun que $a - c$ que j'ai trouvé d'abord.

AVERTISSEMENT.

On a mis cet exemple pour faire voir aux Commençans, quand le premier terme de chacune des grandeurs complexes proposées est lui même une grandeur complexe, comment on réduit en pratique dans ce cas le premier article de la methode pour découvrir s'il n'y a point de diviseur commun à tous les termes de l'une & de l'autre des grandeurs proposées.

On va voir dans les exemples suivans la pratique du 3[e] & du 5[e] article de la methode.

III. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun de $x^4 - 4ax^3 + 11a^2x^2 - 20a^3x + 12a^4$, & de $x^4 - 3ax^3 + 12a^2x^2 - 16a^3x + 24a^4$, je diviſe la premiere par la ſeconde; je trouve le quotient 1 que je néglige, & le reſte $- ax^3 - a^2x^2 - 4a^3x - 12a^4$. Je diviſe ce reſte par $- a$, ce qui réduit ce reſte à $x^3 + ax^2 + 4a^2x + 12a^3$.

Je diviſe la ſeconde grandeur propoſée $x^4 - 3ax^3 +$ &c. par ce reſte $x^3 + ax^2 +$ &c. Je trouve le quotient $x - 4a$ que je néglige, & le reſte $+ 12a^2x^2 - 12a^3x + 72a^4$. Je diviſe ce reſte par $+ 12a^2$, & je le réduis par-là à $x^2 - ax + 6a^2$.

Je diviſe le premier reſte $x^3 + ax^2 + 4a^2x + 12a^3$ par le ſecond reſte $x^2 - ax + 6a^2$, & la diviſion étant exacte; le dernier reſte $x^2 - ax + 6a^2$ eſt le plus grand diviſeur commun qu'il falloit trouver.

IV. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun de $3x^3 - 12x^2 + 15x - 6$, & de $- 12x^2 + 30x - 18$, 1°. Je diviſe chacune de ces grandeurs par 3 qui en eſt un diviſeur commun; la premiere eſt réduite à $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, & la ſeconde à $- 4x^2 + 10x - 6$. J'écris à part ce diviſeur commun 3.

2°. Je diviſe la ſeconde grandeur $- 4x^2 + 10x - 6$ par 2 qui eſt un diviſeur commun de tous ſes termes, & elle eſt réduite à $- 2x^2 + 5x - 3$. Mais ce diviſeur 2 de la ſeconde grandeur n'étant pas commun à la premiere, il ne doit point entrer dans le plus grand diviſeur commun.

3°. Je diviſe la premiere grandeur réduite à $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ par $- 2x^2 + 5x - 3$. Mais le quotient étant $\frac{x^3}{-2x^2} = \frac{x}{-2}$, je multiplie, ſuivant le 5e article de la methode, la premiere grandeur $x^3 - 4x^2$, &c. par le dénominateur $- 2$; & j'ai la premiere grandeur préparée $- 2x^3 + 8x^2 - 10x + 4$. Je la diviſe par la ſeconde grandeur $- 2x^2 + 5x - 3$; & je trouve d'abord le quotient $+ x$: & continuant la diviſion, parceque la puiſſance x^2 n'eſt pas moindre dans le dividende que dans le diviſeur, je trouve pour ſecond quotient la fra-

ction $\frac{1}{-2}$. Ainſi, ſuivant le cinquieme article, je prepare le dividende $+ 3x^2 - 7x + 4$, en le multipliant par le denominateur -2; & j'ai le dividende préparé $-6x^2 + 14x - 8$, que je diviſe par le diviſeur $-2x^2 + 5x - 3$, & je trouve le quotient 3, & le reſte $-x + 1$. Je néglige les quotients $x + 3$; & je diviſe la ſeconde grandeur propoſée réduite à $-2x^2 + 5x - 3$ par le reſte $-x + 1$. La diviſion ſe fait exactement: ainſi multipliant par 3 le reſte $-x + 1$, ou bien $+x - 1$ (en changeant les ſignes, ce qui ne change point le diviſeur,) j'ai $-3x + 3$ ou $+3x - 3$, pour le plus grand diviſeur commun, *qu'il falloit trouver*.

V. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun de $x^3 - 2ax^2 - bx^2 + a^2x + 2abx - a^2b$, & de $-2ax^2 - bx^2 + 2a^2x + 4abx - 3a^2b$, je diviſe la premiere par la ſeconde; & trouvant pour premier quotient la fraction $\frac{x}{-2a-b}$, je multiplie, ſuivant le cinquiéme article de la methode, le dividende par le dénominateur $-2a - b$, & j'ai le dividende préparé $-2ax^3 - bx^3 + 4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2 - 2a^3x - 5a^2bx - 2ab^2x + 2a^3b + a^2b^2$.

Je le diviſe par la ſeconde grandeur $-2ax^2 - bx^2$, &c. & je trouve d'abord le quotient x; & continuant la diviſion, je trouve pour quotient la fraction $\frac{2a^2+b^2}{-2a-b}$; ainſi je prépare le reſte du dividende, en le multipliant par le dénominateur $-2a - b$; ce qui me donne le dividende préparé $-4a^3x^2 - 2a^2bx^2 - 2ab^2x^2 - b^3x^2 + 4a^4x + 6a^3bx + 6a^2b^2x + 2ab^3x - 4a^4b - 4a^3b^2 - a^2b^3$. Je le diviſe par le diviſeur $-2ax^2 - bx^2$, &c. & je trouve le quotient $2a^2 + b^2$, & le reſte $-2a^3bx + 4a^2b^2x - 2ab^3x + 2a^4b - 4a^3b^2 + 2a^2b^3$.

Je néglige les quotients x & $2a^2 + b^2$, & je diviſe le reſte précedent par $-2a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3$; ce qui le réduit à $x - a$. Et je diviſe la ſeconde grandeur $-2ax^2 - bx^2$, &c. qui a ſervi juſqu'ici de diviſeur, par le reſte qui a été réduit à $x - a$; la diviſion ſe fait exactement; par conſéquent le reſte $x - a$ eſt le plus grand diviſeur commun *qu'il falloit trouver*.

Préparation pour la démonſtration.

	Premiere.	Seconde.
	A	B
	$A = mB + C$	
	$B = nC + D$	
	$C = pD$	

On ſuppoſera que la premiere grandeur *A* numerique ou litterale étant diviſée par la ſeconde *B*, l'on trouve le quotient *m* & le reſte *C*. Ainſi $A = mB + C$; que la ſeconde *B*, étant diviſée par le premier reſte *C*, on trouve le quotient *n*, & le reſte *D*. Ainſi $B = nC + D$. Qu'enfin, en diviſant le premier reſte *C* par le ſecond reſte *D*, on trouve le quotient exact *p*; ainſi $C = pD$. Il faut démontrer que *D* eſt le plus grand diviſeur commun de *A* & de *B*.

Démonſtration du Problême.

253. 1°. *D* eſt un diviſeur commun de *A* & de *B*. Car *D* étant un diviſeur de *C*, par la ſuppoſition, * eſt un diviſeur de *nC* *235.
multiple de *C*; & étant auſſi diviſeur de lui-même, il eſt diviſeur de $nC + D$; & par conſequent de $B = nC + D$. *D* * eſt donc auſſi diviſeur de *mB* multiple de *B*; & l'étant *235.
de *C*, il eſt auſſi diviſeur de $mB + C$; & par conſequent de $A = mB + C$. Il reſte à démontrer que *D* eſt le plus grand diviſeur commun de *A* & de *B*.

2°. Le plus grand diviſeur commun de *A* & de *B*, étant diviſeur de $A = mB + C$, & de la premiere partie *mB*, qui eſt un multiple de *B*, eſt auſſi diviſeur * de la ſeconde partie *236.
C; & par conſequent * de *nC* multiple de *C*; & *nC* étant la *235.
premiere partie de $nC + D = B$, le plus grand diviſeur commun de *A* & de *B*, doit être diviſeur * de la ſeconde *236.
partie $+ D$. D'où l'on voit que le plus grand diviſeur commun de *A* & de *B* doit néceſſairement être un diviſeur exact du dernier reſte *D*; c'eſt à dire du dernier reſte qui diviſe exactement le reſte précedent.

Il faut donc que le plus grand diviſeur commun de *A* & *B*, ne ſoit pas different du dernier reſte *D*, qu'on a demontré être un diviſeur commun de *A* & de *B*; puiſqu'autrement *D* ſeroit un diviſeur commun de *A* & de *B*, qui ſurpaſſeroit le plus grand diviſeur commun de *A* & de *B*. Ce qui détruiroit la ſuppoſition.

Démonstration pour le cas où il faut préparer le dividende.

Premiere.	Seconde.
A	B
$fA = mB + C$	
$gB = nC + D$	
$C = pD$	

254. SUPPOSÉ, qu'en divisant la premiere grandeur A par la seconde B, on trouve une fraction dont le dénominateur soit f;
*252. il faut, * *par le cinquiéme article de la methode*, multiplier A par f, pour avoir le dividende preparé fA. Qu'en divisant ensuite fA par B, on trouve le quotient m & le reste C; l'on
*107. aura * $fA = mB + C$. Divisant ensuite B par le reste C, qu'on trouve une fraction dont le dénominateur soit g; il faut multiplier B par g, pour avoir le dividende préparé gB. Divisant ensuite gB par C, que le quotient soit n, & le reste
*107. D. L'on aura * $gB = nC + D$. Enfin que le dernier reste D soit un diviseur du précedent C, & que p marque combien
*107. de fois D est dans C. Cela donnera * $C = pD$.

Il est évident que le plus grand diviseur commun de A &
*235. de B * est diviseur de fA, & par consequent de $mB + C =$
*235. fA. Il est aussi diviseur de * gB & de mB; & par consequent
*236. de * C. Il est donc aussi diviseur de * nC & de * D. Mais le
*235. dernier reste D est supposé un diviseur exact de C, ainsi le
*236. plus grand diviseur de A & de B, étant un diviseur de D, il faut que D ne soit pas different de ce plus grand commun diviseur de A & de B, ou du moins qu'il le contienne, & qu'il en soit un multiple: & s'il en étoit un multiple, il y auroit un commun multiplicateur de tous ses termes. Ainsi en le divisant par ce commun multiplicateur de tous les termes, on auroit le plus grand diviseur commun de A & de B.

Enfin il est évident que quand, en cherchant le plus grand commun diviseur de A & de B, on trouve, *par le premier article de la methode*, un diviseur commun de A & de B, il faut multiplier le plus grand diviseur commun, qu'on aura trouvé à la fin de l'operation, par ce commun diviseur trouvé par le premier article, & le produit sera le plus grand diviseur commun des deux grandeurs proposées.

I. COROLLAIRE.

255. DEUX grandeurs numeriques ou litterales étant divisées par le plus grand diviseur commun, les deux quotients n'ont plus aucun diviseur commun.

Dé-

Démonstration. Que A & B, étant divisez par leur plus grand diviseur commun D, les quotients soient E & F; il faut démontrer que E & F n'ont aucun diviseur commun. Si E & F pouvoient avoir un diviseur commun, qu'on le nomme d; qu'on nomme m le quotient de E divisé par d; & n le quotient de F divisé par d. D'où l'on aura * $md = E$, & $nd = F$. * 107.
L'on a aussi * $ED = A$, & $FD = B$. En mettant md à la * 107.
place de E dans $ED = A$, & nd à la place de F dans $FD = B$, l'on aura $mdD = A$, & $ndD = B$. Mais il est évident que $mdD = A$, & $ndD = B$ ont pour diviseur commun dD plus grand que D. Il s'ensuivroit donc, si les quotients E & F avoient un diviseur commun, que D ne seroit pas le plus grand diviseur de A & de B, ce qui détruiroit la supposition. Par consequent E & F n'ont aucun diviseur commun.

COROLLAIRE II.

256. D'où il suit que deux grandeurs numeriques ou litterales étant divisées par leur plus grand diviseur commun, les deux quotients * sont premiers entr'eux, & par consequent * un * 229.
moindre rapport. * 232.

COROLLAIRE III.

257 TOUT diviseur commun de deux grandeurs numeriques ou litterales, est aussi un diviseur du plus grand diviseur commun de ces deux grandeurs.

Démonstration. Il est évident par la démonstration du Problême * que tout diviseur des deux grandeurs A & B est di- * 253.
viseur de $mB + C = A$, de * mB, de * C, de $nC + D = B$, * 235. * 236.
* de nC, & enfin * de D qu'on a démontré être le plus grand * 235.
diviseur commun de A & de B. * 236.

La proposition réciproque, que tout diviseur du plus grand diviseur commun de A & de B, est aussi un diviseur de chacune de ces grandeurs A & B, est évident par l'axiome de l'*article* 235.

PROBLÊME.

258. *TROUVER le plus grand diviseur commun de trois grandeurs numeriques ou litterales*, A, B, C; *de quatre* A, B, C, D; *& ainsi de suite*.

*250.252. *Operation*. 1°. Il faut trouver * le plus grand diviſeur commun de A & de B, on le nommera d. 2°. Il faut enſuite trouver le plus grand diviſeur commun qu'on nommera e de d & de C: Et e ſera le plus grand diviſeur commun des trois grandeurs A, B, C. 3°. S'il y a quatre grandeurs A, B, C, D; après avoir trouvé le plus grand diviſeur commun e des trois A, B, C; il faut trouver le plus grand diviſeur commun f de e & de D: f ſera le plus grand diviſeur de A, B, C, D. On trouvera de même, en continuant l'operation, le plus grand diviſeur de A, B, C, D, E; de A, B, C, D, E, F, &c.

*257. *Démonſtration*. Il eſt évident * que le plus grand diviſeur commun e, que fait trouver la methode, eſt un diviſeur commun de A, B, C. 2°. Le plus grand diviſeur commun de A, B, C,
*257. * devant être un diviſeur de d & de C, * eſt neceſſairement
*257. un diviſeur de e. Par conſequent ce plus grand diviſeur commun de A, B, C ne peut pas être different de e; puiſqu'autrement e ſeroit un diviſeur de A, B, C qui ſurpaſſeroit le plus grand commun diviſeur de A, B, C; ce qui détruiroit la ſuppoſition.

Cette démonſtration peut aiſément s'appliquer au plus grand diviſeur commun f des quatre grandeurs A, B, C, D, que fait découvrir le Problême, au plus grand diviſeur commun des cinq grandeurs A, B, C, D, E, F, & ainſi de ſuite.

COROLLAIRE I.

259. TANT de grandeurs qu'on voudra A, B, C, D, E, F, &c, étant diviſées par leur plus grand diviſeur commun; les quotients n'ont plus entr'eux tous aucun diviſeur commun.

La démonſtration eſt ſemblable à celle de l'*article* 255.

COROLLAIRE II.

260. TANT de grandeurs qu'on voudra, étant diviſées par leur plus grand diviſeur commun, les quotients ſont les moindres
*223.& 226. grandeurs, * qui ayent entr'elles les mêmes rapports qui ſont entre les dividendes.

COROLLAIRE III.

261. TOUT diviſeur de tant de grandeurs qu'on voudra A, B, C, &c. eſt un diviſeur du plus grand diviſeur commun de ces grandeurs.

La démonſtration eſt ſemblable à celle de l'*article* 257.

PROBLÊME.

262. *TROUVER la plus petite grandeur numerique ou litterale, qui ait pour diviſeurs deux grandeurs numeriques ou litterales qui ſont données.*

Regle ou operation. Soient les deux grandeurs propoſées numeriques ou litterales repreſentées par A, B. 1°. Si A & B ſont premieres entr'elles, il faut prendre leur produit AB: ce ſera * la plus petite grandeur qui ait A & B pour diviſeurs. * 245.

2°. Si A & B ne ſont pas premieres entr'elles, il faut trouver * leur plus grand diviſeur commun, qu'on nommera d: * 250, 252.
les diviſer enſuite par ce diviſeur commun, & trouver les quotients, qu'on ſuppoſera être a pour la premiere, & b pour la ſeconde; c'eſt à dire $\frac{A}{d}=a$; $\frac{B}{d}=b$. D'où l'on aura * $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$. Il faut enfin multiplier A par b, ou B par a, & l'on * 256. & 218.
aura $Ab=aB$: chacun de ces deux produits égaux ſera le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs A & B.

EXEMPLES.

POUR trouver le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs 5 & 7 qui ſont premiers entr'eux; il ne faut que les multiplier l'un par l'autre, & leur produit 35 *, ſera le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs 5 & 7. De même le produit ab des * 245.
deux grandeurs litterales a & b premieres entr'elles *, eſt la * 245.
plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs a & b.

De même le produit $\overline{a^2-ab}\times\overline{a+b}=a^3-ab^2$ des deux grandeurs litterales a^2-ab, & $a+b$ qui ſont premieres entr'elles, eſt * la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs * 245.
ces mêmes grandeurs.

Pour trouver le moindre nombre qui ait pour diviſeurs 30 & 36; on cherchera leur plus grand diviſeur commun, que l'on trouvera être 6. On diviſera 30 par 6, & 36 par 6; & l'on aura les quotients 5 & 6, & on écrira ces deux fractions égales $\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$ à côté l'une de l'autre. Enfin on multipliera en croix 30 par 6, ou 36 par 5, & chacun des produits égaux 180 & 180, ſera le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs 30 & 36.

Pour trouver la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs les grandeurs litterales a^2b & ad: je les diviſe par leur plus grand diviſeur commun a, & j'ai les quotients ab & d: j'écris $\frac{a^2b}{ad} = \frac{ab}{d}$ à côté l'une de l'autre, & je multiplie a^2b par d, ou ad par ab, & chacun des produits égaux a^2bd, & a^2bd, eſt la plus petite grandeur que je cherche.

Pour trouver la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs les grandeurs litterales $\overline{a+b}^2 = a^2 + 2ab + b^2$ & $\overline{a+b} \times \overline{a-b} = a^2 - b^2$. Je cherche leur plus grand diviſeur commun $a+b$; je les diviſe chacune par $a+b$; & ayant trouvé les quotients $a+b$ & $a-b$, j'écris $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a+b}{a-b}$. Enfin je prens le produit $\overline{a^2 + 2ab + b^2} \times \overline{a-b}$, ou $\overline{a^2 - b^2} \times \overline{a+b} = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$; c'eſt la grandeur que je cherche.

263. *Démonſtration*. Le premier article de la methode a déja
* 245. été démontré *; il faut démontrer le ſecond. Soient A, B les grandeurs propoſées, d leur plus grand diviſeur commun; a le quotient de A diviſée par d; b le quotient de B diviſée par d. Il faut démontrer que Ab ou ſon égale aB, eſt la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs A & B. Suppoſé qu'il y en eût une autre plus petite, on la nommera C; que le quotient de C diviſée par A ſoit q; & le quotient de C diviſée par B ſoit r, on aura $C = Aq = Br$. On va démontrer que cette grandeur C, qu'on ſuppoſe plus petite que Ab ou aB, ſurpaſſe néceſſairement chacune de ces grandeurs.

* 119. Puiſque $C = Aq = Br$, l'on aura * $\frac{A}{B} = \frac{r}{q} =$ * $\frac{a}{b}$. Mais
* 218. $\frac{a}{b}$ eſt * un moindre rapport; par conſequent a * eſt un divi-
* 256. ſeur de r, & b eſt un diviſeur de q: d'où il ſuit que a eſt
* 221. moindre que r, & b moindre que q: mettant donc dans $C = Aq = Br$, a au lieu de r, & b au lieu de q; on aura C plus grande que Ab & que aB. *Ce qu'il falloit démontrer*.

COROLLAIRE.

264. LA plus petite grandeur, qu'on nommera E, qui a pour diviſeurs A & B, eſt un diviſeur de toute autre grandeur, qu'on nommera F, qui a pour diviſeurs A & B.

Car qu'on ôte autant de fois qu'il ſe pourra E de F, (laquelle F ſurpaſſe E par la ſuppoſition :) le reſte, qu'on nommera R, ſera ou égal à E, & dans ce cas E, ſera un di-

viſeur de F, *ce qu'il falloit démontrer*. Ou bien le reſte R ſera moindre que E; & dans ce cas, que n marque le nombre de fois que l'on a pû ôter E de F; on aura $nE + R = F$. Mais A & B, étant diviſeurs de E par la ſuppoſition, feroient auſſi diviſeurs de * nE; & étant auſſi diviſeurs de $F =$ * 235.
$nE + R$; A & B * feroient diviſeurs de R. D'où il ſui- * 236.
vroit que R, qui auroit pour diviſeurs A & B, feroit plus petite que E, ce qui détruiroit la ſuppoſition. Par conſequent E eſt égale à R, & E eſt un diviſeur de F. *Ce qu'il falloit démontrer*.

PROBLÊME.

265. *TROUVER la plus petite grandeur numerique ou litterale qui ait pour diviſeurs tant de grandeurs numeriques ou litterales déterminées qu'on voudra*.

Methode ou operation. Soient les grandeurs numeriques ou litterales données A, B, C, D, *&c.* 1°. Il faut trouver * la * 262.
plus petite grandeur qu'on nommera E, qui ait pour diviſeurs les deux premieres A & B. Si la troiſiéme C eſt auſſi un diviſeur de E; il eſt évident que E eſt la plus petite grandeur qu'on cherche, étant démontré que E eſt la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs A & B. 2°. Si E n'a pas C pour diviſeur; il faut trouver * la plus petite gran- * 262.
deur qu'on nommera F qui ait pour diviſeur E & C. Cette grandeur F ſera la plus petite qui ait pour diviſeurs A, B, C. 3°. S'il y a quatre grandeurs A, B, C, D. Après avoir trouvé la plus petite grandeur F, qui a pour diviſeurs les trois premieres A, B, C; il faut voir ſi F a auſſi pour diviſeur la quatriéme D; car dans ce cas, F eſt la plus petite grandeur qu'on cherche. Mais ſi D n'eſt pas un diviſeur de F, il faut trouver * la plus petite grandeur G, qui ait pour diviſeurs F * 262.
& la quatriéme D. Et G ſera la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs les quatre grandeurs A, B, C, D. On trouvera de même, en allant de ſuite, la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs cinq grandeurs données, ſix grandeurs, &c.

EXEMPLES.

POUR trouver le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs les nombres donnez 30, 36 & 45; on cherchera le plus petit

nombre 180 qui a pour diviſeurs 30 & 36 : & 180 ayant auſſi pour diviſeur le troiſiéme nombre 45, c'eſt le plus petit nombre qu'on cherche.

Pour trouver le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs 30, 36 & 40; 1°. Je cherche le plus petit nombre 180 qui ait pour diviſeurs 30 & 36. 2°. 180 n'ayant pas 40 pour divi-
* 262. ſeur, je cherche * le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs 180 & 40, & je trouve 360. C'eſt le plus petit nombre que je cherche.

Pour trouver la plus petite grandeur qui ait pour divi-
* 262. ſeurs $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$, $a^3 + b^3$. 1°. Je cherche * la plus petite grandeur $\overline{a^2 - b^2} \times \overline{a + b} = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$, qui ait les deux premieres pour diviſeurs. 2°. Cette grandeur n'ayant pas la troiſiéme pour diviſeur, je cherche la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$, & la troiſiéme $a^3 + b^3$; & je trouve $a^5 - a^3b^2 + a^2b^3 - b^5$. C'eſt la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs les trois grandeurs propoſées.

Démonſtration du Problême. Il faut démontrer que la grandeur F, que l'on trouve par le Problême, eſt la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs les trois grandeurs données A, B, C. 1°. Il eſt évident que E ayant pour diviſeurs A & B, & étant elle-même un diviſeur de F, auſſi-bien que C; * les
* 235. trois grandeurs A, B, C ſont diviſeurs de F. 2°. E * doit être
* 246. un diviſeur de toute grandeur qui aura A & B pour diviſeurs. Ainſi la plus petite grandeur qui aura pour diviſeurs A, B, C, ayant E pour diviſeur, eſt neceſſairement la grandeur F qui eſt la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs E & C. *Ce qu'il falloit démontrer*.

Il eſt évident qu'on peut appliquer la même démonſtration aux grandeurs G, H, &c. que le Problême fera découvrir pour les plus petites grandeurs qui ayent pour diviſeurs quatre grandeurs, cinq grandeurs, &c.

COROLLAIRE.

266. LA plus petite grandeur, qui a pour diviſeurs tant de grandeurs données qu'on voudra, eſt un diviſeur de toute autre grandeur qui a les mêmes grandeurs pour diviſeurs.

Ce Corollaire eſt le même que dans l'*article* 248. On ne

le met ici que pour faire remarquer qu'il n'eſt pas borné aux ſeules grandeurs numeriques, & qu'il convient auſſi aux grandeurs litterales.

PROBLÊME.

TROUVER tous les diviſeurs d'une grandeur litterale ou numerique.

La methode de reſoudre ce Problême contient deux parties. 1°. Il faut trouver tous les diviſeurs ſimples ou premiers de la grandeur propoſée. 2°. Ayant tous les diviſeurs premiers, il faut trouver tous les diviſeurs compoſez de la grandeur propoſée.

Premiere partie du Problême.

267. POUR trouver tous les diviſeurs premiers d'une grandeur, il faut la diviſer d'abord par la grandeur premiere la plus ſimple dont elle peut être compoſée; & diviſer le quotient par la même grandeur, & continuer de prendre la même grandeur pour diviſeur des quotients, juſqu'à ce qu'elle ne puiſſe plus ſervir de diviſeur exact. Il faut enſuite diviſer le dernier quotient par une autre grandeur premiere; & continuer de diviſer les quotients par la même grandeur premiere, juſqu'à ce qu'elle ne puiſſe plus ſervir de diviſeur exact. Il faut continuer de diviſer le dernier quotient par une troiſiéme grandeur premiere; & le dernier quotient par une quatriéme, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on trouve un quotient qui ſoit lui-même une grandeur premiere : ce dernier quotient ſera le dernier diviſeur ſimple de la grandeur propoſée. Il faut écrire à part tous les diviſeurs premiers; & quand un même diviſeur ſert à pluſieurs fois, il faut l'écrire autant de fois, qu'il a ſervi de diviſeur exact : joindre à ces diviſeurs le dernier quotient, & l'on aura tous les diviſeurs premiers de la grandeur propoſée.

I. EXEMPLE.

Sur une grandeur litterale incomplexe, qui ſervira de formule pour trouver tous les diviſeurs ſimples, & tous les compoſez.

POUR trouver tous les diviſeurs premiers de $a^3b^2c^1d^2$. On diviſera cette grandeur par le diviſeur premier a; & le quo-

tient $a^2b^2c^3d^2$ encore par a; & le quotient $ab^2c^3d^2$ encore par a; & a n'étant pas un diviſeur exact du dernier quotient $b^2c^3d^2$, on diviſera ce dernier quotient par le diviſeur premier b; & le quotient bc^3d^2 encore par b; & b n'étant plus diviſeur du dernier quotient c^3d^2, on le diviſera par c; & le quotient c^2d^2 encore par c; & le quotient cd^2 encore par c. Mais c n'étant plus un diviſeur exact du dernier quotient d^2; on le diviſera par d; & le dernier quotient d étant une grandeur premiere, ce ſera le dernier diviſeur premier de la grandeur propoſée, dont tous les diviſeurs premiers ſont a, a, a, b, b, c, c, c, d, d.

On n'a mis cet exemple des grandeurs incomplexes, dont tous les diviſeurs ſimples s'apperçoivent ſans operation, que pour faire clairement concevoir la methode, & pour ſervir de formule.

II. EXEMPLE.

Sur les diviſeurs des nombres.

POUR trouver tous les diviſeurs premiers de 441000; on diviſera ce nombre par le diviſeur premier 2; & le quotient 220500 encore par 2; & le quotient 110250 encore par 2: Le quotient 55125 ne pouvant plus ſe diviſer ſans reſte par 2, on le diviſera par le diviſeur premier 3; & le quotient 18375 encore par 3. Le quotient 6125 ne pouvant plus ſe diviſer par 3, on le diviſera par un autre diviſeur premier 5, & le quotient 1225 encore par 5; & le quotient 245 encore par 5. Le quotient 49 ne pouvant plus ſe diviſer exactement par 5, on le diviſera par un autre diviſeur premier 7; & le quotient étant le nombre premier 7, c'eſt le dernier diviſeur premier de 441000, dont tous les diviſeurs premiers ſont 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7.

Remarque pour les nombres.

ON remarquera ſur les nombres que leurs diviſeurs premiers ne ſont pas toujours de ſuite les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, &c. Mais que dans la recherche de tous les diviſeurs premiers, il faut tenter la diviſion par les nombres premiers les plus ſimples; & quand ils ne réuſſiſſent pas, il faut prendre de ſuite pour diviſeurs les nombres premiers ſuivant l'ordre naturel qui eſt entr'eux, n'allant de ſuite aux plus grands,

grands, qu'après avoir employé par ordre les plus petits.

Les Exemples suivans sont sur les grandeurs litterales complexes.

AVERTISSEMENT.

Il faut toujours, avant l'operation, ordonner la grandeur complexe donnée par rapport à l'une des lettres qu'elle contient.

III. EXEMPLE.

Si l'on veut chercher tous les diviseurs premiers de $b^2a^5 - a^3b^4$; on verra d'abord que a, a, a, b, b, sont les diviseurs premiers incomplexes, & que le dernier quotient est $a^2 - b^2$ dont les diviseurs premiers sont complexes. On divisera ce quotient par le diviseur premier $a - b$, & l'on aura le quotient $a + b$, qui est aussi premier. Ainsi tous les diviseurs premiers qu'on cherchoit sont a, a, a, b, b, $a - b$, $a + b$.

IV. EXEMPLE.

Si l'on veut découvrir tous les diviseurs premiers de $b^2a^9 + b^4a^7 - b^6a^5 - b^8a^3$; on verra d'abord que les diviseurs premiers incomplexes qui multiplient tous les termes sont a, a, a, b, b, & que le dernier quotient est $a^6 + b^2a^4 - b^4a^2 - b^6$. On divisera ce quotient par le diviseur premier complexe d'une dimension $a + b$, & le quotient $a^5 - a^4b + 2a^3b^2 - 2a^2b^3 + ab^4 - b^5$ ne pouvant plus être divisé sans reste par $a + b$, on le divisera par $a - b$. Le quotient $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$, ne pouvant plus être divisé par $a - b$, ni par aucun diviseur premier complexe d'une dimension, on le divisera par le diviseur premier complexe $a^2 + b^2$ de deux dimensions; & le quotient $a^2 + b^2$ étant une grandeur premiere, c'est le dernier diviseur simple de la grandeur proposée, dont tous les diviseurs premiers sont, a, a, a, b, b, $a + b$, $a - b$, $a^2 + b^2$, $a^2 + b^2$.

REMARQUE.

On apperçoit d'abord tous les diviseurs premiers d'une grandeur litterale incomplexe; comme aussi tous les diviseurs premiers incomplexes qui multiplient tous les termes d'une grandeur litterale complexe. On trouve aussi facilement tous les diviseurs premiers d'un nombre, en allant de suite

des plus petits aux plus grands. Il n'y a de difficile que la recherche des diviſeurs premiers complexes, ſoit d'une dimenſion, ſoit de pluſieurs dimenſions, d'une grandeur complexe litterale. Mais comme le plus grand uſage de cette recherche eſt pour l'Analyſe, l'on a donné les principales methodes pour découvrir ces diviſeurs premiers complexes dans les trois premieres ſections du 4e Livre de l'*Analyſe démontrée*, en particulier dans l'*article* 70. C'eſt le lieu où elles doivent être expliquées & démontrées. Les Lecteurs n'en ayant beſoin que quand ils s'appliqueront à l'Analyſe, & quand ils feront uſage de cette ſcience, on a cru qu'il ſeroit inutile d'arrêter ici les Commençans à ces methodes, qui ne leur ſeroient pas de grand uſage dans la ſcience du calcul, & qui détourneroient l'application qu'ils doivent donner à bien apprendre les calculs qui leur ſont néceſſaires pour entendre l'Analyſe & toutes les Mathematiques. De plus on ne ſçauroit démontrer exactement ces methodes de trouver les diviſeurs premiers complexes, qu'en y employant les methodes de l'Analyſe.

Seconde Partie du Problême.

268. QUAND on a découvert tous les diviſeurs premiers d'une grandeur numerique ou litterale, par la premiere partie du Problême; voici la methode pour trouver tous les diviſeurs compoſez de la même grandeur. On l'appliquera à un exemple d'une grandeur litterale incomplexe, pour ſervir de formule, & pour faire clairement concevoir la methode. Tous les diviſeurs ſimples de $a^3b^2c^3d^2$ étant $a, a, a, b, b, c, c, c, d, d$, il faut écrire, dans un premier rang ou dans la premiere ligne, l'unité & toutes les puiſſances de ſuite de l'un des diviſeurs premiers, (il n'importe lequel; mais pour ſe faire un ordre, il eſt bon de prendre, dans les grandeurs litterales, celle qui eſt des premieres de l'alphabet; & dans les nombres, le plus petit diviſeur premier) juſqu'à celle qui a autant de dégrez, que ce diviſeur a ſervi de fois. Ainſi, dans l'exemple, le premier rang contient les diviſeurs 1, a, a^2, a^3. Il faut enſuite multiplier tous les diviſeurs du premier rang par le ſecond diviſeur premier, qui eſt ici b; ce qui donne le ſecond rang de diviſeurs b, ab, a^2b, a^3b. Quand le ſecond diviſeur a ſervi plus d'une fois, & qu'il eſt repeté pluſieurs fois, comme

* Voyez l'Exemple à la page ſuivante.

EXEMPLE.

Grandeur dont il faut trouver tous les diviſeurs.

$a^3b^2c^3d^2$

Les diviſeurs ſimples.

$1.\ a,\ a,\ a.\ b,\ b.\ c,\ c,\ c.\ d,\ d.$

Tous les diviſeurs de la même grandeur ſimples & compoſez dans l'ordre qu'on les trouve.

1er rang. $1, a, a^2, a^3.$

2e rang. $b, ab, a^2b, a^3b.$

3e rang. $b^2, ab^2, a^2b^2, a^3b^2.$

4e rang. $c, ac, a^2c\ a^3c. bc, abc, a^2bc, a^3bc. b^2c, ab^2c, a^2b^2c, a^3b^2c.$

5e rang. $c^2, ac^2, a^2c^2, a^3c^2. bc^2, abc^2, a^2bc^2, a^3bc^2. b^2c^2, ab^2c^2, a^2b^2c^2, a^3b^2c^2.$

6e rang. $c^3, ac^3\ a^2c^3, a^3c^3. bc^3, abc^3, a^2bc^3, a^3bc^3. b^2c^3, ab^2c^3, a^2b^2c^3, a^3b^2c^3.$

7e rang.
$d, ad, a^2d, a^3d. bd, abd, a^2bd, a^3bd. b^2d, ab^2d, a^2b^2d, a^3b^2d. cd, acd, a^2cd,$
$a^3cd. bcd, abcd, a^2bcd, a^3bcd. b^2cd, ab^2cd, a^2b^2cd, a^3b^2cd. c^2d, ac^2d, a^2c^2d,$
$a^3c^2d. bc^2d, abc^2d, a^2bc^2d, a^3bc^2d. b^2c^2d, ab^2c^2d, a^2b^2c^2d, a^3b^2c^2d. c^3d,$
$ac^3d, a^2c^3d, a^3c^3d. bc^3d, abc^3d, a^2bc^3d, a^3bc^3d. b^2c^3d, ab^2c^3d, a^2b^2c^3d, a^3b^2c^3d.$

8e rang.
$d^2, ad^2, a^2d^2, a^3d^2. bd^2, abd^2, a^2bd^2, a^3bd^2. b^2d^2, ab^2d^2, a^2b^2d^2, a^3b^2d^2. cd^2, acd^2,$
$a^2cd^2, a^3cd^2. bcd^2, abcd^2, a^2bcd^2, a^3bcd^2. b^2cd^2, ab^2cd^2, a^2b^2cd^2, a^3b^2cd^2.$
$c^2d^2, ac^2d^2, a^2c^2d^2, a^3c^2d^2. bc^2d^2, abc^2d^2, a^2bc^2d^2, a^3bc^2d^2. b^2c^2d^2, ab^2c^2d^2.$
$a^2b^2c^2d^2, a^3b^2c^2d^2. c^3d^2, ac^3d^2, a^2c^3d^2, a^3c^3d^2. bc^3d^2, abc^3d^2, a^2bc^3d^2,$
$a^3bc^3d^2. b^2c^3d^2, ab^2c^3d^2, a^2b^2c^3d^2, a^3b^2c^3d^2.$

Grandeur numerique repréſentée par $a^3b^2c^3d^2$ *dont on trouve tous les diviſeurs de la même maniere, en ſuppoſant les diviſeurs ſimples numeriques repréſentez par les diviſeurs ſimples litteraux.*

$$441000 = 2\times2\times2\times3\times3\times5\times5\times5\times7\times7 = 2^3\times3^2\times5^3\times7^2$$

---

me ici b, b; il faut multiplier par ce même diviſeur b, non les diviſeurs du premier rang, mais les ſeuls diviſeurs du rang précedent; ce qui donnera le 3e rang b^2, ab^2, a^2b^2, a^3b^2.

Si *b* étoit repeté encore une fois, on multiplieroit par *b* le rang précedent, & non les autres.

Quand on passe au troisiéme diviseur premier *c*, il faut multiplier par *c* tous les rangs précedens ; ce qui fera le quatriéme rang des diviseurs, comme on le voit dans l'exemple. Il faut ensuite, à cause du troisiéme diviseur *c* repeté, multiplier par le second *c*, non les diviseurs de tous les rangs, mais les diviseurs du seul 4ᵉ rang précedent. Et à cause du 3ᵉ diviseur *c* repeté une 3ᵉ fois, il faut encore multiplier par le 3ᵉ *c* les diviseurs du 5ᵉ rang précedent.

Le troisiéme diviseur *c* n'étant plus repeté, il faut passer au 4ᵉ diviseur *d*, & multiplier par *d* les diviseurs de tous les rangs précedens, ce qui fera le 7ᵉ rang ; il faut ensuite, à cause du 4ᵉ diviseur *d* repeté deux fois, multiplier le seul 7ᵉ rang précedent par le second *d*.

Comme il n'y a plus de diviseurs premiers, l'operation est finie ; & tous les diviseurs tant simples que composez sont ceux qu'on a trouvez, & qui occupent tous les rangs.

S'il y avoit un plus grand nombre de diviseurs premiers, il faudroit, quand on arrive à chacun des diviseurs premiers, multiplier par ce diviseur premier tous les diviseurs de tous les rangs précedens ; mais quand le même diviseur premier est repeté plusieurs fois, il ne faut multiplier par ce diviseur à chaque fois qu'il est repeté, que les seuls diviseurs du rang qui précede.

REMARQUE.

L'ENONCE' de la methode & l'application que l'on en a faite en l'expliquant à trouver tous les diviseurs d'une grandeur litterale incomplexe, suffisent pour apprendre aux Commençans la maniere de découvrir eux-mêmes tous les diviseurs d'une grandeur numerique ou litterale, sans qu'il soit necessaire d'en mettre d'autres exemples. Ils pourront s'exercer à trouver tous les diviseurs composez des exemples de la premiere partie du Problême, dont tous les diviseurs premiers sont découverts.

Quand on a trouvé par la methode tous les diviseurs d'une grandeur, on peut ensuite, si l'on veut, les écrire suivant l'ordre de leurs dimensions, de façon que les diviseurs d'une dimension soient les premiers, ceux de deux dimensions les seconds, & ainsi de suite.

Démonstration du Problême. Il est évident * que le produit de tous les diviseurs premiers, comme $a, a, a, b, b, c, c, c, d, d$ d'une grandeur proposée $a^3b^2c^3d^2$, qui se découvrent par la premiere partie du Problême, est précisément la grandeur même proposée ; & qu'ainsi * cette grandeur ne peut pas avoir parmi ses diviseurs, soit premiers soit composez, d'autres grandeurs premieres, ni les produits, ni les puissances d'autres grandeurs premieres. Tous les diviseurs composez de la grandeur proposée doivent donc être les produits des diviseurs premiers découverts par la premiere partie du Problême, & les puissances de ces diviseurs premiers. Mais il est évident qu'en suivant l'ordre prescrit par la methode de la seconde partie du Problême, on découvre tous les diviseurs composez de la grandeur proposée, sans qu'il en manque un seul. Le Problême fait donc découvrir tous les diviseurs premiers & composez d'une grandeur proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* 107.
* 244.

SECTION II.

Où l'on explique les réductions des grandeurs rompues.

PROBLÊME I.

269. *REDUIRE une fraction ou un rapport aux moindres termes ; c'est à dire trouver la moindre fraction qui lui soit égale.*

Si les deux termes de la fraction proposée sont premiers entr'eux, * elle est elle-même la moindre fraction. Si les deux termes sont des grandeurs composées, voici la maniere de les réduire aux moindres termes.

* 232.

Opération. 1°. Il faut trouver * le plus grand diviseur commun des deux termes de la fraction. 2°. Il faut diviser chaque terme par leur plus grand diviseur commun ; & la fraction faite des deux quotients sera la moindre fraction qu'on cherchoit.

* 250, 251 & 252.

EXEMPLES.

POUR réduire $\frac{a^2bc}{a^2cd}$ aux moindres termes : 1°. Je trouve le plus grand diviseur commun a^2c des deux termes. 2°. Je di-

vise les deux termes par a^2c; & je fais des deux quotients la fraction $\frac{b}{d}$: c'est la fraction que je cherche.

Quand chaque terme de la fraction proposée est une grandeur litterale incomplexe, il est visible qu'il ne faut qu'effacer les lettres communes aux deux termes, & que les lettres restantes sont la moindre fraction qu'on cherche.

Pour réduire la fraction $\frac{35}{7}$ aux moindres termes, il faut diviser les deux termes par leur plus grand diviseur commun 7, & l'on aura $\frac{5}{1}$ pour la moindre fraction.

Pour reduire $\frac{255}{80}$ aux moindres termes; il faut diviser ses deux termes par leur plus grand diviseur commun 5; & l'on aura $\frac{51}{16}$ pour la moindre fraction.

Pour réduire la fraction $\frac{adb - acd}{ab^2 - a^3c^2}$ aux moindres termes: 1°. Il faut trouver le plus grand diviseur commun $ab - ac$ des deux termes. 2°. Diviser les deux termes par $ab - ac$, & écrire les quotients en fraction, & l'on aura $\frac{d}{a^2b + a^2c}$ pour la moindre fraction qu'on cherchoit.

Démonstration du Problême. 1°. La fraction que fait décou-
* 109. vrir le Problême * est égale à la proposée. 2°. Les deux ter-
* 255. mes de la fraction, que l'on trouve par le Problême, * sont
premiers entr'eux. Par consequent le Problême fait decou-
* 232. vrir * la moindre fraction égale à la proposée. *Ce qu'il falloit démontrer*.

PROBLÊME II.

270. *REDUIRE deux fractions ou deux rapports à avoir un même dénominateur ou un même second terme, sans changer leur valeur.*

Regle generale ou operation. Il faut multiplier les deux termes de chacune des fractions proposées par le dénominateur de l'autre; les produits seront les fractions de même valeur réduites au même dénominateur. Cette regle est generale.

Regle qui abrege en des cas particuliers. 1°. Quand le dénominateur de l'une est un diviseur du dénominateur de l'autre, comme dans cet exemple $\frac{ab}{cd}$, $\frac{b}{c}$; il faut multiplier par le quotient, qui vient de la division des dénominateurs, les deux termes de la fraction dont le dénominateur est le diviseur de l'autre dénominateur; & elle sera réduite à avoir le même déno-

minateur que l'autre fraction, sans que sa valeur ait été changée. Dans cet exemple, le quotient cd divisé par c est d. Il faut multiplier les deux termes de $\frac{b}{c}$ par le quotient d, & la fraction $\frac{bd}{cd}$, sans avoir changé de valeur, aura le même dénominateur que l'autre fraction $\frac{ab}{cd}$. 2°. Quand les dénominateurs des deux fractions ont un diviseur commun, comme $\frac{a^2b}{cd}$, $\frac{b^3}{cf}$; il faut multiplier les deux termes de la premiere $\frac{a^2b}{cd}$ par le quotient f qui vient de la division du dénominateur cf de la seconde par le diviseur commun c; & multiplier de même les deux termes de la seconde $\frac{b^3}{cf}$ par le quotient d, qui vient de la division du dénominateur cd de la premiere par le diviseur commun c; & les nouvelles fractions $\frac{a^2bf}{cdf}$ & $\frac{b^3d}{cdf}$ seront les fractions réduites au même dénominateur, sans que leur valeur soit changée.

EXEMPLES.

POUR reduire les deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ au même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de la premiere par le dénominateur 4 de la seconde, & multiplier les deux termes de la seconde par le dénominateur 3 de la premiere, & l'on aura les fractions $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, qui sont reduites au même dénominateur.

Pour réduire $\frac{3}{5}$ & $\frac{2}{7}$ au même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de la premiere par 7, & multiplier les deux termes de la seconde par 5, & l'on aura $\frac{21}{35}$ & $\frac{10}{35}$.

Pour réduire $\frac{5}{12}$ & $\frac{2}{3}$ au même dénominateur; on remarquera que le dénominateur 3 est un diviseur du dénominateur 12, & qu'en divisant 12 par trois le quotient est 4. Dans ce cas il faut seulement multiplier les deux termes de $\frac{2}{3}$ par 4, & l'on aura $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ qui a le même dénominateur que $\frac{5}{12}$.

Pour réduire $\frac{4}{1}$ *, qui est la même chose que l'entier 4, & * 117.
$\frac{2}{3}$ à un même dénominateur, on remarquera que 1, dénominateur de la premiere, est diviseur de 3, dénominateur de la seconde, & que 3 est le quotient de 3 divisé par 1; & par consequent qu'il faut multiplier les deux termes de la premiere par 3, dénominateur de la seconde; & l'on aura $\frac{4}{1} = \frac{12}{3}$.

Pour réduire $\frac{ab}{1}$, * qui est la même chose que l'entier ab, & * 117.
$\frac{ac - bc}{a + b}$ à un même dénominateur; on fera attention que le dé-

nominateur de la premiere eſt diviſeur du dénominateur $a+b$ de la ſeconde, & que le quotient de $a+b$ diviſé par 1 eſt $a+b$; & par conſequent qu'il faut multiplier les deux termes de $\frac{ab}{1}$ par $a+b$, & l'on aura $\frac{ab}{1} = \frac{a^2b+ab^2}{a+b}$.

Si l'on veut réduire $\frac{a^4}{a^2b-b^3}$ & $\frac{b^3}{a^2-ab}$ à un même dénominateur; on remarquera que les dénominateurs ont $a-b$, pour diviſeur commun; que le quotient de $a^2b - b^3$ diviſé par $a-b$ eſt $ab+b^2$; & le quotient de $a^2 - ab$ par $a-b$ eſt a; c'eſt pourquoi on multipliera les deux termes de la premiere par a; & les deux termes de la ſeconde par $ab+b^2$, & l'on trouvera $\frac{a^5}{a^3b-ab^3}$ & $\frac{ab^4+b^5}{a^3b-ab^3}$, qui ont un même denominateur, & qui ſont équivalentes aux fractions propoſées.

Pour réduire les deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, au même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de la premiere par d; & multiplier les deux termes de la ſeconde par b; & l'on aura $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$.

AVERTISSEMENT.

Il eſt inutile de mettre ici des exemples fort compoſez, ne s'agiſſant que de faire clairement concevoir le Problême : les Commençans peuvent eux-mêmes faire tels exemples qu'il leur plaira.

Démonſtration du Problême. Les fractions, que fait découvrir le Problême, n'étant que les fractions propoſées dont
*75. les termes ont été multipliez, par une même grandeur, * elles ont les mêmes valeurs que les fractions propoſées, & elles ont auſſi chacune pour leur dénominateur commun, le produit des dénominateurs des fractions propoſées quand on ſuit la regle generale; & il eſt évident qu'elles ont auſſi toujours le même dénominateur dans la regle particuliere qu'on a donnée pour abreger, dans les cas auxquels elle convient.

III. PROBLÊME.

271. *REDUIRE tel nombre de fraction qu'on voudra, à avoir un même dénominateur, ſans changer leur valeur.*

Regle ou operation. Il faut multiplier les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres; les fractions faites des produits ſeront les fractions qu'on demande.

EXEMPLES.

EXEMPLES.

POUR réduire $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ à un même dénominateur, sans changer leur valeur; il faut multiplier les deux termes de $\frac{a}{b}$ par le produit df des dénominateurs des autres; les deux termes de $\frac{c}{d}$ par bf; & les deux termes de $\frac{e}{f}$ par bd; & l'on aura les nouvelles fractions $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$ égales aux proposées, & qui ont le même dénominateur.

Pour réduire $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$ à un même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de $\frac{1}{2}$ par $4 \times 7 = 28$; les deux termes de $\frac{3}{4}$ par $2 \times 7 = 14$, & les deux termes de $\frac{5}{7}$ par $2 \times 4 = 8$; & l'on aura $\frac{28}{56}$, $\frac{42}{56}$, $\frac{40}{56}$.

Pour réduire les fractions $3 = \frac{3}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{7}$ à un même dénominateur, il faut multiplier les deux termes de $\frac{3}{1}$ par $3 \times 5 \times 7 = 105$; les deux termes de $\frac{2}{3}$ par $1 \times 5 \times 7 = 35$; les deux termes de $\frac{4}{5}$ par $1 \times 3 \times 7 = 21$; & les deux termes de $\frac{2}{7}$ par $1 \times 3 \times 5 = 15$, & l'on aura $\frac{315}{105}$, $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{30}{105}$.

Pour réduire les fractions $ab = \frac{ab}{1}$, $\frac{cd}{a-b}$, $\frac{bc}{a+b}$ à un même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de $\frac{ab}{1}$ par $\overline{a-b} \times \overline{a+b} = a^2 - b^2$, les deux termes de $\frac{cd}{a-b}$ par $1 \times \overline{a+b}$; & les deux termes de $\frac{bc}{a+b}$ par $1 \times a - b = a - b$; & l'on aura $\frac{a^2b - ab^2}{a^2 - b^2}$, $\frac{acd + bcd}{a^2 - b^2}$, $\frac{abc - b^2c}{a^2 - b^2}$.

La démonstration de ce troisiéme Problême n'est pas differente de celle du second.

REMARQUE.

272. LE second & le troisiéme Problême peuvent servir à faire connoître facilement le rapport qu'ont entr'elles deux ou plusieurs fractions ou rapports; car les ayant réduites à avoir le même dénominateur, elles ont * entr'elles les mêmes rapports que les numerateurs. * 116.

PROBLÊME IV.

273. *REDUIRE deux fractions, trois fractions, en un mot, tant de fractions qu'on voudra, au même dénominateur qui soit le plus petit qu'il est possible, sans changer leur valeur.*

Regle ou operation. 1°. Il faut réduire chacune des fractions * 269.

* 265. proposées aux moindres termes. 2°. Il faut trouver * la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs tous les dénominateurs des fractions proposées réduites aux moindres termes ; ce sera le dénominateur commun qu'on cherche. 3°. Il faut diviser cette plus petite grandeur, ou ce dénominateur commun, par le dénominateur de chacune des fractions réduites aux moindres termes ; & multiplier le numerateur de chaque fraction réduite aux moindres termes par le quotient qui est venu de la division du dénominateur commun qu'on vient de trouver par le dénominateur de cette fraction réduite aux moindres termes ; les produits seront les numerateurs des fractions qu'on cherche.

EXEMPLES.

POUR réduire $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{10}$, au même dénominateur qui soit le plus petit qu'il est possible ; 1°. Il faut les réduire chacune aux moindres termes $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$. 2°. Il faut trouver le plus petit nombre 10 qui ait pour diviseurs les deux dénominateurs 2 & 5 des moindres fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, & 10 sera le plus petit dénominateur commun qu'on cherche. 3°. Il faut diviser ce dénominateur commun par 2 dénominateur de $\frac{1}{2}$; & *multiplier* le numerateur de $\frac{1}{2}$ par le quotient 5 ; & l'on aura le numerateur de la premiere fraction qu'on cherche. Il faut de même diviser le dénominateur commun 10 par 5, dénominateur de $\frac{2}{5}$, & multiplier le numerateur de $\frac{2}{5}$ par le quotient 2, & l'on aura 4 pour le numerateur de la seconde fraction ; & les deux fractions qu'on cherchoit sont $\frac{5}{10}$ & $\frac{4}{10}$.

Pour réduire $\frac{15}{18}$ & $\frac{20}{25}$ au même plus petit dénominateur sans changer leur valeur, 1°., il faut les réduire aux moindres termes $\frac{5}{6}$ & $\frac{4}{5}$. 2°. Il faut trouver le plus petit nombre 30 qui ait pour diviseurs les deux dénominateurs 6 & 5, ce sera le plus petit dénominateur commun qu'on cherche. 3°. Il faut multiplier par le quotient 5 de 30 divisé par 6 le numerateur 5, & le produit 25 sera le numerateur de la premiere fraction. Il faut ensuite multiplier par le quotient 6 qui est venu de 30 divisé par 5, le numerateur 4 ; & le produit 24 sera le numerateur de la seconde fraction. Les deux fractions qu'on cherchoit sont $\frac{25}{30}$ & $\frac{24}{30}$.

Pour réduire $\frac{25}{18}$, $\frac{20}{25}$, $\frac{17}{42}$ au même plus petit dénomina-

teur, sans changer leur valeur; 1°. Il faut les réduire aux moindres termes $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$. 2°. Il faut trouver le plus petit nombre 210 qui ait pour diviseurs les dénominateurs 6, 5, 7. 3°. Ayant trouvé les quotients 35, 42, & 30 de 210 divisé par 6, 5, 7; il faut multiplier 5 par 35, 4 par 42, & 6 par 30; & les produits 175, 168, 180 seront les numerateurs qu'on cherche. $\frac{175}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{180}{210}$, sont les trois fractions qu'on cherchoit.

Pour réduire $\frac{ab}{bc}$, $\frac{cd}{d^2}$, $\frac{ad}{ae}$ au même plus petit dénominateur sans changer leur valeur; 1°. Il faut les réduire aux moindres termes $\frac{a}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$. 2°. Il faut trouver la plus petite grandeur *cde* qui ait pour diviseurs *c*, *d*, *e*; ce sera le plus petit dénominateur qu'on cherche. 3°. Il faut diviser ce dénominateur commun *cde* par les dénominateurs *c*, *d*, *e*; & multiplier par les quotients *de*, *ce*, *cd*, les numerateurs *a*, *c*, *d* qui leur répondent; & les produits *ade*, c^2e, cd^2 seront les numerateurs qu'on cherche. Ainsi $\frac{ade}{cde}$, $\frac{c^2e}{cde}$, $\frac{cd^2}{cde}$, seront les fractions qu'on cherchoit.

Démonstration du Problême. Les fractions proposées qu'on peut représenter par $\frac{ab}{bc}$, $\frac{cd}{d^2}$, $\frac{ad}{ae}$ étant réduites aux moindres termes $\frac{a}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$, n'ont pas changé de valeur. Or celles qu'on trouve par le problême, qui sont $\frac{ade}{cde}$, $\frac{c^2e}{cde}$, $\frac{cd^2}{cde}$ sont formées des fractions réduites aux moindres termes, en multipliant les deux termes de chacune par une même grandeur, & par consequent elles leur sont égales. Les fractions, qu'on trouve par le Problême, sont donc égales aux fractions proposées. Il reste à démontrer que le dénominateur commun des fractions, que fait découvrir le Problême, est le moindre qui soit possible. Le plus petit dénominateur commun, auquel les fractions proposées peuvent être réduites, * doit avoir *271. pour diviseurs les dénominateurs *c*, *d*, *e*, de ces fractions réduites aux moindres termes. Mais le commun dénominateur *cde*, que fait découvrir le Problême, * est la plus petite grandeur *265. qui ait pour diviseurs les dénominateurs *c*, *d*, *e*. Le Problême fait donc trouver le plus petit dénominateur auquel on puisse réduire les fractions proposées, sans changer leur valeur. *Ce qu'il falloit démontrer*.

V. PROBLÊME.

274 *REDUIRE une fraction à avoir un dénominateur donné, sans changer sa valeur.*

Par exemple, une toise contient six pieds; ainsi un pied est une sixiéme partie d'une toise: l'on a $\frac{2}{3}$ d'une toise; pour en découvrir la valeur en pieds, il faut réduire $\frac{2}{3}$ à une autre fraction qui ait 6 pour dénominateur, sans pourtant que la fraction $\frac{2}{3}$ d'une toise change de grandeur; & quand on aura trouvé cette autre fraction, que l'on verra dans la suite être $\frac{4}{6}$, on sçaura que $\frac{2}{3}$ d'une toise valent $\frac{4}{6}$ d'une toise, c'est à dire 4 pieds.

AVERTISSEMENT.

CE cinquiéme Problême est de grand usage dans la pratique de l'Arithmetique, dans laquelle réduire une fraction à avoir un dénominateur donné, sans changer sa valeur, s'appelle *évaluer une fraction*, & la pratique de cette réduction se nomme l'*évaluation d'une fraction*. On en va mettre la regle que l'on appliquera à plusieurs exemples, pour en faire voir l'usage dans la pratique.

Regle ou operation. 1°. Il faut multiplier le numerateur de la fraction proposée par le dénominateur donné. Par exemple, pour réduire $\frac{2}{3}$ d'une toise à avoir 6 pour dénominateur, il faut multiplier 2 par 6, ce qui donne 12.

2°. Il faut diviser le produit, qu'on vient de former, par le dénominateur de la fraction proposée; le quotient sera le numerateur de la nouvelle fraction, sous lequel il faut écrire le dénominateur donné. Dans l'exemple qu'on a pris, il faut diviser 12 par 3, & écrire le quotient 4 pour numerateur, & 6 pour dénominateur de la fraction qu'on cherchoit, qui est $\frac{4}{6}$.

3°. Quand la division marquée dans le second article donne pour quotient un entier & de plus une fraction; il faut écrire au numerateur l'entier, & cette fraction au devant de l'entier en plus petits chifres, & le dénominateur donné au dessous de ce numerateur composé d'un entier & d'une fraction. On verra, dans les exemples, l'usage qu'on fait de cette fraction du numerateur, quand il y en a une.

EXEMPLES.

POUR voir combien la fraction $\frac{2}{3}$ d'un écu, (en supposant que l'écu est de 60 sols) vaut de sous; il faut réduire la fraction $\frac{2}{3}$ d'un écu à avoir pour dénominateur 60, sans changer de valeur; ainsi il faut multiplier le numerateur 2 par le denominateur donné 60, & diviser le produit 120 par 3, & écrire le quotient 40 pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, & 60 pour son dénominateur; & la fraction qu'on cherche est $\frac{40}{60}$ d'un écu, c'est à dire 40 sous.

Pour réduire $\frac{4}{7}$ d'une toise à avoir 6 pour dénominateur, ce qui fera connoître combien la fraction $\frac{4}{7}$ vaut de pieds; 1°. Il faut multiplier 4 par 6. 2°. Diviser le produit 24 par le dénominateur 7 de la fraction $\frac{4}{7}$. 3°. Ecrire le quotient $3\frac{3}{7}$ pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, à laquelle il faut donner 6 pour dénominateur, & cette fraction sera $\frac{3\frac{3}{7}}{6}$.

REMARQUES.

I.

LA fraction $\frac{3\frac{3}{7}}{6}$ contenant l'entier 3, qui vaut trois sixiémes d'une toise ou trois pieds, & de plus trois septiémes d'une sixiéme de toise, c'est à dire $\frac{3}{7}$ d'un pied; il faut réduire la fraction $\frac{3}{7}$ d'un pied en pouces, en la réduisant, sans changer sa valeur, à une autre fraction qui ait 12 pour dénominateur, parcequ'un pouce est une douziéme d'un pied. Ainsi il faut multiplier par 12 le numerateur 3 de $\frac{3}{7}$ d'un pied, & diviser le produit 36 par 7; écrire le quotient $5\frac{1}{7}$ pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, à laquelle on donnera 12 pour dénominateur, & cette fraction, qu'on cherche, sera $\frac{5\frac{1}{7}}{12}$ d'un pied, c'est à dire 5 pouces & $\frac{1}{7}$ d'une douziéme d'un pied, c'est à dire $\frac{1}{7}$ d'un pouce.

On peut de même réduire la fraction $\frac{1}{7}$ d'un pouce en lignes, en lui donnant, sans changer sa valeur, pour dénominateur 12; parcequ'une ligne est la douziéme partie d'un pouce. On multipliera donc par 12 le numerateur 1 de la fraction $\frac{1}{7}$ d'un pouce; on divisera le produit 12 par le déno-

minateur 7 de $\frac{1}{7}$ d'un pouce; on écrira 1 $\frac{5}{7}$ pour le numerateur de la nouvelle fraction, & 12 pour son dénominateur; & l'on aura $\frac{1\frac{5}{7}}{12}$ d'un pouce pour la fraction équivalente à $\frac{1}{7}$ d'un pouce; c'est à dire une douziéme de pouce ou une ligne, & de plus $\frac{5}{7}$ d'une ligne ou d'une douziéme de pouce. Ainsi la fraction $\frac{4}{7}$ d'une toise vaut $\frac{3}{6}$ d'une toise $+ \frac{5}{12}$ d'un pied $+ \frac{1}{12}$ d'un pouce, & elle vaut encore de plus $\frac{5}{7}$ d'une douziéme d'un pouce; c'est à dire la fraction $\frac{4}{7}$ d'une toise vaut 3 pieds 5 pouces 1 ligne & $\frac{5}{7}$ d'une ligne.

D'où l'on voit que le cinquiéme Problême sert, quand on a une fraction de quelque grandeur sensible comme d'une longueur, à trouver la valeur de cette fraction exprimée par les mesures ordinaires de cette grandeur jusqu'à la plus petite.

2.

275. Quand en faisant ces réductions on ne trouve pas une valeur exacte comme dans l'exemple précedent, où l'on voit qu'il reste encore $\frac{5}{7}$ d'une ligne; on néglige d'ordinaire la fraction restante qui est moindre que la plus petite espece ou la plus petite mesure; dans l'exemple précedent on néglige $\frac{5}{7}$ d'une ligne comme une grandeur insensible.

Cependant, pour rendre cette erreur la moins sensible qu'il se puisse, on remarque si la fraction est moindre que la moitié d'une mesure de la derniere espece, ou si elle est plus grande, ce que l'on reconnoît par la comparaison du numerateur de la derniere fraction à son dénominateur. Car si le numerateur est moindre que la moitié du dénominateur, la fraction est moindre que la moitié d'une derniere espece: s'il surpasse cette moitié comme dans $\frac{5}{7}$ d'une ligne, cette fraction est plus grande que la moitié d'une ligne. Dans le cas où la derniere fraction est moindre que la moitié, on néglige ordinairement cette derniere fraction: dans le cas où elle surpasse la moitié, on ajoute une unité afin que l'erreur soit plus petite. Ainsi on écrit pour la valeur de $\frac{4}{7}$ d'une toise, 3 pieds, 5 pouces, 2 lignes.

Usages du Problême cinquiéme dans les grandeurs décimales.

I. USAGE.

276. QUAND on a une fraction quelconque, comme $\frac{5}{9}$ d'une grandeur, on peut la réduire en parties décimales par ce Problême. 1°. Il faut ajouter au numerateur autant de zeros qu'on voudra; plus on en met & plus l'erreur est insensible, quand la division ne peut pas se faire sans qu'il reste une fraction. Cette addition de zeros est la même chose * que de multiplier le numerateur par l'unité précedée d'autant de zeros qu'on en ajoute au numerateur. 2°. Il faut diviser ce numerateur précedé de ces zeros par le dénominateur, & le quotient est la fraction proposée réduite en parties décimales. 3°. Si le numerateur de la fraction proposée surpassoit le dénominateur, elle contiendroit un nombre entier, par exemple $\frac{25}{9}$. Dans ce cas il faudroit écrire dans le quotient, à la droite du nombre entier du quotient, le point qui distingueroit l'entier d'avec les parties décimales, & écrire au devant de ce point, en allant de gauche à droite, toutes les parties décimales du quotient. Mais si le numerateur de la fraction proposée est moindre que le dénominateur, il faut d'abord écrire au quotient 0 pour marquer le lieu des entiers; un point à la droite de ce zero pour distinguer les parties décimales; & écrire au devant de ce point, en allant vers la droite, tout le quotient à mesure qu'on le trouve. * 122.

Ainsi pour réduire $\frac{5}{9}$ en parties décimales, 1°, on ajoutera, par exemple, cinq zeros au numerateur pour réduire la fraction en cent milliémes. 2°. On divisera 500000 par 9, & l'on écrira 0 à la premiere place du quotient pour marquer le lieu des entiers; un point à la droite de ce 0, pour distinguer les parties décimales, & le quotient à mesure qu'on le trouvera au devant de ce point en allant vers la droite, & l'on aura 0. 55555 pour la fraction proposée $\frac{5}{9}$ réduite en cent milliémes.

L'on trouve à la fin de cette division un reste, qui est 5 à diviser par 9, ce qui vaut cinq neuviémes d'une cent milliéme; comme ce reste surpasse la moitié d'une cent-milliéme

partie, on ajoute une unité au dernier chifre, afin que l'erreur soit plus insensible; ainsi $\frac{5}{9}=0.55556$.

II. Usage.

277. Le calcul des parties décimales est moins embarrassant que celui des fractions ordinaires, ce calcul étant le même que celui des nombres entiers; c'est la raison pourquoi dans la pratique on se sert du calcul décimal; mais quand on a trouvé la grandeur que l'on cherchoit exprimée en parties décimales; on veut sçavoir quelle est sa valeur exprimée par les mesures ordinaires. C'est à quoi sert aussi ce cinquiéme Problême. Par exemple, on aura trouvé dans un calcul 0. 55556 de toise, on veut sçavoir combien cette grandeur, qui est moindre qu'une toise, vaut de pieds, de pouces
* 122. & de lignes. Il faut regarder la grandeur décimale * comme une fraction $\frac{55556}{100000}$, dont le dénominateur est l'unité précedée d'autant de zeros qu'il y a de rangs de parties décimales, & la réduire à une fraction équivalente, qui ait pour dénominateur le nombre qui exprime combien de fois la mesure à laquelle on veut la réduire est contenue dans la mesure principale, de la maniere que le prescrit le cinquiéme Problême; c'est à dire, si la fraction décimale exprime des parties décimales de toises, il faut la réduire au dénominateur 6; afin de la réduire à des pieds qui sont des sixiémes de toise, la toise étant la mesure principale. Ainsi il faut multiplier les parties décimales 0. 55556 par 6; diviser le produit 3. 33336 par le dénominateur sous-entendu 100000 de la fraction proposée; ce qui se fait simplement, en retranchant vers la droite autant de rangs du produit qu'il y avoit de rangs de parties décimales dans le numerateur de la fraction proposée; dans cet exemple, il faut retrancher cinq rangs, & le quotient sera 3. Enfin il faut écrire $\frac{3}{6}$ de toise + 0. 33336 d'une sixiéme de toise. C'est à dire 3 pieds & 0. 33336 de pied.

Pour réduire 0. 33336 de pied en pouces qui sont des douziémes d'un pied, un pied étant la mesure principale par rapport aux pouces; 1°, il faut multiplier 0. 33336 par 12; 2°, retrancher cinq rangs du produit 4. 00032; l'on aura $\frac{4}{12}$ d'un pied + 0. 00032 d'une douziéme de pied ou d'un pouce; c'est à dire 4 pouces 0. 00032 d'une douziéme de pied ou d'un

d'un pouce. Comme la fraction qui reste ne vaut pas une ligne, on la néglige.

Dans la pratique, la réduction des grandeurs décimales aux mesures ordinaires des grandeurs sensibles, se fait très aisément. On ne fait que la multiplication de la grandeur décimale par le nombre qui exprime combien de fois la mesure, à laquelle on veut réduire la grandeur decimale, est contenue dans la mesure plus grande qui la précede immédiatement : & ce qui se trouve de grandeurs entieres dans le produit qui vient de cette multiplication, est le nombre qu'on cherche.

Par exemple, pour réduire o. 55556, qui exprime les parties décimales d'une toise, en pieds; ensuite en pouces, & enfin en lignes. 1°. On multiplie ce nombre décimal par 6, qui exprime qu'un pied est 6 fois dans une toise; on trouve le produit 3. 33336, dans lequel la grandeur entiere 3, marque que le nombre proposé contient 3 pieds; & de plus la fraction o. 33336 qui contient les parties décimales d'un pied. 2°. Pour la réduire en pouces, on la multiplie par 12; on trouve le produit 4. 00032, dans lequel la grandeur entiere 4 marque que la fraction o. 33336, qui contient les parties décimales d'un pied, vaut 4 pouces; & de plus la fraction o. 00032, qui contient les parties décimales d'un pouce. 3°. Enfin pour réduire cette derniere fraction en lignes, on la multiplie par 12, & l'on trouve le produit o. 00384. Ce produit n'ayant pas de grandeur entiere, la fraction décimale o. 00032, ne vaut pas une ligne entiere; elle contient seulement autant de parties décimales d'une ligne, qu'en exprime le nombre décimal o. 00384. Ainsi le nombre décimal proposé o. 55556, qui contient les parties décimales d'une toise, étant réduit aux mesures ordinaires de la toise, vaut 3 pieds, 4 pouces & o. 00384 d'une ligne: on neglige dans la pratique cette fraction, qui est plus petite que la moitié d'une ligne.

Quand la derniere fraction décimale qu'on neglige surpasse la moitié d'une unité; c'est à dire, quand le chifre qui est immediatement à la droite du point qui separe les parties décimales, surpasse 5; on ajoute 1 à l'entier du dernier quotient. Quand elle est moindre, on la neglige; quand elle est égale à la moitié d'une unité, on peut ajouter ou ne pas

ajouter une unité au dernier quotient, l'erreur étant égale, soit qu'on ajoute une unité, soit qu'on ne l'ajoute pas.

Par exemple, si dans une derniere réduction on trouvoit 3. 72048, on ajouteroit 1 à l'entier 3, & on prendroit 4 pour la grandeur entiere, qui est de très peu de chose plus grande qu'il ne faut. Si la derniere fraction étoit 3. 42048, on prendroit seulement la grandeur entiere 3, & on negligeroit le reste. Enfin, si la derniere fraction étoit 3. 52048, on pourroit prendre seulement la grandeur entiere 3, & negliger le reste; ou bien ajouter 1 à l'entier 3, & prendre la grandeur 4 qui seroit de très peu de chose plus grande qu'il ne faut.

Démonstration du cinquiéme Problême. On remarquera que l'on n'a mis dans la regle du Problême que les operations necessaires dans la pratique; & qu'il faut concevoir dans le premier article qu'on multiplie le numerateur & le dénomina-
* 75. teur de la fraction proposée par le dénominateur donné; * ce qui donne une seconde fraction équivalente: & que dans le second article il faut entendre qu'on divise le numerateur & le dénominateur de la seconde fraction équivalente, cha-
* 109. cun par le dénominateur de la fraction proposée, * ce qui donne une troisiéme fraction équivalente à chacune des deux précedentes, à laquelle il reste pour le second terme le dénominateur donné. Ainsi pour réduire $\frac{2}{3}$ d'une toise en pieds ou sixiemes de toises, l'on doit concevoir que la premiere operation donne la seconde fraction équivalente $\frac{2\times6}{3\times6} = \frac{12}{3\times6} = \frac{3\times4}{3\times6}$; & que la seconde operation donne la troisiéme fra-
* 109. ction $\frac{\frac{3\times4}{3}}{\frac{3\times6}{3}} = \frac{4}{6}$ * qui est équivalente à chacune des deux premieres. D'où il suit que le Problême fait découvrir une fraction nouvelle, égale à la proposée, & qui a pour second terme le dénominateur donné. *Ce qu'il falloit démontrer*.

Quand on trouve que le numerateur de la nouvelle fraction qu'on cherche contient un entier & une fraction, (comme si l'on vouloit réduire $\frac{5}{8}$ de toise en sixiémes de toise, on trouveroit $\frac{3\frac{6}{8}}{6}$) il est évident que l'entier 3 exprimant trois sixiémes d'une toise, la fraction $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, exprime six huitiémes ou trois quarts d'une sixiéme de toise.

PROBLÊME VI.

278. *REDUIRE une grandeur entiere à une fraction équivalente qui ait un dénominateur donné.*

Ce Problême est contenu dans le précedent, & on en a déja vû des exemples dans le second Problême. Mais à cause de son grand usage dans les calculs, on s'est déterminé à le mettre en particulier.

Regle. Il faut prendre le produit de l'entier proposé par le dénominateur donné, pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, & écrire pour son dénominateur le dénominateur donné.

EXEMPLES.

POUR réduire 25 entiers en quatriémes, ou à une fraction qui ait 4 pour dénominateur; il faut multiplier 25 par 4, & écrire le produit 100 pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, & 4 pour dénominateur.

Pour réduire l'entier b à une fraction qui ait a pour dénominateur, il faut écrire $\frac{ab}{a}$.

Pour réduire $a + b$ à une fraction qui ait $c + d$ pour dénominateur, il faut multiplier $a + b$ par $c + d$; & écrire le produit pour premier terme de la fraction qu'on cherche, à laquelle on donnera $c + d$ pour second terme, cette fraction sera $\frac{ac + ad + bc + bd}{c + d}$.

Démonstration. Tout nombre entier peut être représenté par une lettre b, * qu'on peut ainsi écrire en fraction $\frac{b}{1}$; en * 117.
multipliant le premier & le second terme par une même grandeur a, elle devient $\frac{ab}{1 \times a} = \frac{ab}{a}$, ce qui * n'en change * 75.
point la valeur. Or c'est ce que prescrit le Problême qui est de multiplier l'entier proposé par le dénominateur donné a, & d'écrire au dessous de ce produit le dénominateur donné a; ce qui est la même chose que de multiplier l'unité, second terme de la fraction proposée $\frac{b}{1}$, par a. Ainsi le Problême prescrit la maniere de reduire un entier à une fraction dont le dénominateur soit donné, sans en changer la valeur. *Ce qu'il falloit démontrer*.

REMARQUE.

ON réduit par ce Problême les plus grandes eſpeces aux moindres. Par exemple, pour réduire 4 toiſes en pieds, qui ſont des ſixiémes de toiſes; il faut multiplier 4 par 6, & le produit 24, ſous lequel on écrit, ſi l'on veut, le dénominateur 6, exprime que 4 toiſes valent 24 pieds ou 24 ſixiémes de toiſe.

PROBLÊME VII.

279. *QUAND une fraction contient un nombre entier; c'eſt à* * 111. à la fin. *dire,* * *quand le premier terme ſurpaſſe le ſecond, la réduire à l'entier.*

Regle ou operation. Il faut diviſer le numerateur par le dénominateur, le quotient exprimera les entiers.

EXEMPLES.

POUR réduire $\frac{20}{5}$ à l'entier, il faut diviſer 20 par 5, le quotient 4 eſt le nombre entier que vaut la fraction $\frac{20}{5}$.

Pour réduire $\frac{ab}{b}$ à l'entier, il faut diviſer ab par b, & le quotient ſera l'entier $a = \frac{ab}{b}$.

Pour réduire $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ à l'entier; il faut diviſer $a^2 - b^2$ par $a - b$, & le quotient ſera l'entier $a + b = \frac{a^2-b^2}{a-b}$.

Pour réduire $\frac{22}{5}$ à l'entier, il faut diviſer 22 par 5, & le quotient $4\frac{2}{5}$ marque l'entier 4 qui eſt contenn en $\frac{22}{5}$, & il y a de plus la fraction $\frac{2}{5}$; c'eſt à dire $4\frac{2}{5} = \frac{22}{5}$.

Démonſtration. Suppoſons une fraction qui contient un nombre entier comme $\frac{20}{5}$, ou en general $\frac{ab}{b}$. Il eſt évident que la fraction $\frac{5}{5}$, ou en general la fraction $\frac{b}{b}$, (dont le premier & le ſecond terme ſont chacun égal au dénominateur de la fraction ſuppoſée,) peut être regardée comme une unité de la grandeur entiere que contient la fraction ſuppoſée $\frac{20}{5} = \frac{5+5+5+5}{5}$, ou $\frac{ab}{b}$. Or le quotient qui vient de la diviſion du numerateur 20 ou ab de la fraction propoſée par ſon dénominateur 5 ou b, marque combien de fois $\frac{5}{5}$ ou $\frac{b}{b}$ eſt contenue dans la fraction propoſée. Ainſi ce quotient exprime combien la fraction propoſée contient d'unitez entieres. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Quand le quotient contient un entier & une fraction,

comme $\frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$, ou $\frac{4b+c}{b} = 4 + \frac{c}{b}$; il eſt évident que la fraction propoſée contient autant d'unitez entieres qu'en marque le quotient 4, & de plus autant des parties de l'unité qu'en marque la fraction du quotient $\frac{2}{5}$ ou $\frac{c}{b}$.

REMARQUES.

1.

ON réduit par ce Problême les petites eſpeces aux plus grandes. Par exemple pour réduire 30 pieds, ou $\frac{30}{6}$ de toiſe, en toiſes; il faut diviſer le nombre 30, qui exprime une plus petite eſpece, par le nombre 6 qui marque combien de fois cette plus petite eſpece eſt contenue dans la plus grande à laquelle on veut réduire la petite; & le quotient 5 fait connoître que 30 pieds valent 5 toiſes.

2.

Quand le nombre de la plus petite eſpece eſt moindre que le nombre qui marque combien de fois elle eſt contenue dans la plus grande; alors la réduction ne donne qu'une fraction ſans aucun entier. Par exemple, pour réduire 5 pouces en pieds; on trouve pour quotient la ſeule fraction $\frac{5}{12}$ ſans entier. De même pour réduire 5 pouces en toiſes, on trouve la ſeule fraction $\frac{5}{72}$ ſans entier.

PROBLÊME VIII.

280. *REDUIRE une grandeur compoſée d'un entier & d'une fraction à une ſeule fraction.*

Regle ou operation. 1°. Il faut multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction. 2°. Il faut écrire le produit qu'on vient de trouver augmenté du numerateur de la fraction, pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, & lui donner pour dénominateur celui de la fraction.

EXEMPLES.

POUR réduire $4\frac{2}{5}$ en une ſeule fraction, 1°, il faut multiplier l'entier 4 par 5. 2°. Ajouter au produit 20 le numerateur 2 de la fraction; & la ſomme 22 ſera le numerateur de

la fraction qu'on cherche, qui aura 5 pour dénominateur. Cette fraction sera donc $\frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$.

Pour réduire $a + \frac{c^2}{b}$ à une seule fraction, il faut écrire $\frac{ab + c^2}{b}$.

* 279. Ce Problême n'est qu'un Corollaire du précedent, * on y rétablit par la multiplication l'expression que le précedent avoit fait changer par la division. Ainsi il n'a pas besoin de nouvelle démonstration.

PROBLÊME IX.

281. *TROUVER une fraction qui soit double, triple, en un mot, qui soit un multiple quelconque d'une fraction donnée.*

Regle ou operation. Il faut multiplier le numerateur de la fraction donnée par 2, si l'on en veut le double; par 3, si on en veut le triple; par 4, si l'on en veut le quadruple, &c. écrire ce produit pour le premier terme de la fraction qu'on cherche, & lui donner pour second terme le dénominateur de la fraction donnée.

EXEMPLES.

POUR trouver une fraction double de $\frac{3}{4}$, il faut écrire $\frac{2 \times 3}{4} = \frac{6}{4}$.

Pour trouver une fraction triple de $\frac{a}{b}$, il faut écrire $\frac{3a}{b}$.

Démonstration. On supposera, pour rendre la démonstration generale, que le nombre qui exprime le multiple quelconque de la fraction donnée, est représenté par m. Par exemple, quand on demande le double de la fraction donnée, $m = 2$; quand on demande le triple, $m = 3$, &c. Ainsi $\frac{ma}{b}$ représentera la fraction multiple quelconque de la fraction

* 118. $\frac{a}{b}$ que le Problême fait découvrir. Cela supposé. * Un rapport est à un autre rapport, comme le produit des extrêmes est

* 109. au produit des moiens. Par consequent $\frac{ma}{b} . \frac{a}{b} :: mab . 1ab ::$ * $m . 1$. En mettant 2 au lieu de m, on aura $\frac{2a}{b} . \frac{a}{b} :: 2ab . 1ab :: 2 . 1$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLÊME X.

282. *TROUVER une fraction qui soit la moitié, le tiers, le quart, la cinquiéme partie; en un mot, qui soit la partie déterminée quelconque d'une fraction donnée.*

Regle ou operation. 1°. Il faut multiplier le dénominateur de la fraction donnée par 2, si l'on en veut la moitié; par 3, si on en veut le tiers; par 4, si on en veut le quart, &c. 2°. Il faut écrire le produit pour le dénominateur de la fraction qu'on cherche; & pour numerateur, le numerateur de la fraction donnée.

EXEMPLE.

POUR avoir la moitié de $\frac{1}{5}$, il faut multiplier 5 par 2, ce qui donnera 10; & écrire $\frac{1}{10}$. C'est la moitié de $\frac{1}{5}$.

Pour avoir le quart de $\frac{1}{3}$, il faut multiplier 3 par 4; le produit sera 12: il faut écrire $\frac{1}{12}$ pour le quart de $\frac{1}{3}$.

Pour avoir la cinquiéme partie de $\frac{a}{b}$, il faut écrire $\frac{a}{5b}$.

Démonstration. On supposera, pour rendre la démonstration generale, que n représente 2 quand on veut la moitié d'une fraction; 3, quand on veut le tiers; 4, quand on veut le quart, &c. Ainsi $\frac{a}{b}$ représentant la fraction proposée; $\frac{a}{nb}$ représentera en general celle que le Problême fait découvrir. Cela supposé * Un rapport est à un autre rapport, com- * 118.
me le produit des extrêmes est au produit des moyens. Ainsi
$\frac{a}{nb} . \frac{a}{b} :: 1ab . nab ::$ * $1 . n$. C'est à dire, si n vaut 2, $\frac{a}{nb}$ * 109.
sera $\frac{a}{2b}$; si n vaut 3, $\frac{a}{nb} = \frac{a}{3b}$. *&c.* L'on aura donc $\frac{a}{2b}$.
$\frac{a}{b} :: 1ab . 2ab ::$ * $1 . 2$. &c. *Ce qu'il falloit démontrer*. * 109.

PROBLÊME XI.

283. *REDUIRE une fraction de fraction à une seule fraction.*

Par exemple, réduire les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ à une seule fraction.

Regle ou operation. Il faut former une fraction, qui ait pour premier terme le produit des numerateurs des deux fractions données, & pour second terme le produit des dénominateurs de ces deux fractions. Ce sera la fraction qu'on cherche.

EXEMPLES.

POUR réduire les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ en une seule fraction; il faut écrire $\frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12}$.

Pour réduire $\frac{2}{5}$ de $\frac{9}{10}$ en une seule fraction, il faut écrire $\frac{2 \times 9}{5 \times 10} = \frac{18}{50}$.

Démonstration. On appliquera la démonstration à un exemple pour la rendre plus claire. Réduire $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ à une seule fraction, c'est comparer ou rapporter immediatement à l'unité deux tiers de quatre cinquiémes de l'unité; c'est à dire, trouver qu'elle est la fraction, qui ne contient que des parties de l'unité, & qui soit pourtant les deux tiers de quatre cinquiémes de l'unité. Or en multipliant 5, dénominateur de $\frac{4}{5}$ de l'unité, par 3 dénominateur de $\frac{2}{3}$ de quatre cinquiémes de l'unité, & écrivant le produit 15 pour le dénominateur d'une fraction dont le numerateur soit le numerateur 4 de $\frac{4}{5}$
* 282. de l'unité; il est évident par le Problême précedent * que cette fraction $\frac{4}{15}$ de l'unité sera un tiers de la fraction $\frac{4}{5}$ de l'unité. Par consequent si on prend cette fraction deux fois; ou, ce qui revient au même, si on multiplie son numerateur 4 par 2, numerateur de $\frac{2}{3}$ de quatre cinquiémes de l'unité, on
* 281. aura la fraction $\frac{2 \times 4}{15} = \frac{8}{15}$ de l'unité, qui vaudra * deux tiers de quatre cinquiémes de l'unité. Le Problême fait donc réduire une fraction de fraction à une fraction de l'unité qui est égale à cette fraction de fraction. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

284. POUR réduire une fraction de fraction de fraction; par exemple $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$; c'est à dire, la moitié de deux tiers de quatre cinquiémes de l'unité, à une seule fraction; il faut écrire le produit $1 \times 2 \times 4 = 8$ des numerateurs pour le premier terme de la fraction qu'on cherche; & pour second terme, le produit $2 \times 3 \times 5 = 30$ de trois dénominateurs, & la fraction qu'on cherche sera $\frac{8}{30}$.

* 283. *Démonstration.* On a démontré * que $\frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$ étoit la valeur de la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de l'unité. D'où il
* 282. suit que $\frac{1 \times 8}{2 \times 15} = \frac{1 \times 2 \times 4}{2 \times 3 \times 5} = \frac{8}{30}$, qui est la valeur * de la moitié de $\frac{8}{15}$ de l'unité; est par consequent la valeur de $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de l'unité. D'où l'on voit qu'on peut trouver de la même maniere, par la multiplication des numerateurs & par la multiplication des dénominateurs, une seule fraction de l'unité égale à une fraction de fraction de fraction de fraction, &c. On peut nommer ces fractions de fraction de fraction, &c. des fractions composées.

COR-

COROLLAIRE.

285. IL suit des Problêmes précedens & de leurs Corollaires, qu'il n'y a point de nombre, qu'on ne puisse réduire à être une simple fraction de l'unité.

Car tout nombre est ou un nombre entier, ou un nombre rompu, c'est à dire, ou une fraction. Toute fraction est ou une fraction simple de l'unité, ou une fraction composée, c'est à dire, une fraction de fraction, &c. de l'unité; ou bien, c'est une fraction simple ou composée, c'est à dire, fraction, de fraction, &c. d'un nombre entier quelconque; comme $\frac{2}{3}$ de 60, $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$ de 60, sont des fractions du nombre 60, la premiere simple, la seconde composée.

Or, 1°, tout nombre entier peut être réduit en une simple fraction de l'unité, en l'écrivant en fraction, par exemple $\frac{60}{1}$, & multipliant ensuite ses deux termes * par un nombre tel qu'on voudra, comme par 10, 100, &c. car on aura $\frac{600}{10}=\frac{60}{1}$. * 278.

2°. Toute fraction simple de l'unité est par elle-même sans réduction, une simple fraction de l'unité: & toute fraction composée; c'est à dire, toute fraction de fraction, &c. de l'unité, peut se réduire à une fraction simple de l'unité *par les articles* 283, 284.

3°. Enfin toute fraction d'un nombre entier quelconque tant simple que composée, c'est à dire, qui soit une fraction de fraction, &c. d'un nombre entier quelconque, peut se réduire à une simple fraction de l'unité. Car il n'y a qu'à réduire, *par l'article* 278, le nombre entier lui-même en simple fraction de l'unité, & la fraction soit simple soit composeé; c'est à dire, la fraction de fraction, &c. du nombre entier, deviendra, par cette réduction, une fraction composée; c'est à dire, une fraction de fraction, &c. de l'unité. Elle pourra donc être réduite *par les articles* 283 *&* 284, à une simple fraction de l'unité.

COROLLAIRE.

ON voit clairement par le Corollaire précedent, qu'il n'y a point de nombre possible, soit entier, soit rompu, qui n'ait une mesure commune ou aliquote commune avec l'u-

nité. D'où il suit que tous les nombres possibles peuvent avoir entr'eux une mesure commune.

SECTION III.

Où l'on explique l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division des fractions, la formation de leurs puissances, & l'extraction de leurs racines.

L'Addition & la Soustraction des fractions ou rapports.

I. PROBLÊME.

286. *AJOUTER ensemble deux ou plusieurs fractions données, & retrancher une ou plusieurs fractions données d'une ou de plusieurs autres fractions données.*

Regle ou operation. 1°. Il faut réduire toutes les fractions
* 270. données * à un même dénominateur. 2°. S'il faut les ajouter,
& 271. on prendra la somme de tous les numerateurs des fractions réduites pour le numerateur d'une fraction, & le dénominateur commun pour son dénominateur; & cette fraction sera la somme des fractions données. 3°. S'il faut retrancher l'une de l'autre, on retranchera le numerateur de la fraction qui est la réduite de celle qu'on veut retrancher, on le retranchera dis-je, du numerateur de la réduite de l'autre, & l'on formera une fraction qui ait la difference des numerateurs pour premier terme, & le dénominateur commun pour second terme; & elle sera la difference qu'on cherche. 4°. S'il faut retrancher plusieurs fractions d'une ou de plusieurs autres; après les avoir toutes réduites au même dénominateur, on ajoutera toutes celles qu'il faut retrancher dans une fraction qui en soit la somme, & toutes les autres aussi en une fraction qui en soit la somme; & l'on retranchera le numerateur de la premiere du numerateur de la seconde. On fera une fraction qui ait pour premier terme la difference des numerateurs qui vient d'être découverte, & pour second terme le dénominateur commun. Ce sera la fraction qu'on
* 269. cherche. 5°. On peut, avant d'operer, réduire * chacune des fractions données aux moindres termes pour rendre l'o-

peration plus simple. On peut aussi, après l'operation, reduire aux moindres termes la fraction, qui est la somme ou la difference, pour la rendre plus simple.

Exemples de l'Addition des fractions.

POUR trouver la somme de $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$, 1°, on les réduit au même dénominateur, & l'on trouve $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$. 2°. On prend la somme 17 des numerateurs des fractions réduites, pour le premier terme, & le dénominateur commun 12 pour le second terme de la fraction $\frac{17}{12}$, qui est la somme des deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$.

Pour trouver la somme de $15 = \frac{15}{1}$ & $\frac{3}{5}$, on leur donne le même dénominateur, & elles deviennent $\frac{75}{5}$ & $\frac{3}{5}$. 2°. On prend la somme $75 + 3 = 78$ des numerateurs pour le premier terme, & le dénominateur commun 5 pour le second terme de la fraction $\frac{78}{5}$, qui est la somme de $\frac{15}{1}$ & de $\frac{3}{5}$.

Pour trouver la somme de $3\frac{1}{2}$ & de $4\frac{2}{3}$, 1°, On les réduit à un même dénominateur, & l'on trouve $\frac{21}{6}$ & $\frac{28}{6}$. 2°. On ajoute les numerateurs, & l'on fait de la somme 49 le premier terme, & du dénominateur commun 6, le second terme de la fraction $\frac{49}{6}$, qui est la somme qu'on cherche.

Quand il y a des entiers & des fractions, comme dans les deux exemples précedens, on peut, si l'on veut, ajouter les entiers à part, & les fractions à part, & écrire la somme des entiers, & au devant, en moindres chifres, la somme des fractions. Ainsi on peut écrire $15\frac{3}{5}$ pour la somme de 15 & de $\frac{3}{5}$; & $7\frac{7}{6}$ ou $8\frac{1}{6}$ pour la somme de $3\frac{1}{2}$ & de $4\frac{2}{3}$.

Soit proposée d'ajouter les trois fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$. 1°. Voyant que le dénominateur 2 de la premiere est un diviseur du dénominateur 4 de la seconde, je réduis la prémiere $\frac{1}{2}$ * au dénominateur de la seconde, & les trois fractions sont $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$, qui se réduisent, en ajoutant ensemble les deux premieres, à $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$. Je les réduis au même dénominateur, & elles deviennent $\frac{21}{28}$ & $\frac{20}{28}$. 2°. J'ajoute les numerateurs, & j'écris $\frac{41}{28}$ pour la somme de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$. * 270.

Pour ajouter $\frac{1}{64}$, $\frac{23}{16}$, $-1\frac{15}{16} = -\frac{31}{16}$. 1°. Je les réduis au même dénominateur, en multipliant seulement les deux

termes de chacune des deux dernieres par 4, à cause de $4 \times 16 = 64$: & je trouve $\frac{23}{16} = \frac{92}{64}$ & $\frac{31}{16} = \frac{124}{64}$. 2°. J'ajoute les deux positives $\frac{1}{64} + \frac{92}{64} = + \frac{93}{64}$. Et comme la négative $- \frac{124}{64}$ surpasse la positive, je retranche le numerateur 93 du numerateur 124, la difference est 31, laquelle est negative; j'écris $- 31$ pour le premier terme, & 64 pour le second terme de la fraction $- \frac{31}{64}$, qui est la somme des trois proposées.

On remarquera que quand on ajoute des fractions positives & négatives, l'addition des négatives aux positives est une veritable soustraction; & si les négatives surpassent les positives, la somme aura le signe —; si les positives surpassent les négatives, la somme aura +; mais quand on ajoute des seules grandeurs négatives, c'est simplement une addition.

Pour ajouter $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, 1°, je les réduis au même second terme, & elles deviennent $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$. 2°. J'ajoute les numerateurs, & j'écris $\frac{adf + bcf + bde}{bdf}$ pour la somme de $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$.

Pour ajouter $\frac{a^2 - c^2}{a - b}$ & $\frac{a^2b - a^2c}{ac - bc}$. 1°. Je les réduis au même dénominateur, en multipliant simplement les deux termes de la premiere par c, qui est le quotient de $ac - bc$ divisé par $a - b$, & je trouve $\frac{a^2 - c^2}{a - b} = \frac{a^2c - c^3}{ac - bc}$, qui a le même dénominateur que la seconde. 2°. J'ajoute ensuite les numerateurs des deux fractions qui ont le même dénominateur, & j'écris leur somme pour le premier terme, & le dénominateur commun pour le second terme de la fraction $\frac{a^2c - c^3 + a^2b - a^2c}{ac - bc}$ qui est la somme des deux proposées.

Pour ajouter $\frac{a^4}{a^2b - b^3}$, & $\frac{b^3}{a^2 - ab}$, 1°. je les réduis au même dénominateur, en remarquant qu'il suffit (à cause de $a - b$, diviseur commun des dénominateurs $a^2b - b^3 = \overline{a - b} \times \overline{ab + b^2}$, & $a^2 - ab = \overline{a - b} \times a$) de multiplier les deux termes de la premiere par a, & les deux termes de la seconde par $ab + b^2$, & je trouve $\frac{a^4}{a^2b - b^3} = \frac{a^5}{a^3b - ab^3}$, & $\frac{b^3}{a^2 - ab} = \frac{ab^4 + b^5}{a^3b - ab^3}$. 2°. J'ajoute les numerateurs des fractions réduites au même dénominateur, & j'écris leur somme pour le premier terme, & le dénominateur commun pour le second terme

de la fraction $\frac{a^5 + ab^4 + b^5}{a^3b - ab^3}$ qui est la somme des deux proposées.

Exemples de la Soustraction des fractions.

POUR retrancher $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$. 1°. Je les réduis au même dénominateur, & je trouve $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$. 2°. Je retranche 8 de 9, & j'écris la difference 1 pour le premier terme, & le dénominateur commun 12 pour le second terme de la fraction $\frac{1}{12}$ que je cherche.

Pour ôter $\frac{5}{8} + \frac{6}{12}$ de $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$. 1°. Je trouve la somme des deux premieres réduites aux moindres termes $\frac{9}{8}$, & la somme des deux autres $\frac{5}{4}$. 2°. Je multiplie les deux termes de $\frac{5}{4}$ par 2, & j'ai $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$. J'ôte ensuite le numerateur 9 du numerateur 10, & j'écris la difference 1 pour le premier terme & le dénominateur commun pour le second terme de la fraction $\frac{1}{8}$ que je cherche.

Lorsque les fractions à retrancher sont négatives & les autres positives, la soustraction est une addition; car pour retrancher les négatives il faut les rendre positives, & les ajouter aux autres positives.

Lorsque les fractions à retrancher sont positives & les autres négatives, la soustraction est encore une addition; car pour retrancher les positives il faut les rendre négatives, & ensuite les ajouter aux autres négatives.

Pour retrancher $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$, 1°, je les réduis au même dénominateur, & je trouve $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$. 2°. J'ôte le numerateur de la premiere du numerateur de la seconde, & j'écris $\frac{bc - ad}{bd}$ pour la fraction que je cherche.

Pour rétrancher $\frac{-a^2 + b^2}{a - b}$ de $\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2}$, 1°, je les réduis au même dénominateur en multipliant seulement les deux termes de la premiere par $a + b$ qui est le quotient de $a^2 - b^2 = \overline{a - b} \times \overline{a + b}$ divisé par $a - b$, & je trouve $\frac{-a^2 + b^2}{a - b} = \frac{-a^3 - a^2b + ab^2 + b^3}{a^2 - b^2}$. 2°. Je retranche le numerateur de cette derniere fraction du numerateur $a^3 + b^3$; j'écris leur difference pour le premier terme & le dénominateur commun pour le second terme de la fraction $\frac{2a^3 + a^2b - ab^2}{a^2 - b^2}$ qui est celle que je cherche.

Pour ôter $a - \frac{ab}{c}$ de $b - \frac{ac}{b}$, 1°, je réduis $a - \frac{ab}{c}$ à $\frac{ac - ab}{c}$, & $b - \frac{ac}{b}$ à $\frac{b^2 - ac}{b}$, & je leur donne ensuite le même dénomi-

nateur, & je trouve $\frac{abc - ab^2}{bc}$ & $\frac{b^2c - ac^2}{bc}$. 2°. Je retranche le numerateur de la premiere réduite du numerateur de la seconde réduite, & j'écris la difference pour le premier terme & le dénominateur commun pour le second de la fraction $\frac{b^2c - ac^2 - abc + ab^2}{bc}$, qui eſt la fraction que je cherche, qu'on peut réduire à $b - a \frac{-ac^2 + ab^2}{bc}$.

Quand il y a des entiers & des fractions à retrancher d'autres entiers joints auſſi à des fractions, on peut retrancher à part les entiers des entiers, & les fractions des fractions, en écrivant les entiers du reſte, & au devant les fractions du reſte que fait découvrir la ſouſtraction.

REMARQUE.

QUAND le numerateur eſt complexe, chaque grandeur incomplexe de ce numerateur peut être regardée comme un numerateur particulier, qui a pour dénominateur celui de la fraction, dont le numerateur eſt complexe.

Par exemple $\frac{b^2c - abc - ac^2 + ab^2}{bc} = \frac{b^2c}{bc} - \frac{abc}{bc} - \frac{ac^2}{bc} + \frac{ab^2}{bc}$. Et l'on peut abreger celles de ces fractions qui le peuvent être en diviſant leurs deux termes par une même grandeur. Par exemple, la fraction précedente ſe peut réduire à $b - a - \frac{ac^2}{bc} + \frac{ab^2}{bc}$.

* 214. *Démonſtration du Problême.* On a fait voir clairement * que les fractions qui ont le même dénominateur, peuvent être regardées comme des unitez. Par exemple, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, peuvent être regardées comme des unitez qui ſont chacune une troiſiéme partie de l'unité à laquelle elles ont rapport. Les numerateurs expriment le nombre de ces unitez; ainſi en ajoutant les numerateurs, ou les retranchant les uns des autres, il eſt évident que la fraction qui a pour premier terme la ſomme ou la difference des numerateurs, & pour ſecond terme le dénominateur commun, eſt la ſomme ou la difference de ces fractions.

La Multiplication des fractions.

II. PROBLÊME.

287. *MULTIPLIER deux ou pluſieurs fractions les unes par les autres, & en trouver le produit.*

Regle ou operation. Il faut multiplier les numerateurs les uns par les autres, & écrire le produit pour le premier terme de la fraction qu'on cherche. Il faut multiplier ensuite les dénominateurs, & en écrire le produit pour le second terme de la fraction qu'on cherche.

EXEMPLES.

POUR multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, il faut écrire $\frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$ pour le produit qu'on cherche.

Pour multiplier $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ les unes par les autres, il faut écrire $\frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4} = \frac{6}{24}$ pour le produit qu'on cherche, qui devient $\frac{1}{4}$, en le réduisant aux moindres termes.

Pour multiplier $3 = \frac{3}{1}$ par $\frac{2}{5}$, il faut écrire le produit $\frac{3 \times 2}{1 \times 5} = \frac{6}{5}$.

Pour multiplier $2\frac{3}{4}$ par $4\frac{2}{5}$, il faut réduire * chaque entier & sa fraction en une seule fraction, & l'on aura $\frac{11}{4}$ à multiplier par $\frac{22}{5}$; il faut ensuite écrire pour leur produit $\frac{11 \times 22}{4 \times 5} = \frac{242}{20}$, qui devient, en le réduisant, * $12\frac{2}{20}$, ou * $12\frac{1}{10}$. * 280. * 279. * 269.

REMARQUE.

288. QUAND il y a des entiers & des fractions à multiplier par des entiers & des fractions, comme $2\frac{3}{4}$ par $4\frac{2}{5}$; on pourra faire la multiplication par parties. On multipliera d'abord les entiers par les entiers, comme dans cet exemple 2 par 4, & l'on aura 8; ensuite chaque entier par la fraction de l'autre entier, & l'on aura $2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$, & $4 \times \frac{3}{4} = \frac{12}{4}$: enfin la fraction par la fraction, & l'on aura $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$. On prendra ensuite la somme de tous ces produits $8 + \frac{4}{5} + \frac{12}{4} + \frac{6}{20} = 12\frac{1}{10}$. Il est évident que ce sera le produit qu'on cherchoit.

Pour multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, il faut écrire le produit des numerateurs *ac* pour le premier terme, & le produit *bd* des dénominateurs pour le second terme de la fraction $\frac{ac}{bd}$ que l'on cherche.

Pour multiplier $ab = \frac{ab}{1}$ par $\frac{a^3 + b^3}{a - b}$. Il faut écrire $\frac{ab \times \overline{a^3 + b^3}}{1 \times \overline{a - b}} = \frac{a^4b + ab^4}{a - b}$ pour le produit.

Si l'on veut multiplier $a + \frac{c^2}{b}$ par $a - \frac{c^2}{b}$, on peut faire la

multiplication de ces deux manieres. 1°. On prendra par parties les quatre produits $a \times a = a^2$; $a \times -\frac{c^2}{b} = -\frac{ac^2}{b}$; $a \times \frac{a^2}{b} = \frac{a^3}{b}$; $+\frac{a^2}{b} \times -\frac{c^2}{b} = -\frac{a^2c^2}{b^2}$ & leur somme $a^2 - \frac{ac^2}{b} + \frac{a^3}{b} - \frac{a^2c^2}{b^2}$ sera le produit qu'on cherche. 2. Ou bien on réduira $a + \frac{a^2}{b}$
*280. à * $\frac{ab + a^2}{b}$, & $a - \frac{c^2}{b}$ à $\frac{ab - c^2}{b}$. Ensuite on fera la multiplication $\frac{\overline{ab + a^2} \times \overline{ab - c^2}}{b \times b} = \frac{a^2b^2 + a^3b - abc^2 - a^2c^2}{b^2}$ (qu'on pourra réduire à $a^2 + \frac{a^3}{b} - \frac{ac^2}{b} - \frac{a^2c^2}{b^2}$.) & l'on aura le produit qu'on cherche.

Démonstration du Problême. Il faut démontrer qu'en multipliant deux fractions quelconques représentées par $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$,
*72. leur produit est $\frac{ac}{bd}$. (C'est à dire, il faut démontrer que * $1 . \frac{a}{b} :: \frac{c}{d} . \frac{ac}{bd}$.)
*113. *75. $1 . \frac{a}{b} ::$ * $b . a ::$ * $bc . ac ::$ * $\frac{bc}{bd} . \frac{ac}{bd}$. Par consequent
*109. * $1 . \frac{a}{b} :: \frac{bc}{bd} . \frac{ac}{bd}$. Mais $\frac{bc}{bd} =$ * $\frac{c}{d}$. C'est pourquoi si l'on met
*52. *75. dans $1 . \frac{a}{b} :: \frac{bc}{bd} . \frac{ac}{bd}$, la fraction $\frac{c}{d}$ à la place de son égale $\frac{bc}{bd}$, l'on aura $1 . \frac{a}{b} :: \frac{c}{d} . \frac{ac}{bd}$. *Ce qu'il falloit démontrer*.

Autre démonstration. On aura démontré que $1 . \frac{a}{b} :: \frac{c}{d} . \frac{ac}{bd}$ si l'on fait voir que $\frac{c}{d} . \frac{ac}{bd} :: 1 . \frac{a}{b}$. En voici la démonstra-
*118. *75. tion $\frac{c}{d} . \frac{ac}{bd} ::$ * $bcd . acd ::$ * $b . a ::$ * $1 . \frac{a}{b}$. Par consequent *
*113. *52. $\frac{c}{d} . \frac{ac}{bd} :: 1 . \frac{a}{b}$. *Ce qu'il falloit démontrer*.

COROLLAIRE.

289. QUAND les deux fractions qu'on multiplie l'une par l'autre sont chacune moindre que l'unité, comme $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, leur produit $\frac{6}{12}$ est moindre que l'unité. Car supposant ces deux fractions représentées par $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, & leur produit par $\frac{ac}{bd}$, on
*72. aura * $1 . \frac{a}{b} :: \frac{c}{d} . \frac{ac}{bd}$; mais le consequent $\frac{a}{b}$ du premier rapport est supposé moindre que l'antecedent 1; le consequent $\frac{ac}{bd}$ du second rapport est donc moindre que son antecedent $\frac{c}{d}$, qu'on a supposé plus petit que l'unité.

REMARQUE.

ON voit à présent la raison pourquoi une grandeur écrite à la droite d'une fraction est censée être au numerateur : car $\frac{a}{b} \times x = \frac{a}{b} x = \frac{ax}{b}$.

La

La Division des fractions.

PROBLÊME III.

290. DIVISER *une fraction* $\frac{a}{b}$ *par une autre* $\frac{c}{d}$, *& en trouver le quotient.*

Regle ou operation. Il faut multiplier le numerateur a du dividende $\frac{a}{b}$ par le dénominateur d du diviſeur $\frac{c}{d}$; le produit ad ſera le premier terme du quotient qu'on cherche. Il faut enſuite multiplier le dénominateur b du dividende $\frac{a}{b}$ par le numerateur c du diviſeur $\frac{c}{d}$, le produit bc ſera le ſecond terme du quotient qu'on cherche, qui eſt $\frac{ad}{bc}$.

Ceux qui commencent, peuvent écrire le diviſeur à la droite du dividende, & multiplier en croix $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$; le quotient ſera $\frac{ad}{bc}$. Ou bien, ayant écrit le dividende le premier, & le diviſeur le ſecond, il n'y a qu'à prendre le produit des extrêmes pour le numerateur, & le produit des moyens pour le dénominateur de la fraction qui eſt le quotient.

Pour diviſer $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, il faut multiplier 2 par 5, le produit 10 ſera le premier terme du quotient. Il faut enſuite multiplier 3 par 4, le produit 12 ſera le ſecond terme du quotient qui eſt $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Pour diviſer $3 = \frac{3}{1}$ par $\frac{2}{5}$, il faut écrire pour le quotient $\frac{3 \times 5}{1 \times 2} = \frac{15}{2}$.

Pour diviſer $\frac{2}{5}$ par $3 = \frac{3}{1}$, il faut écrire pour le quotient $\frac{2 \times 1}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$.

Pour diviſer $5\frac{2}{3}$ par $6\frac{3}{4}$, il faut réduire chaque entier & ſa fraction à une ſeule fraction, & l'on aura $\frac{17}{3}$ à diviſer par $\frac{27}{4}$. Il faut enſuite former le quotient $\frac{17 \times 4}{3 \times 27} = \frac{68}{81}$.

Pour diviſer $a = \frac{a}{1}$ par $\frac{b}{c}$, il faut écrire $\frac{a \times c}{1 \times b} = \frac{ac}{b}$.

Pour diviſer $\frac{b}{c}$ par $a = \frac{a}{1}$, il faut écrire $\frac{b \times 1}{c \times a} = \frac{b}{ac}$.

Pour diviſer $a + \frac{b^2}{c}$ par $d + \frac{e^2}{f}$, il faut réduire chaque entier & ſa fraction à une ſeule fraction, & l'on aura $\frac{ac + b^2}{c}$ à diviſer par $\frac{df + e^2}{f}$. Il faut enſuite former le quotient $\frac{\overline{ac + b^2} \times f}{c \times \overline{df + e^2}} = \frac{acf + b^2 f}{cdf + ce^2}$.

Démonſtration du Problême. Il faut démontrer qu'en fai-

ſant la diviſion d'une fraction quelconque repréſentée par $\frac{a}{b}$ par une autre fraction quelconque repreſentée par $\frac{c}{d}$, le
* 106. quotient eſt $\frac{ad}{bc}$: ce qui ſera démontré * ſi l'on fait voir que
* 118. $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} :: \frac{ad}{bc} . 1$. En voici la démonſtration $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} ::$ * $ad . bc ::$
* 111. * $\frac{ad}{bc} . 1$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUES.

1.

291. QUAND le numerateur du diviſeur eſt un diviſeur exact du numerateur du dividende, & que le dénominateur du diviſeur eſt en même temps un diviſeur exact du denominateur du dividende, comme s'il falloit diviſer $\frac{ab}{cd}$ par $\frac{b}{d}$; dans ce cas, on pourra prendre le quotient qui vient de la diviſion du numerateur du dividende par le numerateur du diviſeur pour le premier terme du quotient qu'on cherche, & le quotient qui vient de la diviſion du dénominateur du dividende par le dénominateur du diviſeur, pour le ſecond terme du quotient qu'on cherche. Pour diviſer $\frac{ab}{cd}$ par $\frac{b}{d}$, on peut écrire pour quotient $\frac{a}{c}$.

De même pour diviſer $\frac{12}{20}$ par $\frac{2}{5}$, on prendra pour le premier terme du quotient qu'on cherche, le quotient 6 de 12 diviſé par 2 ; & pour ſecond terme du quotient qu'on cher-
* 269. che, le quotient 4 de 20 diviſé par 5, & l'on aura $\frac{6}{4} =$ * $\frac{3}{2}$ pour le quotient qu'on cherche.
* 287. La démonſtration eſt évidente. Car * $1 . \frac{a}{c} :: \frac{b}{d} . \frac{ab}{cd}$. Par
* 55. conſequent les rapports inverſes ſont égaux ; & l'on aura *
* 106. $\frac{ab}{cd} . \frac{b}{d} :: \frac{a}{c} . 1$. D'où il ſuit * que $\frac{a}{c}$ eſt le quotient de $\frac{ab}{cd}$ diviſé par $\frac{b}{d}$.

2.

On n'a pas mis d'exemples de fractions dont les numerateurs & les dénominateurs fuſſent des grandeurs complexes; parceque n'y ayant aucune difficulté particuliere dans ces exemples; les plus ſimples exemples ſervent mieux à faire concevoir clairement les regles de la multiplication & de la diviſion, que les Commençans peuvent eux-mêmes appliquer aux exemples les plus compoſez.

3.

On peut, si l'on veut, réduire aux moindres termes, les fractions avant la multiplication & la division, & cela rendra ces operations plus simples. On peut aussi réduire encore les produits & les quotients qu'on trouve aux moindres termes pour les rendre plus simples.

4.

La division des fractions peut servir à faire connoître le
292. rapport d'une fraction $\frac{a}{b}$ à une autre $\frac{c}{d}$. Car le quotient de la division d'un rapport par un autre rapport * est un rapport égal à celui qui est entre ces deux rapports ; par exemple, le rapport de $\frac{a}{b}$ à $\frac{c}{d}$ est égal au quotient $\frac{ad}{bc}$. Car $\frac{a}{b} . \frac{c}{d}$ :: * $\frac{ad}{bc}$. 1 :: * *ad. bc.* * 118. * 290. * 111.

5.

Comme l'on marque la division d'une grandeur a par une
293. grandeur b de cette maniere $\frac{a}{b}$; on peut aussi marquer quelquefois la division de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, en écrivant $\frac{a}{b}$ sur une ligne, & $\frac{c}{d}$ au dessous de cette façon $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$: & pour réduire cette expression à une plus simple, on fait la division que marque cette expression, & l'on trouve le quotient $\frac{ad}{bc}$.

Quand on a cette autre expression $\frac{a + \frac{ab}{c}}{b + \frac{bd}{c}}$; on la réduit * d'abord à $\frac{\frac{ac + ab}{c}}{\frac{bc + bd}{c}}$; & faisant ensuite * la division, on la réduira à $\frac{acc + abc}{bcc + bdc}$. * 280. * 290.

Si l'on avoit cette autre expression $\frac{a + c}{b + \frac{cd}{d}}$; il faudroit d'abord réduire * le diviseur $b + \frac{cd}{d}$ à $\frac{bd + cd}{d}$, & ensuite * diviser $a + c$ $= \frac{a + c}{1}$ par $\frac{bd + cd}{d}$, & le quotient seroit $\frac{ad + cd}{bd + cd}$, qu'on peut réduire * à $\frac{a + c}{b + c}$. * 280. * 290. * 269.

Cette autre expression toute seule $\begin{array}{c} a \\ \hline b \\ \hline c \end{array}$ est équivoque. Car elle peut marquer ces deux divisions differentes, 1°, ou bien que l'entier $a = \frac{a}{1}$ est divisé par la fraction $\frac{b}{c}$; &, dans ce cas, le quotient est * $\frac{ac}{b}$. 2°. Ou bien elle peut marquer que * 290.

la fraction $\frac{a}{b}$ est divisée par l'entier $c = \frac{c}{1}$; & le quotient est
* 290. * $\frac{a}{bc}$, qui est different du précedent. C'est pourquoi il faut éviter cette expression; ou bien il faut, si l'on veut s'en servir, faire la ligne qui sépare le dividende du diviseur, plus grande que l'autre ligne. Par exemple, $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ marquera que a est divisé par $\frac{b}{c}$, & $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ marquera que $\frac{a}{b}$ est divisée par c.

On verra facilement par les expressions qu'on vient d'expliquer dans cette remarque, la maniere de faire la division marquée par l'expression suivante, qui servira à entendre celles qui seroient plus composées. $\dfrac{a + \frac{b^2}{c + \frac{bc}{d}}}{b - \frac{c^2 + \frac{b^3}{d}}{e}}$. On voit d'abord que le dividende est $a + \frac{b^2}{c + \frac{bc}{d}}$, & le diviseur $b - \frac{c^2 + \frac{b^3}{d}}{e}$. Mais avant de faire la division, il faut réduire l'un & l'autre séparément à une seule fraction. Commençant
* 280. par le dividende, il faut d'abord réduire $\frac{b^2}{c + \frac{bc}{d}}$ à * $\frac{b^2}{\frac{cd+bc}{d}}$;
* 290. & faisant la division * de $\frac{b^2}{1}$ par $\frac{cd+bc}{d}$, on le réduira à $\frac{b^2d}{cd+bc}$. Ainsi le dividende est déja réduit à $a + \frac{b^2d}{cd+bc}$; on le réduira
* 280. enfin à * $\frac{acd + abc + b^2d}{cd+bc}$.

Pour réduire le diviseur à une seule fraction, on réduira
* 280. d'abord $-\overline{c^2 + \frac{b^3}{d}}$ à * $-\frac{c^2d+b^3}{d} = -\overline{c^2 + \frac{b^3}{d}}$. On divisera ensuite $-\frac{c^2d+b^3}{d}$ par $e = \frac{e}{1}$, & l'on aura $-\frac{c^2d+b^3}{de} = -\frac{c^2 + \frac{b^3}{d}}{e}$. Le diviseur est déja réduit à $b - \frac{c^2d+b^3}{de}$. On le ré-
* 280. duira enfin à * $\frac{bde - \overline{c^2d+b^3}}{de}$.

Le dividende & le diviseur proposez étant ainsi preparez, on les divisera l'un par l'autre, & l'on trouvera le quotient $\frac{\overline{acd + abc + b^2d} \times de}{\overline{cd + bc} \times \overline{bde - c^2d + b^3}} = \frac{acd^2e + abcde + b^2d^2e}{bcd^2e + b^2cde - c^3d^2 - bc^3d + b^3cd + b^4c}$.

6.

Quand on s'est rendu familier le calcul des fractions & le calcul des grandeurs entieres, que l'on a expliquez jusqu'ici; on peut employer l'un avec l'autre dans beaucoup de calculs

qui demandent ce mélange, & qui sont utiles dans l'Analyse, & dans la résolution d'un grand nombre de Problêmes des Mathematiques. On va mettre quelques exemples, qui suffiront aux Commençans pour leur faire concevoir clairement le mélange du calcul des entiers avec le calcul des fractions, quand ils en trouveront; & pour faire eux-mêmes de ces calculs mêlez du calcul des entiers, & du calcul des fractions, quand ils en auront besoin.

294. Si l'on donne a à diviser par $a + x$; il semble qu'il suffit d'écrire $\frac{a}{a+x}$ pour le quotient, & c'est veritablement le quotient, *suivant les art.* 105, 112 & 115. Cependant on peut, en mêlant le calcul des fractions avec le calcul des entiers, trouver un quotient de la division qu'on propose qui ait des termes à l'infini, & cela est utile en plusieurs rencontres. Voici comment on trouve ce quotient qui contient des termes à l'infini.

dividende.	diviseur.
a	$a + x$
o	quotient
1er reste $- x$	
o	$1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} - \&c. = \frac{a}{a+x}$
2e reste $+ \frac{x^2}{a}$	
o	
3e reste $- \frac{x^3}{a^2}$	
o	
4e reste $+ \frac{x^4}{a^3}$	
o	
5e reste $- \frac{x^5}{a^4}$	
o	
&c.	

On divise a par a, & on écrit le quotient 1; puis on multiplie l'autre partie x du diviseur $a + x$ par le quotient 1, & on retranche le produit $+ 1x$ du dividende, ce qui se fait en écrivant $- 1x$ au dividende comme un reste. On efface le dividende a, ou bien on écrit o sous a, pour marquer qu'on s'en est servi.

On a donc le premier reste $- x$ pour le dividende sur lequel il faut operer. On divise $- x$ par a, on écrit le quotient $- \frac{x}{a}$; on écrit un o sous le dividende $- x$, on multiplie le quotient $- \frac{x}{a}$ par la seconde partie $+ x$ du diviseur,

& on ôte du dividende le produit — $\frac{x^2}{a}$, en l'écrivant au dividende avec le ſigne oppoſé + $\frac{x^2}{a}$, comme étant un reſte.

On diviſe ce dividende + $\frac{x^2}{a}$ par a; on écrit le quotient + $\frac{x^2}{a^2}$, on écrit o ſous le dividende + $\frac{x^2}{a}$. On multiplie la ſeconde partie + x du diviſeur par le quotient + $\frac{x^2}{a^2}$; & on ôte du dividende le produit + $\frac{x^3}{a^2}$, en l'écrivant au dividende avec le ſigne oppoſé — $\frac{x^3}{a^2}$ comme un reſte.

On opere ſur ce nouveau dividende comme ſur chacun des précedens, c'eſt à dire, on diviſe — $\frac{x^3}{a^2}$ par a, on écrit le quotient — $\frac{x^3}{a^3}$: on met o ſous le dividende — $\frac{x^3}{a^2}$. On prend le produit de — $\frac{x^3}{a^3}$ par + x, ſeconde partie du diviſeur, qui eſt — $\frac{x^4}{a^3}$, & on l'ôte du dividende, en l'écrivant au dividende avec le ſigne oppoſé + $\frac{x^4}{a^3}$ comme un reſte.

En regardant ce reſte comme le dividende, on continue la diviſion tant qu'on veut, & l'on trouve toujours de nouveaux termes pour le quotient. La maniere de trouver les termes déja découverts, qu'on vient d'expliquer, ſuffit pour faire concevoir comment ſe font ces ſortes de diviſions, & comment on découvre des termes du quotient à l'infini.

Cette maniere de trouver un quotient, qui ait des termes à l'infini, en faiſant la diviſion d'une grandeur a par une grandeur $a + x$, s'appelle une *approximation* à l'infini de la grandeur $\frac{a}{a+x}$. On dit auſſi que *la ſuite* infinie $1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3}$ + &c. eſt la valeur de $\frac{a}{a+x}$; & la maniere de trouver cette *ſuite* infinie ſe nomme la *réduction* de $\frac{a}{a+x}$ en *la ſuite* infinie, qui en eſt la valeur.

On peut voir d'autres exemples de ces ſortes de diviſions dans l'*Analyſe démontrée, article* 208.

295. Quand en faiſant une diviſion des grandeurs litterales complexes par un diviſeur complexe, l'on trouve un reſte qui empêche la diviſion d'être exacte; on peut, par des operations ſemblables à celles qu'on vient d'expliquer, réduire ce reſte en *la ſuite* infinie qui en eſt la valeur, en continuant de diviſer ce reſte par le diviſeur tant qu'on voudra.

296. On peut auſſi, par le moyen des operations qu'on vient d'expliquer, trouver le plus grand diviſeur commun de deux grandeurs litterales complexes, ſans avoir beſoin de la pré-

paration dont on a fait le cinquiéme article de la méthode * du plus grand diviſeur commun : Ce qu'on concevra aiſé- *252. ment par un exemple.

$$\begin{array}{llll} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 & \Big(\dfrac{-2x^2 + 5x - 3}{-\frac{x}{2} + \frac{3}{4}} \\ \circ \quad\ \circ \quad\ \circ \quad\ \circ & \\ \quad -\frac{3x^2}{2} + \frac{7x}{2} - 2 & \\ \quad\quad\ \circ \quad\ \circ & \\ \text{1. reſte.} \quad -\frac{1x}{4} + \frac{1}{4} & \end{array}$$

Pour trouver le plus grand diviſeur commun de $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, & de $-2x^2 + 5x - 3$. Il faut dire x^3 diviſé par $-2x^2$, donne pour quotient $-\frac{x}{2}$; il faut écrire o ſous x^3, pour marquer qu'on s'en eſt ſervi, & multiplier l'autre partie $+5x - 3$ du diviſeur par le quotient $-\frac{x}{2}$, & retrancher du dividende les produits $-\frac{5x^2}{2} + \frac{3x}{2}$ à meſure qu'on les forme; c'eſt à dire, il faut réduire * $-4x^2$ du dividende à $-\frac{8x^2}{2}$ *278. & en retrancher $-\frac{5x^2}{2}$, & écrire le reſte $-\frac{3x^2}{2}$, & réduire auſſi $+5x$ à $+\frac{10x}{2}$, en ôter $+\frac{3x}{2}$; & écrire le reſte $+\frac{7x}{2}$.

Il faut continuer la diviſion, parceque x^2 dans le dividende $-\frac{3x^2}{2} + \frac{7x}{2} - 2$ n'eſt pas à un moindre degré que dans le diviſeur. On dira donc le quotient de $-\frac{3x^2}{2}$ diviſé par $-2x^2$ eſt $+\frac{3}{4}$; il faut l'écrire au quotient, mettre un o ſous $-\frac{3x^2}{2}$; multiplier $+5x - 3$ par le quotient $+\frac{3}{4}$, & ôter les produits $+\frac{15x}{4} - \frac{9}{4}$ de $+\frac{7x}{2} - 2$ à meſure qu'on les forme : ce qui ſe pratique en réduiſant * $+\frac{7x}{2}$ à $+\frac{14x}{4}$, c'eſt à dire au *270. dénominateur de $\frac{15x}{4}$, & -2 à $-\frac{8}{4}$; puis ôtant $+\frac{15x}{4}$ de $+\frac{14x}{4}$, & $-\frac{9}{4}$ de $-\frac{8}{4}$, & écrivant les reſtes $-\frac{1x}{4} + \frac{1}{4}$.

Dans le reſte $-\frac{1x}{4} + \frac{1}{4}$, x a un moindre degré que dans le diviſeur $-2x^2 + 5x - 3$; c'eſt pourquoi, ſuivant * la *252. art. 3. methode de trouver le plus grand diviſeur commun; il faut à préſent diviſer $-2x^2 + 5x - 3$, qui a ſervi de diviſeur, & qui devient le dividende, par le reſte $-\frac{1x}{4} + \frac{1}{4}$ pris pour diviſeur. Mais ce nouveau diviſeur ayant pour multiplicateur commun de tous ſes termes la fraction $\frac{1}{4}$; car $-\frac{1x}{4} + \frac{1}{4} = +\frac{1}{4} \times -x + \frac{1}{4} \times 1$; il faut en diviſer tous les termes par $\frac{1}{4}$ (ou ce qui revient au même, les multiplier par 4, ce qui ſe fait en effaçant ſimplement 4) & le diviſeur ſera $-x + 1$.

Il faut à présent diviser $- 2x^2 + 5x - 3$ par $- x + 1$, comme on l'a expliqué dans la division des grandeurs complexes entieres; & trouvant que la division est exacte le reste $- x + 1$, qui a servi de diviseur dans cette division exacte, est le plus grand diviseur commun des deux grandeurs proposées.

On doit remarquer dans cet exemple de division, qu'il est quelquefois necessaire, pour faire une division des grandeurs complexes, par la methode de la division des grandeurs complexes entieres, de se servir du calcul des fractions; on en va mettre un autre exemple pour faire concevoir clairement aux Commençans la maniere de faire ces sortes de divisions.

$$\begin{array}{cccccc} & & A & & & B \\ \frac{1}{3}x^3 & - \frac{5a}{8}x^2 & + \frac{9a^2x + 32abx}{48} & - \frac{1}{4}a^2b & \Big(& \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}ax + ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \overline{\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a} \\ & - \frac{1a}{8}x^2 & + \frac{9a^2}{48}x & - \frac{1}{4}a^2b & & \\ & 0 & 0 & 0 & & \end{array}$$

297. Pour diviser la grandeur $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5a}{8}x^2 + \frac{9a^2x + 32abx}{48} - \frac{1}{4}a^2b$ par la grandeur $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3a}{4}x + ab$: je dis $\frac{1}{3}x^3$ divisé par $\frac{1}{2}x^2$, le quotient $\frac{2}{3}x$. J'écris $\frac{2}{3}x$ au quotient, & je mets o sous $\frac{1}{3}x^3$. Je multiplie le reste du diviseur $- \frac{3}{4}ax + ab$ par le quotient $+ \frac{2}{3}x$; & j'ôte du dividende les produits $- \frac{2}{4}ax^2$ $+ \frac{2abx}{3}$ à mesure que je les forme, ce qui se fait ainsi. Je multiplie chaque terme de $- \frac{2}{4}ax^2$ par 2, pour réduire cette fraction au dénominateur 8; & elle devient $- \frac{4}{8}ax^2$; j'ôte $- \frac{4}{8}ax^2$ de $- \frac{5a}{8}x^2$, & j'écris le reste $- \frac{1a}{8}x^2$. Je réduis aussi $+ \frac{2abx}{3}$ au dénominateur 48, en multipliant ses deux termes par 16, & j'ai $+ \frac{32abx}{48}$, que j'ôte de $+ \frac{32abx}{48}$; & il reste o que j'écris. Ainsi le dividende sur lequel il faut operer est $- \frac{1a}{8}x^2$ $+ \frac{9a^2}{48}x - \frac{1}{4}a^2b$.

Je dis le quotient de $- \frac{1ax^2}{8}$, divisé par $+ \frac{1}{2}x^2$, est $- \frac{2}{8}a$
*269. $= * - \frac{1}{4}a$. J'écris au quotient $- \frac{1}{4}a$, je mets o sous $\frac{1a}{8}x^2$; je multiplie la seconde partie $- \frac{3}{4}ax + ab$ du diviseur par le nouveau quotient $- \frac{1}{4}a$; & à mesure que je forme les
*75. produits $+ \frac{3}{16}a^2x = * + \frac{3 \times 3}{3 \times 16}a^2x = + \frac{9}{48}a^2x$, & $- \frac{1}{4}a^2b$, je

je les ôte du dividende; & trouvant qu'il reste o, je suis assuré que $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a$ est le quotient que je cherchois.

298. On fera remarquer sur ces sortes d'exemples de division, où il faut suivre la methode de la division des grandeurs complexes entieres, & y employer aussi la division & les autres operations des fractions; que quand la grandeur complexe qui est le dividende, & la grandeur complexe qui est le diviseur contiennent des fractions, c'est à dire, quand chacun des termes, ou quelques-uns des termes de ces grandeurs complexes sont des fractions; on peut réduire le dividende & le diviseur à n'avoir aucunes fractions, de maniere pourtant que l'on n'en trouvera pas moins ensuite le veritable quotient. Par exemple, si l'on propose de diviser la grandeur A par la grandeur B, il faut d'abord réduire tous les termes de A à un même dénominateur sans changer leur valeur, & réduire de même les termes de B; & l'on aura le dividende a, & le diviseur b. Il faut ensuite réduire a & b

$$\frac{A \quad \frac{x^3}{3b} - \frac{5ax^2}{8b} + \frac{9a^2x + 32abx}{48b} - \frac{1}{4}a^2}{B \quad \frac{x^2}{2b} - \frac{3ax}{4b} + a}$$

$$\frac{\mathrm{a} \quad \frac{16x^3 - 30ax^2 + 9a^2x + 32abx - 12a^2b}{48b}}{\mathrm{b} \quad \frac{2x^2 - 3ax + 4ab}{4b}}$$

$$\frac{a \quad \frac{16x^3 - 30ax^2 + 9a^2x + 32abx - 12a^2b}{48b}}{b \quad \frac{24x^2 - 36ax + 48ab}{48b}}$$

$$\frac{A \quad 16x^3 - 30ax^2 + 9a^2x + 32abx - 12a^2b}{B \quad 24x^2 - 36ax + 48ab}$$

à un même dénominateur commun sans changer de valeur *, * 270.
& l'on aura a pour le dividende, & b pour le diviseur. Enfin

chaque terme de a & de b étant multiplié par la même grandeur $\frac{1}{4gb}$, il faut les diviser tous par cette grandeur, ou, ce qui revient au même, les multiplier par $\frac{4gb}{1}$; ce qui se fait en effaçant simplement le diviseur commun à a & b; & A sera le dividende, & B le diviseur, qui sont l'un & l'autre sans fractions.

Faisant la division de A par B, on trouvera le même quotient, que si l'on divisoit immédiatement A par B. Car
* 106. le * quotient de A par B doit être à l'unité comme A est à B.
*75 & Et il est évident * que A est à B, comme A est à B; ainsi le
109. quotient de A divisé par B, & celui de A divisé par B sont égaux; puisqu'ils ont le même rapport à l'unité, leur rap-
* 106. port à l'unité étant * le même que celui de A à B, ou celui
& 111. de A à B.

7e REMARQUE.

Où l'on explique la maniere de faire le calcul des fractions par le calcul des exposans des puissances.

DE'FINITION OU SUPPOSITION.

299. ON a déja dit * que toute grandeur représentée par une
* 143. lettre pouvoit être regardée comme une puissance. Quand elle n'a qu'une dimension comme a, c'est la premiere puissance de a, dont l'exposant est 1. Quand a est élevée à une puissance plus haute comme a^3, son exposant 3 marque le degré de sa puissance. Pour marquer en general toutes les puissances ausquelles a peut être élevée, on lui donne pour exposant une lettre. a^n marque en general toutes les puissances ausquelles a peut être élevée; l'exposant n représentant
*145 & tous les nombres 1, 2, 3, &c. On a aussi vû * que quand une
146. grandeur où la puissance d'une grandeur étoit au dénominateur d'une fraction, il n'y avoit qu'à l'ecrire au numerateur, en changeant le signe de l'exposant de sa puissance. Par exemple $\frac{a}{x} = ax^{-1}$. $\frac{1}{x} = x^{-1}$. $\frac{a^2}{b^2} = a^2b^{-2}$; $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$; $\frac{a^m}{x^n} = a^m x^{-n}$; $\frac{ac+b^2}{ab+bc} = \overline{ac+b^2} \times \overline{ab+bc}^{-1}$; $\frac{a}{x^{-1}} = ax$, &c. D'où l'on voit la maniere de réduire les fractions aux expressions des grandeurs entieres, $\frac{a}{b} = ab^{-1}$; $\frac{a+b}{c+d} = \overline{a+b} \times \overline{c+d}^{-1}$; $\frac{\overline{a+b}^2}{\overline{c+d}^3} = \overline{a+b}^2 \times \overline{c+d}^{-3}$.

L'ADDITION ET LA SOUSTRACTION DES FRACTIONS

PAR LE CALCUL DES EXPOSANS.

300. LES fractions étant réduites aux expressions des grandeurs entieres ; elles doivent être ajoutées les unes aux autres, & retranchées les unes des autres comme les grandeurs entieres.

Par exemple, la somme de $+ ay^{-1} - ab^{-1}$, & de $4ay^{-1} + 3ab^{-1}$, est $5ay^{-1} + 2ab^{-1}$.

La difference de $4ay^{-1} + 3ab^{-1}$, & de $+ ay^{-1} - ab^{-1}$, est $3ay^{-1} + 4ab^{-1}$.

LA MULTIPLICATION.

301. QUAND les fractions sont exprimées par le moyen des exposans, & réduites par là à l'expression des grandeurs entieres, & qu'elles sont incomplexes; pour les multiplier, on les joint ensemble, en observant * la regle des signes, par rapport * 95.
aux signes qui les précedent; mais on ne change rien dans les signes des exposans, & l'on suit * le calcul des exposans quand * 148.
une même lettre se trouve dans le multiplié & dans le multiplicateur; c'est à dire, on ajoute ensemble les exposans de cette lettre; & la somme, ou la difference quand ils sont opposez, est l'exposant de cette lettre dans le produit.

Quand les grandeurs sont complexes, on les multiplie en les joignant par le signe × de la multiplication; & on ne fait pas d'autre multiplication, quand l'exposant de l'une des deux grandeurs complexes est négatif.

Par exemple, le produit de ab^{-1} par ac^{-1} est $a^2b^{-1}c^{-1}$; le produit de ax^{-1} par ax^{-1} est a^2x^{-2}; le produit de ax^1 par ax^{-1} est $a^2x^{+1-1} = a^2$; le produit de ax^n par ax^{-n} est a^2x^{n-n}. Mais le produit de $x^2 - ax$ par $\overline{x - a}^{\,-1}$ est $\overline{x^2 - ax} \times \overline{x - a}^{\,-1}$.

LA DIVISION.

302. POUR diviser une fraction exprimée par le moyen des exposans, par une autre exprimée aussi par les exposans; il faut changer les signes des exposans des grandeurs du divi-

ſeur dans les grandeurs incomplexes, & le ſigne du ſeul expoſant du diviſeur conſideré comme une ſeule grandeur quand il eſt complexe, & enſuite multiplier le dividende par le diviſeur, & le produit ſera le quotient.

Par exemple, pour diviſer ab^{-1} par cd^{-1}, je change les ſignes des expoſans du diviſeur qui devient $c^{-1}\ d^{+1}$, & je multiplie ab^{-1} par $c^{-1}\ d^{1}$, & le produit $ab^{-1}\ c^{-1}\ d$, eſt le quotient.

Pour diviſer $a+b$ par $\overline{c-d}^{-1}$, je change le ſigne -1 de l'expoſant du diviſeur conſideré comme une ſeule grandeur, & je forme le produit $\overline{a+b} \times \overline{c-d}^{+1}$; c'eſt le quotient.

Pour diviſer $a^2 x^{-3}$ par ax^{-1}, je change ax^{-1} en $a^{-1}\ x^{+1}$ & je prends le produit de $a^2\ x^{-3}$ par $a^{-1}\ x^{+1}$ qui eſt ax^{-2}. C'eſt le quotient que je cherchois.

Pour diviſer $a^n\ x^m$ par $a^{m-1}\ x^{-n+1}$, je change $a^{m-1}\ x^{-n+1}$ en $a^{-m+1}\ x^{+n-1}$, & je multiplie enſuite $a^n\ x^m$ par $a^{-m+1}\ x^{n-1}$, & le produit $a^{n-m+1}\ x^{m+n-1}$ eſt le quotient.

On remarquera que quand une grandeur n'a point d'expoſant, on ſous-entend qu'elle a pour expoſant l'unité poſitive; mais quand elle doit avoir pour expoſant l'unité négative, on doit toujours écrire l'unité négative pour ſon expoſant.

On remarquera auſſi que quand une fraction a ſes deux termes, ſi quelque lettre du dénominateur avoit un expoſant
* 145. négatif, elle ſeroit cenſée être au numerateur *.

Par exemple, dans $\frac{ab^{-1}}{c^{-1}d}$, $\frac{ax^m}{x^{-n}}$; c^{-1} & x^{-n} marquent que c^{-1} & x^{-n} appartiennent au numerateur. $\frac{ab^{-1}}{c^{-1}d} = \frac{ab^{-1}c}{d} = ab^{-1}\ cd^{-1}$, $\frac{ax^m}{x^{-n}} = ax^{m+n}$.

* 290. Car $\frac{ab^{-1}}{c^{-1}d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{d}{c}} =$ * $\frac{ac}{bd} =$ * $ab^{-1}\ cd^{-1}$. De même
* 145. $\frac{ax^m}{x^{-n}} = \frac{ax^m}{\frac{1}{x^n}} =$ * ax^{m+n}.

D'où l'on voit la raiſon de la regle qu'on à donnée pour la diviſion, qui n'eſt fondée que ſur ce que ces differentes expreſſions marquent une même choſe. Par exemple, $\frac{ab^{-1}}{cd^{-1}}$ $= \frac{a}{\frac{bc}{d}} =$ * $\frac{ad}{bc} =$ * $ab^{-1} c^{-1} d$. * 290. * 145.

La formation des puiſſances des fractions.

PROBLÊME IV.

303. *ELEVER une fraction à une puiſſance quelconque, dont l'expoſant eſt un nombre entier poſitif.*

Regle ou operation. Il faut élever ſéparément le numerateur & le dénominateur * à la puiſſance marquée par l'expoſant; * 159 & & la fraction, formée de ces deux puiſſances du même degré, ſera la puiſſance qu'on cherche. 117.

EXEMPLES.

POUR élever $\frac{2}{3}$ à la troiſiéme puiſſance, il faut élever 2 à la troiſiéme puiſſance, & l'on aura 8; & enſuite élever 3 à la troiſiéme puiſſance, & l'on aura 27; il faut écrire $\frac{8}{27}$ pour la troiſiéme puiſſance de $\frac{2}{3}$.

Pour élever $\frac{a}{b}$ à la ſeconde puiſſance, à la troiſiéme, &c. il faut écrire $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, &c.

Si l'on veut élever $\frac{x-a}{y-c}$ à la ſeconde puiſſance; il faut élever $x - a$ & $y - c$ à la ſeconde puiſſance, & former la fraction $\frac{x^2 - 2ax + a^2}{y^2 - 2cy + c^2}$.

Quand on a des grandeurs complexes, dont quelques-uns des termes, ou même tous, ſont chacun une fraction, à élever à une puiſſance; il faut employer les operations des grandeurs entieres & le calcul des fractions; ce que l'on fera clairement concevoir par les exemples ſuivans.

Pour élever $x - \frac{1}{2}a$ à la ſeconde puiſſance, il faut multiplier $x - \frac{1}{2}a$ par $x - \frac{1}{2}a$; & l'on trouvera $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$ pour le quarré que l'on cherchoit.

Pour élever $\frac{1}{2}y - \frac{2}{3}a + \frac{1}{4}c$ à la troiſiéme puiſſance; on trouvera, en ſuivant les regles * de la formation des puiſ- * 172. ſances, & en ſe ſervant auſſi du calcul des fractions, $\frac{1}{8}y^3 - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{2}{3}a^2y - \frac{8}{27}a^3 + \frac{9}{16}cy^2 - \frac{1}{2}acy + a^2c + \frac{27}{32}c^2y - \frac{9}{8}ac^2 + \frac{27}{64}c^3$.

Ces exemples suffisent pour faire concevoir clairement la formation des puissances des fractions, & des grandeurs complexes qui contiennent des fractions.

Démonstration du Problême. La formation des puissances
* 159. d'une fraction $\frac{a}{b}$ * se doit faire par la multiplication de cette fraction par elle-même, réiterée autant de fois qu'il y a d'unitez moins une dans l'exposant de la puissance à laquelle on veut l'élever; c'est à dire, il faut la multiplier une fois par elle-même pour avoir sa seconde puissance, deux fois pour avoir la troisiéme, trois fois pour avoir la quatriéme, & ainsi de suite. Mais pour multiplier une fraction $\frac{a}{b}$ par elle-
* 287. même, * il faut multiplier le premier terme par lui-même, & le second terme par lui-même, & la fraction $\frac{a^2}{b^2}$ faite des produits, est le produit qu'on cherche. Pour multiplier ce produit $\frac{a^2}{b^2}$ par $\frac{a}{b}$; il faut de même multiplier a^2 par a, & b^2 par b, & $\frac{a^3}{b^3}$ sera le produit qu'on cherche, & ainsi de suite. C'est aussi ce que prescrit le Problême : par conséquent le Problême prescrit ce qu'il faut faire pour élever une fraction à telle puissance qu'on voudra.

L'extraction des racines des puissances des fractions.

PROBLÊME V.

304. *TROUVER la racine d'une fraction, laquelle fraction est une puissance quelconque dont l'exposant est un nombre entier; c'est à dire, trouver la racine d'une fraction qui est une seconde puissance, ou une troisiéme, ou une quatriéme, &c.*

*191, 200 & les suivans, jusqu'à 207 compris. *Regle ou operation*. Il faut trouver, * par les regles de l'extraction des racines des grandeurs entieres, la racine du numerateur, & la racine du dénominateur de la fraction proposée, & faire une fraction de ces deux racines; ce sera la racine que l'on cherche.

Si le numerateur ou le dénominateur de la fraction proposée ou tous les deux contenoient des termes qui fussent des fractions, il faudroit joindre aux regles de l'extraction des racines des grandeurs entieres le calcul des fractions, comme on le verra dans les exemples.

EXEMPLE I.

POUR trouver la racine quarrée de $\frac{15129}{20736}$, il faut chercher séparément les racines quarrées de 15129 & de 20736; & l'on trouvera 123 & 144. Il faut les écrire en fraction, & $\frac{123}{144}$ sera la racine qu'on cherchoit.

AVERTISSEMENT.

IL est inutile de mettre ici d'autres exemples pour l'extraction des racines seconde, troisiéme, quatriéme, &c. des fractions numeriques, n'y ayant pas d'autres difficultez, que celles qu'on trouve à extraire les racines des puissances des nombres entiers, qui ont été toutes expliquées dans le Livre précedent. Il faut seulement remarquer que quand on cherche la racine d'une fraction numerique, & que chacun de ses deux termes n'est pas une puissance parfaite du même degré dont l'exposant est un nombre entier quelconque n; il faut réduire la fraction proposée aux moindres termes; & si chaque terme du moindre rapport est une puissance parfaite du même degré dont l'exposant est n; on en trouvera la racine par le Problême. Si les deux termes du moindre rapport ne sont pas chacun une puissance parfaite dont l'exposant est n; on ne sçauroit trouver la racine qu'on cherche que par approximation, comme on le fera voir après les exemples suivans.

EXEMPLE II.

POUR avoir la racine quarrée de $\frac{a^2}{b^2}$, la racine cubique de $\frac{a^3}{b^3}$, la racine quatriéme de $\frac{a^4}{b^4}$, la racine cinquiéme de $\frac{a^5}{b^5}$, & en general la racine n de $\frac{a^n}{b^n}$; il faut écrire $\frac{a}{b}$; c'est la racine qu'on cherche.

Pour avoir la racine deuxiéme de $\frac{a^6}{b^6}$, il faut écrire $\frac{a^3}{b^3}$. Pour avoir la racine troisiéme de $\frac{a^{3n}}{b^{3n}}$, il faut écrire $\frac{a^n}{b^n}$. Pour avoir la racine n de $\frac{a^{3n}}{b^{3n}}$, il faut écrire $\frac{a^3}{b^3}$.

AVERTISSEMENT.

IL n'y a pas d'autres difficultez pour trouver les racines des fractions litterales dont les deux termes sont chacun une grandeur entiere complexe, que celles qui se rencontrent dans la recherche des racines des puissances comple-
* 207. xes entieres qui ont été expliquées dans le premier Livre *. La seule difficulté est quand une grandeur litterale complexe, dont on cherche la racine, contient des termes qui sont des fractions. En voici quelques exemples pour faire voir la maniere de joindre le calcul des fractions aux regles de l'extraction des racines des grandeurs complexes.

EXEMPLE III.

$$\begin{array}{ccc} x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 & \big(& x - \frac{1}{2}a \\ \text{o} \quad\ \text{o} \quad\ \text{o} & & \overline{+ 2x - \frac{1}{2}a} \end{array}$$

POUR trouver la racine quarrée de $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$, 1°. Je dis la racine de x^2 est x, j'écris x à la racine, & j'écris o sous x^2, pour marquer que je m'en suis servi.

2°. Pour continuer l'operation, & trouver la seconde partie de la racine, je regarde $- ax + \frac{1}{4}a^2$ comme un divi-
* 207. dende; pour former le diviseur, je prends le double * $2x$ de la partie de la racine déja découverte; & je divise $- ax$ par $2x$, en disant le quotient de $- ax$ par $+ 2x$ est $- \frac{1}{2}a$. J'écris $- \frac{1}{2}a$ pour la seconde partie de la racine, & je l'écris encore au devant du diviseur. Employant la multiplication des fractions, je multiplie $+ 2x - \frac{1}{2}a$ par $- \frac{1}{2}a$, & je retranche les produits $- ax + \frac{1}{4}a^2$ de la puissance proposée; & comme il ne reste rien, il s'ensuit que $x - \frac{1}{2}a$ est la racine exacte de la puissance pro posée.

EXEMPLE

EXEMPLE IV.

A | *R*

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{8}y^3 - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{2}{3}a^2y - \frac{8}{27}a^3\\ 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0\\ +\frac{9}{16}cy^2 - \frac{1}{2}acy + a^2c\\ 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0\\ +\frac{27}{32}c^2y - \frac{9}{8}ac^2\\ 0 \quad\quad 0\\ +\frac{27}{64}c^3\\ 0\end{array}\right\}$$

$\frac{1}{2}y - \frac{2}{3}a + \frac{3}{4}c$

$\frac{1}{2}y = a$ de la formule.

$+\frac{1}{4}y^2$ diviseur $= 3a^2$ de la formule

$-\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}c = b$ de la formule.

$$\left.\begin{array}{r}-\frac{1}{2}ay^2 + \frac{2}{3}a^2y - \frac{8}{27}a^3\\ +\frac{9}{16}cy^2 - \frac{1}{2}acy + a^2c\\ +\frac{27}{32}c^2y - \frac{9}{8}ac^2\\ +\frac{27}{64}c^3\end{array}\right\} = 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ de la formule.}$$

POUR trouver la racine cubique ou troisiéme de la troisiéme puissance *A*

$$\begin{array}{r}\frac{1}{8}y^3 - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{2}{3}a^2y - \frac{8}{27}a^3\\ +\frac{9}{16}cy^2 - \frac{1}{2}acy + a^2c\\ +\frac{27}{32}c^2y - \frac{9}{8}ac^2\\ +\frac{27}{64}c^3\end{array}$$

dont les termes contiennent des fractions, je me sers de la formule de la troisiéme puissance $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Et, 1°, supposant $+\frac{1}{8}y^3$ représentée par a^3 de la formule; je dis la racine troisiéme de $\frac{1}{8}$ est $\frac{1}{2}$, & la racine troisiéme de y^3 est y. Ainsi j'écris $\frac{1}{2}y$ à la racine *R*, & je mets o sous $\frac{1}{8}y^3$ dont je me suis déja servi.

2°. Supposant $\frac{1}{2}y = a$ de la formule, je prens $+\frac{1}{4}y^2$ pour le diviseur représenté par $3a^2$, & je divise $-\frac{1}{2}ay^2 + \frac{9}{16}cy^2$ par $+\frac{1}{4}y^2$, en employant la division des fractions, & j'écris à la racine *R* le quotient $-\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}c$, que je suppose représenté par *b* de la formule.

Je forme ensuite, par la multiplication des fractions, les

produits que prescrit la formule $+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & je trouve $- \frac{1}{2}ay^2 + \frac{9}{16}cy^2 + \frac{2}{3}a^2y - \frac{3}{2}acy + \frac{27}{32}c^2y - \frac{8}{27}a^3 + a^2c - \frac{9}{8}ac^2 + \frac{27}{64}c^3$; je les retranche de la puissance proposée; & trouvant que le reste est zero, c'est à dire qu'il n'y a aucun reste, je vois par là que $\frac{1}{2}y - \frac{2}{3}a + \frac{3}{4}c$ est la racine troisiéme de la grandeur proposée A.

THEORÊME.

305 *LORSQU'UN nombre entier, qu'on nommera* A, *est consideré comme une puissance, c'est à dire comme étant un quarré ou une troisiéme puissance, ou une quatriéme; & en general, comme une puissance dont l'exposant est un nombre entier quelconque représenté par* n; *supposé qu'il ne soit pas une puissance parfaite; c'est à dire, qu'il n'y ait pas de nombre entier qui multiplié par lui-même (une fois, si* A *est quarré; deux fois, si* A *est une troisiéme puissance; trois fois, si* A *est une quatriéme puissance; & en general, autant de fois moins une qu'il y a d'unitez dans le nombre entier* n *qui est l'exposant de la puissance de* A, *) donne un produit égal à* A; *il ne peut y avoir aucune fraction numerique, qu'on représentera par* $\frac{a}{b}$, *qui soit la racine exacte du nombre entier* A; *c'est à dire, qui étant multipliée par elle-même autant de fois moins une qu'il y a d'unitez dans* n, *donne un produit* $\frac{a^n}{b^n}$ *qui soit égal à* A.

Démonstration. S'il y avoit une telle fraction $\frac{a}{b}$, on auroit par cette supposition $\frac{a^n}{b^n} = A$, c'est à dire égale à un nombre entier A; & cette fraction seroit une puissance parfaite, puisque a & b sont supposez chacun un nombre entier qui forment la fraction $\frac{a}{b}$. D'où il suivroit * que le nombre entier A seroit une puissance parfaite: ce qui détruit la supposition qu'on a faite que A n'est pas une puissance parfaite: Par consequent il est impossible qu'il y ait une fraction numerique $\frac{a}{b}$ qui puisse être la racine d'un nombre entier A, lorsque ce nombre entier n'est pas une puissance parfaite. *Ce qu'il falloit démontrer*.

* 243.

THEORÊME II.

306. *SI une fraction numerique représentée par $\frac{A}{B}$, est un moindre rapport ; & si chacun de ses termes* A *&* B *n'est pas une puissance parfaite seconde, ou troisiéme, ou quatriéme ; ou en general une puissance parfaite qui ait pour exposant un nombre entier quelconque* n *; ou bien si la fraction $\frac{A}{B}$ n'étant pas un moindre rapport, le moindre rapport qui lui est égal qu'on supposera être $\frac{a}{b}$, n'a pas pour ses termes* a *&* b *deux nombres qui soient chacun une puissance parfaite seconde ou troisiéme, ou en general une puissance parfaite, qui ait pour exposant un nombre entier quelconque* n *; il ne peut pas y avoir une fraction numerique qu'on représentera par $\frac{C}{D}$ qui soit la racine de la fraction proposée $\frac{A}{B}$; c'est à dire, qui étant multipliée par elle-même autant de fois moins une qu'il y a d'unitez dans* n *donne un produit $\frac{C^n}{D^n}$ qui soit égal à $\frac{A}{B}$.*

Démonstration. S'il y avoit une telle fraction $\frac{C}{D}$, laquelle, si elle n'est pas elle-même un moindre rapport, ait pour son moindre rapport $\frac{c}{d}$, (& si elle est un moindre rapport, ce qu'on va dire de $\frac{c}{d}$ conviendra à $\frac{C}{D}$) on auroit par cette supposition $\frac{c^n}{d^n} =$ * $\frac{C^n}{D^n} = \frac{A}{B}$; & si $\frac{A}{B}$ n'est pas un moindre rapport, & que le moindre rapport égal à $\frac{A}{B}$ soit $\frac{a}{b}$, l'on auroit $\frac{c^n}{d^n} = \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$. Mais $\frac{c^n}{d^n}$ * est un moindre rapport, & c^n & d^n sont chacun une puissance parfaite ; puisque c & d sont supposez être deux nombres entiers dont est formée la fraction $\frac{c}{d}$: & $\frac{a}{b}$ étant aussi supposé un moindre rapport ; il faut que les rapports $\frac{a}{b}$ & $\frac{c^n}{d^n}$ ne soient pas seulement égaux ; mais que ce soit précisément le même rapport, & que $a = c^n$, & $b = d^n$. D'où il suivra que a & b sont chacun une puissance parfaite du même degré dont n est l'exposant :

* 242.
* 241.

cela détruit la ſuppoſition qu'on a faite que a & b n'étoient pas une puiſſance parfaite. Il ne peut donc pas y avoir une fraction numerique $\frac{c}{D}$ qui ſoit la racine de la fraction propoſée $\frac{A}{B}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

307. On déduit du premier Theorême qu'on ne ſçauroit trouver de fraction numerique qui ſoit la racine exacte d'un nombre entier, qui eſt une puiſſance numerique imparfaite.

COROLLAIRE II.

308. On déduit de même du ſecond Theorême que quand les deux termes d'une fraction numerique réduite aux moindres termes ne ſont pas chacun une puiſſance numerique parfaite d'un même degré, on ne ſçauroit trouver de fraction numerique qui ſoit la racine exacte de cette premiere fraction.

COROLLAIRE III.

Où l'on démontre les incommenſurables.

309. NOMMANT a tout nombre entier qui eſt une puiſſance numerique imparfaite, dont l'expoſant eſt un nombre entier quelconque n, & ſa racine veritable, qui ne ſçauroit être exprimée par une fraction numerique, étant nommée $\sqrt[n]{a}$. Nommant auſſi $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ la racine veritable de toute fraction numerique $\frac{a}{b}$ réduite à ſes moindres termes, chacun deſquels n'eſt pas une puiſſance parfaite de même degré dont l'expoſant ſoit un nombre entier quelconque n. Je dis que $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ne peuvent chacune avoir aucune aliquote commune, ni avec l'unité, dont ſont formez les nombres a & la fraction $\frac{a}{b}$, ni avec aucun nombre ſoit entier ſoit rompu formé de cette unité. Ainſi $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ſont chacune *une grandeur incommenſurable*, avec cette unité & avec tout nombre ſoit entier ſoit rompu formé de cette unité.

Démonstration. Si $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ avoient chacune une aliquote commune avec l'unité ; on pourroit former une fraction dont le dénominateur seroit le nombre, qu'on nommera m, qui exprimeroit combien de fois cette aliquote est contenue dans, l'unité, & le numerateur seroit le nombre, qu'on nommera l, qui exprimeroit combien de fois cette aliquote seroit contenue dans la grandeur $\sqrt[n]{a}$, ou dans $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Et $\sqrt[n]{a}$ ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ seroit égale à cette fraction $\frac{l}{m}$ de l'unité. Ainsi un nombre entier qui est une puissance imparfaite, comme aussi une fraction numerique, qui étant réduite aux moindres termes, est une puissance imparfaite, auroit pour sa racine une fraction numerique de l'unité. On a demontré * que cela étoit impossi- *307 & ble. Donc $\sqrt[n]{a}$, & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ne sçauroient chacune avoir une ali- 308. quote commune avec l'unité.

$\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ne sçauroient non plus chacune avoir une aliquote commune avec aucun nombre, soit entier, soit rompu, formé de l'unité; car tous les nombres possibles formez de l'unité peuvent * se réduire à des fractions simples de l'u- *285. nité. Ainsi il suffit de démontrer que $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ne sçauroient avoir d'aliquote commune avec une fraction simple de l'unité, pour faire voir qu'elles ne sçauroient avoir d'aliquote commune avec tout nombre possible formé de l'unité : c'est ce qu'on va démontrer.

Si $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ pouvoient chacune avoir une aliquote commune avec une fraction de l'unité, on pourroit former une fraction égale à $\sqrt[n]{a}$ ou à $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, laquelle auroit pour dénominateur un nombre qu'on nommera p, qui marqueroit combien de fois cette aliquote est dans la fraction de l'unité, & pour numerateur un nombre q, qui exprimeroit combien de fois cette aliquote est dans $\sqrt[n]{a}$ ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$: & l'on auroit par

consequent $\sqrt[n]{a}$ ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ égale à $\frac{q}{p}$; & $\frac{q}{p}$ seroit une fraction de
* 283. fraction de l'unité, qui étant * réduite à une fraction simple de l'unité qu'on nommera $\frac{r}{s}$, seroit égale à $\sqrt[n]{a}$ ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

On déduit donc necessairement de la supposition que $\sqrt[n]{a}$ ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ eussent chacune une aliquote commune avec quelque nombre possible que ce fût formé de l'unité, que $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ seroient chacune une fraction de l'unité. Mais on a démon-
* 307. & 308. tré * que cela étoit impossible. Par consequent $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ne sçauroient avoir aucune aliquote commune avec l'unité, ni avec aucun nombre formé de l'unité. Donc $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ sont chacune incommensurable avec l'unité & avec tout nombre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AVERTISSEMENT.

LA Geometrie démontre que ces racines des puissances numeriques imparfaites peuvent s'exprimer exactement par des lignes.

REMARQUE.

* 199. ON a donné dans le premier Livre * la methode d'approcher tant près qu'on voudra de la racine veritable d'une puissance numerique imparfaite, laquelle racine veritable ne
* 309. sçauroit * s'exprimer exactement par aucune fraction, & on s'est servi pour faire cette approximation du calcul des par-
* 122. ties décimales qui sont * de veritables fractions, quoique leur calcul soit le même que celui des nombres entiers. On pourroit encore, quand on a trouvé la racine en entiers de la plus grande puissance parfaite entiere qui est contenue dans la puissance imparfaite dont on cherche la racine; on pourroit, dis-je, continuer l'extraction de la racine sur le reste par le calcul des fractions, & l'on trouveroit une suite de fractions, qui jointe à la partie de la racine déja découverte seroit la racine approchée que l'on cherche; mais le calcul est embarrassant, & l'approximation des racines est bien plus

aisée par le calcul des parties décimales qu'on a expliqué dans le premier livre. * Enfin il y a d'autres methodes d'approcher à l'infini des racines des puissances numeriques imparfaites qui supposent les regles de l'Analyse. On a donné deux de ces methodes *dans l'Analyse démontrée, Livre VI. Section III. depuis l'article 167 jusqu'à la fin de la Section*. *199.

On va donner ici la methode d'approcher tant prés qu'on voudra de la racine d'une fraction numerique qui est une puissance imparfaite, en y employant le calcul des parties décimales à peu près comme dans *le premier Livre, art.* 199. afin d'accoutumer les Commençans à une même methode.

Methode d'approximation des racines des fractions numeriques.

310. POUR approcher tant près qu'on voudra à l'infini de la racine d'une fraction qu'on conçoit être une puissance dont l'exposant est un nombre entier quelconque n, & dont chaque terme n'est qu'une puissance imparfaite du degré n : 1°. Il faut réduire * la fraction proposée à une grandeur décimale, donnant à cette grandeur décimale tant de rangs de parties décimales qu'on voudra, pourvu qu'on puisse les partager en tranches chacune d'autant de rangs qu'il y à d'unitez dans n. 2°. Regardant cette grandeur décimale comme une puissance dont l'exposant est n, il faut en extraire la racine comme dans le premier Livre *. La racine qu'on trouvera sera la racine approchée que l'on cherchoit. *276. *191.

EXEMPLE I.

POUR trouver par approximation la racine de $\frac{5}{8}$ considerée comme une seconde puissance, 1°. * Je la réduis à la grandeur décimale 0.625 qui lui est égale; & comme pour faire cette réduction j'ai ajouté trois zeros au numerateur 5, & que la division de 5.000 par le dénominateur 8 m'a donné le quotient exact 0.625. J'ajoute à cette grandeur décimale tant de zeros que je veux, observant seulement que je puisse partager les rangs des parties décimales en tranches chacune de deux rangs, parceque j'en cherche la racine quarrée, & que l'exposant n représente 2 dans l'extraction de la racine quarrée ou deuxiéme. *276.

Je prens donc pour la fraction proposée la grandeur déci-

male 0., 62, 50, 00, 00, qui eſt équivalente à la propoſée $\frac{5}{8}$.

2°. Je trouve la racine quarrée 0.7905 de la puiſſance 0.62500000 équivalente à $\frac{5}{8}$. Cette racine eſt approchée juſqu'aux dix milliémes; c'eſt à dire, elle differe moins d'une dix milliéme de la racine veritable qu'on ne ſçauroit exprimer exactement par une fraction. Ainſi c'eſt la racine approchée de la fraction propoſée $\frac{5}{8}$.

En continuant l'approximation juſqu'aux cent milliémes, c'eſt à dire juſqu'au cinquiéme rang des décimales dans la racine approchée, je trouve 6 pour le cinquiéme rang qui vaut ſix cens-milliémes, qui ſurpaſſe la moitié d'une dix milliéme, c'eſt pourquoi ſi je me borne au quatriéme rang, qui eſt celui des dix-milliémes, j'ajoute, ſi je veux, une unité au quatriéme rang, afin que l'erreur ſoit moindre, & la racine approchée que je cherchois eſt 0.7906.

EXEMPLE II.

POUR faire l'approximation de la racine quarrée de $3\frac{9}{42} = \frac{135}{42}$; 1°. Je * réduis $\frac{135}{42}$ à la grandeur décimale 3.2142857142. Et comme il arrive que quoique j'ajoute beaucoup de zeros au numerateur, la diviſion de ce numerateur par 42 n'eſt pas exacte; je continue la diviſion juſqu'à ce que j'aye un quotient qui ait un nombre arbitraire de rangs de décimales, que je puiſſe pourtant partager en tranches chacune de deux rangs. Je me borne, ſi je veux, à cinq tranches chacune de deux rangs, qui me donneront une racine approchée qui aura cinq rangs de décimales, & la racine approchée ne differera pas d'une cent-milliéme partie de l'unité de la veritable qu'on ne ſçauroit exprimer par une fraction.

* 276.

Le quotient de la diviſion que j'ai employée pour réduire $\frac{135}{42}$ en grandeur décimale n'étant pas exact, la grandeur décimale 3.214 &c. n'eſt pas exactement équivalente à $\frac{135}{42}$. Mais la difference n'étant pas $\frac{1}{10000000000}$ de l'unité, on peut la regarder comme étant équivalente ſans erreur ſenſible à $\frac{135}{42}$.

* 191. 2°. Je trouve * la racine deuxiéme 1.79284 de la puiſſance décimale 3.2142857142 qui eſt équivalente à $\frac{135}{42}$. Cette racine eſt approchée juſqu'au cinquiéme rang de décimales, c'eſt

c'eſt à dire juſqu'aux cent milliémes. C'eſt la racine approchée que je cherchois.

AVERTISSEMENT.

CES exemples ſuffiſent pour faire concevoir clairement la methode d'approximation des racines des fractions numeriques. Les Commençans peuvent l'appliquer à trouver les racines 3es, & 4es, &c. des fractions.

Démonſtration. Il eſt évident que la methode fait découvrir la racine approchée tant près qu'on voudra de la veritable racine d'une grandeur décimale équivalente, ſans erreur ſenſible, à la fraction propoſée; par conſequent elle fait trouver la racine approchée que l'on cherchoit.

Methode d'approximation des racines des grandeurs litterales complexes, quand ces grandeurs ſont des puiſſances imparfaites.

311. POUR approcher à l'infini de la racine d'une grandeur litterale complexe qui eſt une puiſſance imparfaite, il n'y a qu'à ſuivre les regles de l'extraction des racines des grandeurs litterales complexes, qui ſont des puiſſances parfaites, en employant le calcul des fractions tout comme l'on a fait dans le 3e & le 4e Exemple du 5e Problême: * il n'y a de difference qu'en ce que les puiſſances du 3e & 4e Exemple du 5e Problême étant parfaites, l'on a fait l'extraction des racines ſans aucun reſte; & dans les puiſſances imparfaites, il ſe trouve toujours un reſte, & l'on peut continuer l'operation, ou l'approximation à l'infini: ce qu'on concevra clairement par les Exemples ſuivans. * 304.

EXEMPLE I.

Puiſſance imparfaite.

$r^2 - x^2$

1. reſte. $-\frac{1}{4r^2}x^4$

2. reſte. $-\frac{1}{8r^4}x^6 - \frac{1}{64r^6}x^8$

3. reſte. $-\frac{5}{64r^6}x^8 - \frac{1}{64r^8}x^{10} - \frac{1}{256r^{10}}x^{12}$

Racine approchée.

$r - \frac{1}{2r}x^2 - \frac{1}{8r^3}x^4 - \frac{1}{16r^5}x^6 - \&c.$

$+ 2r - \frac{1}{2r}x^2$ diviſeurs.

$+ 2r - \frac{1}{r}x^2 - \frac{1}{8r^3}x^4$

$2r - \frac{1}{r}x^2 - \frac{1}{4r^3}x^4 - \frac{1}{16r^5}x^6$

Pour faire l'approximation de la racine quarrée de $r^2 - x^2$, 1°. Je dis la racine quarrée de r^2 est r, j'écris r pour la premiere partie de la racine.

2°. Pour trouver la seconde partie de la racine, je forme le diviseur $2r$, en prenant le double de la partie r de la racine déja découverte, & je divise $- x^2$ par $+ 2r$, & je trouve le quotient $- \frac{1}{2r} x^2$ que j'écris à la racine, & encore devant le diviseur $+ 2r$; puis je multiplie $+ 2r - \frac{1}{2r} x^2$ par $- \frac{1}{2r} x^2$; & j'ôte les produits $- x^2 + \frac{1}{4r^2} x^4$ de la puissance proposée, & je trouve le reste $- \frac{1}{4r^2} x^4$.

3°. Pour continuer l'operation sur ce reste, & trouver la troisiéme partie de la racine, je double la somme des deux parties de la racine, & j'ai pour nouveau diviseur $+ 2r - \frac{1}{r} x^2$. Je divise le reste $- \frac{1}{4r^2} x^4$ par ce diviseur, & je trouve le quotient $- \frac{1}{8r^3} x^4$ que j'écris à la racine, & encore au devant du diviseur. Je multiplie $+ 2r - \frac{1}{r} x^2 - \frac{1}{8r^3} x^4$ par $- \frac{1}{8r^3} x^4$, & j'ôte les produits $- \frac{1}{4r^2} x^4 + \frac{1}{8r^4} x^6 + \frac{1}{64r^6} x^8$ du premier reste, & je trouve le second reste $- \frac{1}{8r^4} x^6 - \frac{1}{64r^6} x^8$.

4°. Pour continuer l'operation sur ce reste, je double les parties de la racine déja découvertes, & cela me donne le diviseur $+ 2r - \frac{1}{r} x^2 - \frac{1}{4r^3} x^4$. Je divise le second reste par ce diviseur, en disant le quotient de $- \frac{1}{8r^4} x^6$ divisé par $+ 2r$ est $- \frac{1}{16r^5} x^6$; que j'écris à la racine & au diviseur; je multiplie $+ 2r - \frac{1}{r} x^2 - \frac{1}{4r^3} x^4 - \frac{1}{16r^5} x^6$ par ce quotient $- \frac{1}{16r^5} x^6$; j'ôte le produit $- \frac{1}{8r^4} x^6 + \frac{1}{16r^6} x^8 + \frac{1}{64r^8} x^{10} + \frac{1}{256r^{10}} x^{12}$ du second reste, & je trouve un troisiéme reste $- \frac{5}{64r^6} x^8 - \frac{1}{64r^8} x^{10} - \frac{1}{256r^{10}} x^{12}$.

Je pourrois continuer l'approximation sur ce troisiéme reste; mais les operations précedentes suffisent pour apprendre aux Commençans à la continuer eux-mêmes tant qu'ils voudront, & à faire eux-mêmes l'approximation de la racine quarrée des grandeurs litterales complexes qui sont des quarrez imparfaits.

EXEMPLE II.

Puissance 3e imparfaite. Racine 3e approchée.

$$1 - x^2$$

$$\circ \quad \bullet$$

1. reste. $- \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{27}x^6$

$$\circ \quad \circ$$

2. reste. $- \frac{1}{27}x^6 * + \frac{1}{81}x^{10} + \frac{1}{729}x^{12}$

$$\sqrt[3]{\ } \quad 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \&c.$$

$$1 = a$$

$$3 = 3a^2$$

$$- \frac{1}{3}x^2 = b$$

$$- x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{27}x^6 = + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$1 - \frac{1}{3}x^2 = a$$

$$3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4 = 3a^2$$

$$- \frac{1}{9}x^4 = b$$

$$- \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{9}x^6 * - \frac{1}{81}x^{10} - \frac{1}{729}x^{12} = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

POUR trouver la racine cubique ou 3e de $1 - x^2$, j'employe la formule de la 3e puiſſance $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; & 1°, je prens la racine 3e de 1 (repréſenté par a^3 de la formule) dans la puiſſance imparfaite $1 - x^2$; cette racine repréſentée par a de la formule eſt 1. J'écris 1 à la racine, & je mets o ſous 1 dans la puiſſance propoſée $1 - x^2$, pour marquer que je m'en ſuis ſervi.

2°. Pour trouver la ſeconde partie de la racine repréſentée par b de la formule, je ſuppoſe $1 = a$ de la formule. Je forme le diviſeur $+ 3$ repréſenté par $3a^2$ de la formule: je diviſe $- x^2$ par $+ 3$, & j'écris le quotient $- \frac{1}{3}x^2$ à la racine. Je ſuppoſe $- \frac{1}{3}x^2 = b$ de la formule, & je forme les produits repréſentez par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & je trouve $- x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{27}x^6 = + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Je les retranche de $- x^2$ qui eſt le ſeul terme qui reſte de $1 - x^2$ après la 1re operation, & je trouve le 1er reſte $- \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{27}x^6$.

3°. Pour trouver la 3e partie de la racine, je continue l'operation ſur le 1er reſte. Je ſuppoſe $1 - \frac{1}{3}x^2 = a$ de la formule. Je forme le diviſeur que preſcrit $+ 3a^2$, & je trouve $+ 3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4 = + 3a^2$. Je diviſe le 1er reſte par ce diviſeur, en diſant le quotient de $- \frac{1}{3}x^4$ diviſé par $+ 3$, eſt $- \frac{1}{9}x^4$. J'écris ce quotient à la racine, & je ſuppoſe $- \frac{1}{9}x^4 = b$ de la formule.

Je forme les produits repréſentez par la formule $+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & je trouve $- \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{9}x^6 * - \frac{1}{81}x^{10} - \frac{1}{729}x^{12} = + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Je retranche ces produits du 1er reſte, & je trouve le ſecond reſte $- \frac{5}{27}x^6 * + \frac{1}{81}x^{10} + \frac{1}{729}x^{12}$.

Si je voulois continuer l'approximation, il faudroit continuer l'operation ſur ce ſecond reſte; mais les operations précedentes ſuffiſent pour apprendre la maniere de faire l'approximation.

La methode d'approximation eſt une ſuite évidente de la methode de l'extraction des racines qu'on a démontrée; & il eſt clair que ſi après avoir trouvé tant de termes qu'on voudra de la racine approchée, on multiplie leur ſomme par elle-même une fois ſi c'eſt la racine 2e, deux fois ſi c'eſt la 3e, &c. & qu'on ajoute au produit le dernier reſte qu'on a trouvé; il eſt, dis-je, évident qu'on retrouvera la puiſſance imparfaite propoſée.

AVERTISSEMENT.

DANS le ſecond exemple on a pris 1 pour le premier terme de $1 - x^2$, au lieu d'une grandeur litterale homogene à $- x^2$, comme r^2; parceque ſi l'on avoit pris, par exemple r^2, ſa racine cubique auroit été la grandeur incommenſurable $\sqrt[3]{r^2}$, ou $r^{\frac{2}{3}}$, qui auroit embaraſſé les Commençans juſqu'à ce qu'on leur ait expliqué le calcul des incommenſurables. Mais quand ils l'auront appris, ils ne trouveront aucune difficulté à faire l'approximation des racines de toute ſorte de grandeurs.

*294 & 295. *Remarques ſur* les ſuites infinies *que l'on trouve par la diviſion* *, *& par* * *l'extraction des racines des puiſſances imparfaites*,
*311. *leſquelles* ſuites *ſont* les valeurs approchées *des quotiens ou des racines*.

I.

ON peut trouver, tant par la diviſion que l'on a expliquée dans l'*art.* 294, que par l'extraction des racines que l'on a expliquée dans l'*art.* 311, pluſieurs *ſuites* dont les expreſſions ſeront toutes differentes; & cependant chacune de ces

ſuites ſera la valeur approchée du quotient, ou de la racine dont on cherche la valeur. Voici comment on les trouve.

En diviſant a par $a + x$ dans l'*art.* 294; on a pris dans le diviſeur $a + x$, la grandeur a pour le premier terme du diviſeur, & x pour le ſecond terme; & l'on a trouvé la *ſuite* marquée dans l'*art.* 294. On pourroit auſſi prendre la grandeur x pour le premier terme du diviſeur $x + a$; & faiſant la diviſion, on trouveroit une autre expreſſion de la *ſuite* infinie qui eſt la valeur approchée du quotient de a diviſé par $x + a$. Et ſi le diviſeur avoit plus de deux termes, on pourroit prendre ſucceſſivement les termes du diviſeur l'un après l'autre, pour le premier terme du diviſeur; & les diviſions que l'on feroit dans chacun de ces changemens du premier terme du diviſeur, donneroient chacune une *ſuite* dont l'expreſſion feroit differente de l'expreſſion de la *ſuite* que feroit trouver chaque autre diviſion.

De même dans l'extraction des racines, par exemple, dans l'extraction de la racine quarrée de $r^2 + x^2$, on peut prendre r^2 pour le premier terme de la puiſſance 2ᵉ $r^2 + x^2$, & x^2 pour le ſecond terme; & l'on trouvera par la methode expliquée dans l'*art.* 311, une *ſuite* infinie qui ſera la valeur approchée de la racine quarrée de $r^2 + x^2$. On peut auſſi prendre x^2 pour le premier terme de la puiſſance 2ᵉ $x^2 + r^2$, & commencer l'extraction de la racine quarrée par ce premier terme x^2; & l'on trouvera une autre *ſuite* differente de la premiere, pour la valeur approchée de la racine quarrée de $x^2 + r^2$.

2.

Toutes les *ſuites* que l'on trouve pour la valeur, ſoit d'un même quotient, ſoit d'une même racine, étant conçues chacune comme contenant le nombre infini de termes qui lui convient, ſont chacune la veritable valeur de ce même quotient, ou de cette même racine, comme le démontre l'operation par laquelle chacune de ces *ſuites* ſe découvre. Ainſi toutes les *ſuites* qui ſont la valeur d'un même quotient, ou d'une même racine, regardées comme ayant tous leurs termes à l'infini, ſont égales entr'elles.

Mais on ne peut pas trouver ce nombre infini de termes de chaque *ſuite*. On n'en peut trouver qu'un nombre déterminé de termes ; & ce nombre fini de termes d'une *ſuite* n'eſt qu'une valeur approchée du quotient, ou de la racine : & afin que cette valeur approchée ſoit d'uſage dans la réſolution des Problêmes, il faut que ſa difference d'avec la vraye valeur ſoit inſenſible, & qu'on puiſſe dans la pratique négliger cette difference ſans erreur ſenſible.

C'eſt pourquoi parmi les *ſuites* differentes, qu'on pourroit trouver pour la valeur approchée d'une même grandeur; il faut choiſir celle qui a beſoin du moindre nombre de termes qui ſe puiſſe, afin que ſa difference d'avec la vraie valeur ſoit inſenſible. Or il eſt évident que les termes de la *ſuite* étant des fractions diſtinguées par les puiſſances d'une lettre ou d'une grandeur, comme dans l'*art.* 294, plus la grandeur qui diſtingue les termes au numerateur ſera petite, par rapport à la grandeur qui eſt au dénominateur, & plus les fractions qui compoſent les termes de la *ſuite* ſeront petites; car plus une fraction eſt petite, & plus ſes puiſſances vont en diminuant. D'où l'on voit qu'il faut choiſir parmi les differentes *ſuites*, qu'on pourroit trouver pour les valeurs approchées d'une même grandeur, celle dont les termes vont le plus en diminuant, celle où on arrive, après un petit nombre de termes, à des grandeurs ſi petites qu'on peut les négliger toutes ſans erreur ſenſible. Dans l'exemple de l'*art.* 294, ſi a ſurpaſſe x, il faut prendre a pour le 1[er] terme du diviſeur $a + x$; afin que x & les puiſſances de x ſe trouvent dans les numerateurs, & les puiſſances de a dans les dénominateurs des termes. Si a eſt moindre; que x; il faudra prendre x pour le premier terme du diviſeur $x + a$; afin que a & les puiſſances de a ſe trouvent dans les numerateurs des termes de la *ſuite*, & les puiſſances de x dans les dénominateurs. On doit ſuivre la même regle dans le choix des *ſuites* que l'on trouve par l'extraction des racines de l'*art.* 311.

On peut même préparer la grandeur qu'on doit réduire en *ſuite*, afin que les termes de la *ſuite* aillent en diminuant conſiderablement de l'un à l'autre. Mais comme le principal uſage de ces *ſuites* eſt dans l'Analyſe, on a mis la maniere de faire ces préparations dans l'*Analyſe démontrée, art.* 180, & *art.* 743.

3.

Ces *ſuites* qui ſont les valeurs approchées des grandeurs qu'on cherche en pluſieurs Problêmes des Mathematiques, leſquelles ne different pas ſenſiblement des veritables valeurs qu'on ne peut pas avoir dans la derniere exactitude, ſont devenues de notre temps de grand uſage. On fait ſur ces *ſuites* les mêmes calculs que ſur les grandeurs complexes d'un nombre déterminé de termes. On les ajoute les unes aux autres; on les retranche les unes des autres; on les multiplie, & on les diviſe les unes par les autres; on les éleve à toutes les puiſſances, & on en extrait les racines. Leur addition, leur ſouſtraction & leur multiplication n'ont pas d'autres difficultez que celles qui ſe trouvent dans les operations ſemblables ſur les grandeurs complexes où il faut mêler le calcul des grandeurs entieres avec celui des fractions, qui ont été expliquées.

La formation des puiſſances des *ſuites* & l'extraction de leurs racines ſe font de la même maniere que les ſemblables operations ſur les grandeurs complexes, que l'on a expliquées dans les *art.* 303 & 311. Et l'on enſeignera dans le *troiſiéme Livre de cet Ouvrage* la maniere de trouver la formule generale qui eſt dans l'*Analyſe démontrée*, *page* 410, qui ſert à la formation de toutes les puiſſances poſſibles des *ſuites*, & à l'extraction de leurs racines, par de ſimples ſubſtitutions.

La diviſion des *ſuites* les unes par les autres, ſe fait auſſi de la même maniere que la diviſion des grandeurs complexes, où il faut mêler le calcul des grandeurs entieres & celui des fractions, comme dans les *articles* 296, 297. Mais comme les Commençans pourroient trouver de la difficulté à ſe ſervir d'un dividende & d'un diviſeur qui ont chacun une infinité de termes; on en va mettre ici un exemple.

Suppoſé qu'il faille trouver la *ſuite* infinie qui eſt la valeur de

$$\frac{\sqrt[3]{1+ay^2}}{\sqrt[3]{1-by^2}}.$$

Il y a trois operations à faire pour découvrir la *ſuite* qu'on cherche.

1°. Il faut par l'*art.* 311. réduire $\sqrt[3]{1+ay^2}$ en la *ſuite* qui en

est la valeur; & l'on trouvera $\sqrt{1+ay^2} = 1 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{1}{8}a^2y^4 + \frac{1}{16}a^3y^6 - \frac{5}{128}a^4y^8$, &c. qu'on nommera A.

2°. Il faut par la même methode chercher la *suite* qui est la valeur de $\sqrt{1-by^2}$, & l'on trouvera $\sqrt{1-by^2} = 1 - \frac{1}{2}by^2 - \frac{1}{8}b^2y^4 - \frac{1}{16}b^3y^6 - \frac{5}{128}b^4y^8$, &c. qu'on nommera B.

3°. Il faut diviser la 1re de ces *suites* par la 2e, & c'est l'exemple de la division que l'on va mettre ici.

Exemple de la division d'une suite *infinie, par une autre* suite *infinie.*

Dividende.

A

$$1 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{1}{8}a^2y^4 + \frac{1}{16}a^3y^6 - \frac{5}{128}a^4y^8 \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{1}{2}by^2 + \frac{1}{8}b^2y^4 + \frac{1}{16}b^3y^6 + \frac{5}{128}b^4y^8$$
$$+ \frac{1}{4}aby^4 + \frac{1}{16}ab^2y^6 + \frac{1}{32}ab^3y^8$$
$$+ \frac{1}{4}b^2y^4 + \frac{1}{16}b^3y^6 + \frac{1}{32}b^4y^8$$
$$- \frac{1}{16}a^2by^6 - \frac{1}{64}a^2b^2y^8$$
$$+ \frac{1}{8}ab^2y^6 + \frac{1}{32}ab^3y^8$$
$$+ \frac{1}{16}b^3y^6 + \frac{1}{64}b^4y^8$$
$$+ \frac{1}{32}a^3by^8$$
$$- \frac{1}{32}a^2b^2y^8$$
$$+ \frac{1}{32}ab^3y^8$$
$$+ \frac{5}{32}b^4y^8$$

Diviseur.

B

$$1 - \frac{1}{2}by^2 - \frac{1}{8}b^2y^4 - \frac{1}{16}b^3y^6 - \frac{5}{128}b^4y^8 \text{ \&c.}$$

Quotient.

C

$$1 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{1}{8}a^2y^4 + \frac{1}{16}a^3y^6 - \frac{5}{128}a^4y^8 \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{1}{2}by^2 + \frac{1}{4}aby^4 - \frac{1}{16}a^2by^6 + \frac{1}{32}a^3by^8$$
$$+ \frac{3}{8}b^2y^4 + \frac{3}{16}ab^2y^6 - \frac{3}{64}a^2b^2y^8$$
$$+ \frac{5}{16}b^3y^6 + \frac{5}{32}ab^3y^8$$
$$+ \frac{35}{128}b^4y^8$$

Pour diviser la *suite A* par la *suite B*, 1°. Il faut ordonner l'une & l'autre *suite*, par rapport à une même lettre, qui est ici

ici y. Mais dans la division des grandeurs complexes qui n'ont qu'un nombre déterminé de termes, le premier terme contient la plus haute puissance de la lettre qui distingue les termes, & les autres termes contiennent les puissances suivantes qui vont en diminuant: au contraire dans les *suites* infinies les puissances de la lettre qui distingue les termes vont en augmentant à l'infini; & le 1[er] terme est celui dans lequel la lettre qui distingue les termes ne se trouve point, comme dans notre exemple; ou bien, quand elle est dans tous les termes, le 1[er] terme est celui où la puissance de la lettre qui distingue les termes est au plus bas degré; les termes suivans sont distinguez par ordre par les puissances de la lettre qui distingue les termes à mesure que ces puissances augmentent; & toutes les grandeurs incomplexes qui contiennent la même puissance de cette lettre, ne font qu'un même terme, & on les écrit les unes sous les autres, comme on le verra dans le quotient C: les *suites* A & B sont ici ordonnées par rapport à y.

2°. Comme on ne peut pas entreprendre la recherche d'un quotient d'une infinité de termes, on se borne au nombre de termes qu'on juge devoir contenir une valeur assez approchée du veritable quotient: nous nous bornerons ici à cinq termes; & il est clair que cela détermine le nombre des termes du dividende A & du diviseur B dont on doit se servir. Dans notre exemple les termes du dividende & du diviseur où est y^4 doivent être les derniers de ceux dont on doit se servir; & on verra même qu'à mesure qu'on avance dans la division, il y a des termes dans le diviseur qui deviennent inutiles à la division qu'on fait actuellement.

Tout ce que la division des *suites* les unes par les autres contient de particulier, qui pourroit embarrasser les Commençans, est contenu dans ces deux premiers articles, la division se fait ensuite de la même maniere que la division des grandeurs complexes, où il faut employer le calcul des grandeurs entieres & celui des fractions, comme dans les *articles* 294 *& les suivans*.

3°. Je divise donc le premier terme 1 du dividende A par le premier terme 1 du diviseur B, & j'écris le quotient 1. J'écris o sous 1 du dividende pour marquer qu'il ne doit plus servir. Je multiplie ensuite les termes du diviseur B qui sui-

vent 1, jusqu'à celui qui contient y^8, par le quotient 1, & je retranche du dividende les produits que je trouve par cette multiplication, ce qui se fait en les écrivant avec des signes contraires, & la 1re operation est finie.

Le 1er terme du dividende de la 2e operation est $+ \frac{1}{2} ay^2$ $+ \frac{1}{2} by^2$. Je le divise par le 1er terme 1 du diviseur, & j'écris le quotient $+ \frac{1}{2} ay^2 + \frac{1}{2} by^2$. J'écris aussi o sous ce 1er terme du dividende, pour marquer que je m'en suis servi; je multiplie ensuite les termes du diviseur qui suivent le premier; par ce nouveau quotient. Je retranche du dividende les produits à mesure que je les trouve, en les écrivant avec des signes contraires, & la 2e operation est finie.

On doit remarquer que le terme du diviseur où se trouve y^8 a été inutile à cette operation, & qu'il ne doit plus servir à la suivante, non plus que celui où se trouve y^6.

Le 1er terme du dividende de la 3e operation, en ajoutant ensemble $+ \frac{1}{8} b^2y^4 + \frac{1}{4} b^2y^4$, est $- \frac{1}{8} a^2y^4 + \frac{1}{4} aby^4 + \frac{3}{8} b^2y^4$. Je le divise par le 1er terme 1 du diviseur, & j'écris le quotient $- \frac{1}{8} a^2y^4 + \frac{1}{4} aby^4 + \frac{3}{8} b^2y^4$. J'écris aussi o sous le 1er terme du dividende dont je viens de me servir. Je multiplie les termes du diviseur qui suivent le 1er 1, par ce nouveau quotient, (excepté ceux où se trouvent y^6 & y^8 qui deviennent inutiles, à cause du nombre des termes du quotient auquel je me suis borné;) & je retranche les produits du dividende, en les écrivant avec des signes contraires; & la 3e operation est finie.

Le 1er terme du dividende de la 4e operation, en ajoutant ensemble les grandeurs semblables, est $+ \frac{1}{16} a^3y^6 - \frac{1}{16} a^2by^6$ $+ \frac{1}{16} ab^2y^6 + \frac{5}{16} b^3y^6$. Je le divise par le 1er terme 1 du diviseur, & j'en écris le quotient qui est le même terme, à cause que l'unité est le diviseur. Je marque o sous le 1er terme du dividende, dont je viens de me servir. Je multiplie par le quotient que je viens de trouver, le seul terme $- \frac{1}{2} by^2$ du diviseur, les autres étant inutiles par rapport au nombre de termes que je cherche, & je retranche du dividende les produits à mesure que je les trouve; & la 4e operation est finie.

Le 1er terme du dividende de la 5e operation, en ajoutant ensemble les grandeurs semblables, est $- \frac{5}{128} a^4y^8 + \frac{1}{32} a^3by^8$

$- \frac{1}{64} a^2 b^2 y^8 + \frac{5}{32} ab^3 y^8 + \frac{15}{128} b^4 y^8$. Je le divise par le 1er terme 1 du diviseur; & à cause que 1 est le diviseur, j'écris ce même terme pour le quotient de la 5e operation; & m'étant borné à ces cinq termes du quotient, l'operation est finie.

Cet exemple suffit pour faire concevoir aux Commençans la maniere de diviser une *suite* infinie par une autre *suite* infinie.

SECTION IV.

Sur les comparaisons des rapports geometriques où sont expliquées les proportions des grandeurs en general.

AVERTISSEMENT.

Il n'y a rien de plus necessaire dans les Mathematiques que la connoissance des comparaisons des rapports des grandeurs en general. Elles servent ces comparaisons des rapports, comme on l'a pû voir dans ce Traité, de fondement au calcul des grandeurs en general; & les Mathematiques particulieres ne sont qu'une application de ces comparaisons des rapports des grandeurs en general aux grandeurs sensibles & particulieres.

On va repeter ici en peu de mots ce qu'on a dêja dit sur les rapports & les comparaisons des rapports, & on y ajoutera tout ce qu'il faut sçavoir sur cette matiere; afin que les Commençans trouvent dans cette section tout ce qu'ils doivent se rendre très familier sur ces comparaisons des rapports, pour entendre les Mathematiques.

DEMANDE OU SUPPOSITION.

312. Toute grandeur représentée par a peut être conçue partagée en tel nombre qu'on voudra de parties égales qu'on nomme ses *aliquotes*. Nommant x chacune de ces aliquotes, & n le nombre de ces aliquotes tel qu'on voudra, on peut concevoir $a = nx$.

DE'FINITION.

313. Le *rapport geometrique*, ou simplement le *rapport* d'une grandeur a à une autre grandeur b, est la comparaison que l'on

fait de l'une de ces grandeurs à l'autre, en considerant combien de fois a contient b, ou est contenue dans b, si a est moindre que b.

Mais parceque le plus souvent la plus petite des deux grandeurs d'un rapport n'est pas contenue exactement dans l'autre, voici une notion plus generale d'un rapport. C'est la comparaison d'une grandeur a à une autre b de même nature, en considerant combien de fois l'une de ces grandeurs a contient une aliquote quelconque x de l'autre b. Supposant que n marque tel nombre qu'on voudra des parties égales dans lesquelles on peut concevoir que b est divisé, & qu'ainsi $b = nx$; que m marque un nombre entier tel qu'on voudra, & qu'on prenne ce nombre m pour marquer combien a contient de parties égales x de b; l'expression generale de tout rapport sera $\frac{a}{b} = \frac{mx}{nx}$.

314. Quand dans le rapport $\frac{a}{b}$, ou son égal $\frac{mx}{nx}$, chacun des nombres m & n est fini & déterminé, c'est un rapport commensurable; mais quand il arrive que b étant conçue partagée dans un nombre quelconque n fini & déterminé d'aliquotes x, jamais a n'en contient exactement un nombre fini m,
* 51. & qu'il y a toujours un reste; ou, * ce qui revient au même, quand il faut concevoir le consequent b divisé en un nombre infini de parties égales x, afin que l'antecedent a en contienne aussi un nombre infini; c'est à dire, quand les nombres m & n sont infinis, le rapport de a à b se nomme *incommensurable*.

Ce qu'on dira des rapports dans la suite conviendra aux rapports incommensurables, aussi-bien qu'aux commensurables, comme on l'a fait voir dans l'*article* 51.

DÉFINITION.

315. ON peut comparer les rapports les uns avec les autres, comme on compare les grandeurs. La comparaison de deux rapports égaux s'appelle *une proportion*; la comparaison de deux rapports inégaux n'a pas d'autre nom que celui de comparaison de deux rapports.

Deux rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sont égaux quand les deux consequents b & d étant partagez dans le même nombre n d'aliquotes, chaque antecedent contient le même nombre m

d'aliquotes de son consequent. Ainsi nommant x l'aliquote qui est dans b le nombre de fois que marque n, & y l'aliquote semblable qui est dans d le même nombre de fois n, l'antecedent a contient x un nombre de fois marqué par m, l'antecedent c contient aussi y le même nombre de fois m; & $\frac{a}{b} = \frac{mx}{nx} = \frac{c}{d} = \frac{my}{ny}$ sera l'expression generale de deux rapports égaux par le moyen des aliquotes. Dans les rapports égaux commensurables m & n sont des nombres finis, & * dans les incommensurables m & n sont des nombres infinis. * 51.

Deux rapports $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$ sont inégaux, quand les antecedens e & g ne contiennent pas le même nombre de fois les aliquotes semblables x & y de leurs consequents f & h; ou quand les consequents f & h ne contiennent pas le même nombre de fois les aliquotes semblables de leurs antecedents e & g. Ainsi $\frac{mx}{nx}$ & $\frac{py}{ny}$, & encore $\frac{mx}{nx}$ & $\frac{my}{qy}$ peuvent servir d'expression generale à deux rapports inégaux.

AXIOMES.

1.

316. Si l'on compare plusieurs grandeurs inégales a, b, c, à une même grandeur d; les plus grandes auront un plus grand rapport à d que les plus petites; & celles qui y auront un plus grand rapport seront plus grandes que celles qui y auront un moindre rapport. Si d est zero, le rapport d'une grandeur réelle à zero sera infiniment grand, & la grandeur réelle pourra être considerée comme infinie par rapport à zero. Ce qu'on doit entendre au sens qui est expliqué dans la remarque qui suit l'*article* 40.

2.

317. Si l'on compare une même grandeur d à des grandeurs inégales a, b, c, le rapport de d à une plus grand sera plus petit que le rapport de d à une plus petite. Et si le rapport de d à a est plus petit que le rapport de d à b; a est plus grande que b; & si d est zero, le rapport de d ou de zero à une grandeur réelle sera infiniment petit : ce qui doit être entendu au sens de la remarque de l'*article* 40.

3.

318. Parmi les rapports inégaux, un rapport $\frac{a}{b}$ plus grand qu'un

autre rapport $\frac{c}{d}$, eſt plus grand que tout autre rapport égal à $\frac{c}{d}$ ou moindre que $\frac{c}{d}$.

4.

319. Une même grandeur d étant comparée à des grandeurs égales $a = b = c$, tous ſes rapports à ces grandeurs égales ſont égaux; & ſi les rapports d'une grandeur d à d'autres grandeurs a, b, c ſont égaux, ces autres grandeurs ſont égales.

5.

320. Les rapports égaux à un même rapport, ou à des rapports égaux, ſont égaux entr'eux.

6.

321. En deux rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ſi les deux termes a & b de l'un ſont déterminez, & qu'un ſeul des deux termes de l'autre ſoit auſſi déterminé comme c, l'autre terme d du ſecond
* 54. rapport * eſt déterminé.

DÉFINITION.

322. QUAND deux ou pluſieurs rapports ſont égaux comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$; les antecedents s'appellent les termes *relatifs* ou *homologues*, & les conſequents ſe nomment auſſi *relatifs* ou *homologues*.

THEORÊME I.

323. *LORSQUE pluſieurs rapports ſont égaux, comme* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
* 55. $= \frac{e}{f}$, *les rapports* inverſes * *ſont auſſi égaux*, c'eſt à dire $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$.

THEORÊME II.

324. *SI pluſieurs rapports ſont égaux comme* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$,
* 56. *le rapport de chacun des antecedents à ſon conſequent* * *eſt égal au rapport de la ſomme de tous les antecedens à la ſomme de tous les conſequents*; c'eſt à dire $\frac{a}{b} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$.

COROLLAIRE.

325. D'où il ſuit qu'ayant un rapport donné $\frac{a}{b}$, ſuppoſant que m marque un nombre entier quelconque, ou une fraction

numerique quelconque, * on aura $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$. Ainsi supposant *61.
$m = 2, 3$, &c. ou $m = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c. $\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{3a}{3b}$ &c.
$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b} = \frac{\frac{1}{3}a}{\frac{1}{3}b}$ &c.

THEORÊME III.

326. *QUAND deux ou plusieurs rapports sont égaux, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$; les rapports des antecedents sont égaux aux rapports des consequents;* c'est à dire $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{c}{e} = \frac{d}{f}$; $\frac{a}{e} = \frac{b}{f}$. Ces derniers rapports s'appellent les rapports *alternes*. *62.

THEORÊME IV.

327. *SI $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on aura* * $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. *57.

THEORÊME V.

328. *SI $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$, & si $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$; dans chacun de ces cas * on aura $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.* *58, 59. & 60.

THEORÊME VI.

329. *EN tout produit qu'on peut concevoir comme formé de deux grandeurs, dont l'une est le multiplicateur, & l'autre le multiplié *, l'unité est à l'une, comme l'autre est au produit.* *72.
$1 . a :: b . ab$. $1 . a :: a^3 . a^4$. $1 . a :: a^n . a^{n+1}$. $1 . \frac{a}{b} :: \frac{c}{d} . \frac{ac}{bd}$.

THEORÊME VII.

330. *EN toute division, par exemple $\frac{a}{b}$, le dividende* a * *est au diviseur* b, *comme le quotient $\frac{a}{b}$ est à l'unité*. $a . b :: \frac{a}{b} . 1$. *106.
*Et les rapports * inverses étant égaux, on a aussi cette proportion* $1 . \frac{a}{b} :: b . a$. *107.

COROLLAIRE.

331. D'où il suit, qu'en nommant q le quotient qui viendroit en faisant la division du premier terme a d'un rapport $\frac{a}{b}$ par le second terme b, on aura * $qb = a$; & que l'on pourra exprimer tout rapport $\frac{a}{b}$ de cette maniere $\frac{qb}{b}$. *107.

On pourroit, par le moyen de cette expression, démontrer

la plûpart des proprietez des proportions & des progressions geometriques.

THEORÊME VIII.

332. *DEUX grandeurs étant multipliées chacune par une même*
*75. *grandeur, ou étant divisées chacune par une même grandeur**,
les produits auront entr'eux le même rapport que les deux gran-
*109. *deurs;* * *les quotients auront aussi le même rapport que les deux*
grandeurs. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$: & a . b :: $\frac{a}{d}$. $\frac{b}{d}$.

COROLLAIRE.

333. D'où il suit que deux rapports qui ont le même conse-
*116. quent ou des consequents égaux, * sont entr'eux comme les
antecedens. $\frac{a}{d}$. $\frac{b}{d}$ :: *a* . *b*.

THEORÊME IX.

334 *DEUX rapports qui ont le même antecedent, ou des antece-*
*121. *dents égaux, sont entr'eux* * *comme leurs consequents pris dans*
un ordre renversé. $\frac{a}{b}$. $\frac{a}{c}$ :: c . b.

THEORÊME X.

335. *TOUS les rapports égaux sont des grandeurs égales. Car ils*
*111. *ont* * *le même rapport à une même grandeur qui est l'unité.*

THEORÊME XI. *fondamental.*

336. *DEUX rapports quelconques* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *sont entr'eux* * *comme le*
*118. *produit des extrêmes* ad *est au produit* bc *des moyens.* $\frac{a}{b}$. $\frac{c}{d}$ ::
ad . bc.

Ce Theorême fait voir la maniere de trouver le rapport que deux rapports ont entr'eux.

COROLLAIRE.

337. D'où il suit que quand on a deux produits homogenes on peut en former une proportion. Par exemple on fera des deux produits *ad* & *bc*, la proportion $\frac{a}{b}$. $\frac{c}{d}$ :: *ad* . *bc*. On fera de a^2d & b^2c la proportion $\frac{a^2}{b^2}$. $\frac{c}{d}$ :: a^2d . b^2c.

THEOREME

THEORÊME XII fondamental, qu'il faut bien retenir.

338. *En toute proportion, le produit des extrêmes * est égal au* produit des moyens Si* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *l'on aura* ad = bc. *Et si* ad = bc, *on aura* * $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. *119. *120.

Ainsi quand deux produits sont égaux, on en peut toujours former une proportion, en prenant les extrêmes dans l'un des produits, & les moyens dans l'autre.

Il faut aussi remarquer que quand un rapport $\frac{a}{b}$ est égal au rapport inverse d'un autre rapport $\frac{d}{c}$, (c'est à dire $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$) on dit, (en laissant l'arrangement des rapports $\frac{a}{b}$ & $\frac{d}{c}$) que *a* est à *b* réciproquement comme *c* est à *d*. Et dans cet arrangement de deux rapports égaux $\frac{a}{b}$ & $\frac{d}{c}$, dont l'un, sçavoir $\frac{c}{d}$, est écrit dans un ordre inverse $\frac{d}{c}$; il est évident que c'est le produit des antecedents *ad* qui est égal au produit des consequents *bc*.

Quand aussi deux produits sont égaux *ad* = *bc*, si on les conçoit réduits en deux rapports $\frac{a}{b}$ & $\frac{d}{c}$, dont les antecedents soient pris de l'un des produits *ad*, & les consequents de l'autre produit égal *bc*, il est évident que le premier de ces rapports $\frac{a}{b}$ est égal au rapport inverse de l'autre $\frac{d}{c}$, c'est à dire $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; & on dit alors que *a* est à *b* réciproquement comme *c* est à *d*.

AVERTISSEMENT.

On a démontré toutes les propositions qui précedent dans les lieux qui sont citez à la marge, il faut se les rendre très familieres, & leurs démonstrations. On va ajouter les autres principales propositions sur la comparaison des rapports, qu'il faut de même se rendre très familieres.

COROLLAIRE I.

339. En tout proportion continue *a. b :: b. c*, où le second & le troisiéme terme sont la même grandeur *b*; le quarré b^2 du terme moyen *b*, est égal au produit *ac* des extrêmes. Et si l'on a un produit *ac* égal à un quarré b^2, l'on aura une proportion continue *a. b :: b. c*, dans laquelle la racine du

quarré b^2 sera moyenne proportionnelle entre les deux grandeurs *a* & *c*, dont est formé le produit *ac*.

*336. *Démonstration.* $\frac{a}{b}$. $\frac{b}{c}$ :: * *ac* . b^2. Or on suppose dans la premiere partie du Corollaire $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Par consequent $ac = b^2$. On suppose dans la seconde partie $ac = b^2$. Par consequent $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE II. PROBLÊME I.

340. *LES deux termes moyens d'une proportion & un seul des deux extrêmes étant donnez ou connus trouver l'autre extrême. Et les deux extrêmes & l'un des moyens étant donnez ou connus, trouver l'autre moyen.*

Operation. Soient les deux moyens ou les deux extrêmes connus représentez par *b* & *c*, l'extrême ou le moyen connu représenté par *a*, & l'extrême ou le moyen inconnu qu'on cherche représenté par *x*.

La proportion sera *a* . *b* :: *c* . *x*; ou *b* . *a* :: *x* . *c*. Dans l'un *338. & l'autre cas, on aura * $ax = bc$. Et divisant chacun de ces produits égaux par *a*, on aura $x = \frac{bc}{a}$. Ce qui donne la fameuse *Regle de trois.*

La regle de proportion qu'on nomme ordinairement la Regle de trois.

341. *TROIS termes d'une proportion* a, b, c, *étant connus, trouver le quatriéme terme* x.

Puisqu'il y a trois termes de connus, il est évident que les deux moyens & un des extrêmes sont connus, & qu'on cherche l'autre extrême; ou que les deux extrêmes & un moyen sont connus, & qu'on cherche l'autre moyen. Dans l'un & l'autre cas il est bon d'arranger les trois termes connus de maniere que les deux extrêmes ou les deux moyens connus occupent le 2e & le 3e rang de la proportion; que le seul extrême ou moyen connu occupe le premier rang; & que le terme inconnu qu'on cherche soit conçu occuper le 4e rang de la proportion, de cette maniere *a* . *b* : : *c* . *x*. Le sens de la question fera assez connoître cet ordre de termes, comme on le verra dans les exemples.

Regle ou operation. Il faut multiplier les deux moyens connus *b* & *c* l'un par l'autre, ou les deux extrêmes connus l'un

par l'autre; diviser dans le premier cas le produit bc par celui des extrêmes a qui est connu; & dans le second cas, par celui des moyens a qui est connu; & le quotient $\frac{bc}{a}$ sera le quatriéme terme qu'on cherchoit.

Quand les trois termes connus sont arrangez, comme on l'a dit, il faut multiplier le 2e & le 3e terme l'un par l'autre, & diviser leur produit bc par le 1er terme a, & le quotient $\frac{bc}{a}$ sera le 4e terme; ou bien, ce qui revient au même, & ce qui est quelquefois plus commode dans la pratique, il faut diviser le 2e terme par le premier, ce qui donnera le quotient $\frac{b}{a}$; ou si la division peut se faire plus commodément, il faut diviser le 3e terme par le premier ce qui donnera le quotient $\frac{c}{a}$; multiplier dans le premier cas le quotient $\frac{b}{a}$ par le 3e terme c; & dans le second cas, multiplier le quotient $\frac{c}{a}$ par le 2e terme b; & dans l'un & dans l'autre cas, le produit $\frac{bc}{a}$ * sera le 4e terme qu'on cherchoit. Ou bien enfin il faut diviser le 1er terme par le 2e, ce qui donne le quotient $\frac{a}{b}$; & diviser le 3e terme c par le quotient précedent; & le quotient $\frac{bc}{a}$ * sera le 4e terme. On a mis toutes ces manieres de trouver le 4e terme d'une proportion, afin que dans la pratique on puisse choisir celle qu'on verra être la plus commode pour chaque exemple qui peut se presenter.

* 340.

* 340.

EXEMPLE I.

SUPPOSANT que les longueurs des ombres que font deux hauteurs, étant prises en même temps, ayent le même rapport chacune à leur hauteur; on peut aisément mesurer une hauteur par son ombre, en se servant de la regle de trois. Il n'y a qu'à prendre un bâton dont la longueur soit connue, par exemple de 5 pieds, le tenir à plomb, lorsqu'il fait du soleil, auprès de l'extrêmité de l'ombre que fait la hauteur qu'on veut mesurer; marquer au même instant l'extrêmité de l'ombre du bâton, & l'extrêmité de l'ombre de la hauteur; & mesurer ensuite la longueur des deux ombres. Supposé que l'ombre du bâton soit de 3 pieds, & que l'ombre de la hauteur soit de 27 pieds; on connoîtra les trois termes d'une proportion dont la hauteur est le 4e terme: car l'ombre du bâton est à la hauteur du bâton, comme l'ombre de la hauteur est à la hauteur. Ce qui fait voir qu'il faut ainsi arranger les termes de la proportion. 3 pieds d'ombre du

bâton ſont à 5 pieds de hauteur, qui eſt la hauteur du bâton, comme 27 pieds d'ombre de la hauteur ſont au nombre des pieds de la hauteur. $3 . 5 :: 27 . x$. Il faut multiplier 27 par 5, & diviſer le produit 135 par 3, & le quotient 45 ſera le 4ᵉ terme. Ainſi la hauteur eſt de 45 pieds. Ou bien 27 ſe diviſant ſans reſte par 3, on peut diviſer 27 par 3, & multiplier le quotient 9 par 5, & le produit 45 ſera le 4ᵉ terme.

EXEMPLE II.

QUAND on a voulu meſurer le tour de la terre, c'eſt à dire trouver combien la circonference d'un grand cercle de la terre, par exemple d'un meridien, contenoit de lieues; on a pris deux Villes ſituées ſur un même meridien. On a meſuré exactement combien il y avoit de lieues de l'une à l'autre: on a obſervé les deux hauteurs du pôle à ces deux Villes, & on en a pris la difference; ces deux choſes ont ſuffi pour donner les trois termes connus d'une proportion dont le quatriéme étoit le nombre des lieues du tour de la terre. Car ſuppoſant, 1°. qu'il y ait 20 lieues entre deux Villes ſituées ſur un même meridien; 2°. que la difference des hauteurs du pole de ces deux Villes ſoit de $\frac{4}{5}$ d'un degré, on a cette proportion: $\frac{4}{5}$ d'un degré ſont à 20 lieues, comme 360 degrez que contient le tour de la terre, ſont au nombre des lieues du tour de la terre. $\frac{4}{5} . 20 :: 360 . x$.

Il faut multiplier 360 par 20, diviſer le produit 7200 par $\frac{4}{5}$, en ſe ſervant de la diviſion des fractions; & le quotient $\frac{36000}{4} = 9000$, eſt le nombre des lieues du tour de la terre.

Ou bien on diviſera le premier terme $\frac{4}{5}$ par le ſecond 20, ce qui donnera le quotient $\frac{4}{100}$. On diviſera le 3ᵉ terme 360 par le quotient $\frac{4}{100}$, & le quotient de cette diviſion, qui eſt $\frac{36000}{4} = 9000$, ſera le nombre des lieues du tour de la terre.

AVERTISSEMENT.

LA regle de proportion entre dans la reſolution de la plûpart des Problêmes des Mathematiques, & dans la plûpart des calculs du commerce. C'eſt pourquoi les commençans doivent ſe la rendre très familiere. On va mettre un exemple ſur la regle de ſocieté ou de compagnie, qui eſt formée de la regle de proportion réiterée.

Regle de la Societé ou de Compagnie.

IL s'agit dans la regle de ſocieté de partager une grandeur donnée, qu'on nommera p, en un nombre donné de parties, qu'on nommera x, y, z, *&c.* leſquelles parties ayent entr'elles les mêmes rapports qu'ont entr'elles autant de grandeurs données, qu'on nommera a, b, c, *&c.* qu'il y a de parties x, y, z, *&c.*

Regle. 1°. Il faut faire une ſomme de toutes les grandeurs données; ſuppoſant qu'il y en ait trois; cette ſomme eſt $a+b+c$.

2°. Il faut faire autant de regles de proportion qu'on cherche de parties. Dans notre ſuppoſition, il en faut faire trois. Le premier terme de chacun doit toujours être la ſomme $a+b+c$, *&c.* des grandeurs données. Le ſecond terme doit toujours être la grandeur p, qu'il faut partager. Mais le 3[e] terme de la premiere regle doit être la premiere des grandeurs données a; le 3[e] terme de la ſeconde regle, doit être la ſeconde grandeur b; le 3[e] terme de la 4[e] regle, doit être la troiſiéme grandeur c; & ainſi de ſuite s'il y a plus de trois grandeurs données. Les 4[es] termes, qu'on trouvera en faiſant les regles de trois, étant pris de ſuite comme on les voit dans l'exemple litteral, feront les parties, x, y, z, *&c.* que l'on cherchoit.

$$a+b+c \,.\, p :: \begin{cases} a \,.\, \frac{ap}{a+b+c} = x \\ b \,.\, \frac{bp}{a+b+c} = y \\ c \,.\, \frac{cp}{a+b+c} = z \end{cases}$$

Car les 4[es] termes qu'on trouve pour la valeur des parties x, y, z que l'on cherchoit, ayant le même conſequent, & leurs antecedents étant de ſuite les grandeurs a, b, c, chacune multipliée par p, ſont * entr'eux comme ces grandeurs, a, b, c; * 333. & leur ſomme $\frac{ap+bp+cp}{a+b+c}$ eſt viſiblement égale à la grandeur 332. partagée p.

Dans le commerce, ſuppoſé que trois perſonnes ayent fait une ſocieté; que la premiere ait mis une telle ſomme d'argent qu'on voudra repreſentée par a; la 2[e], une autre ſomme repreſentée par b; & la 3[e], une autre ſomme repreſentée par c; & que le profit ou la perte, c'eſt à dire ce qui eſt provenu de la ſocieté, ſoit repreſenté par p; il faut partager le profit ou la perte, repreſentée par p, en trois parties proportionnelles aux trois ſommes d'argent. Les 4[es] termes de l'exemple en lettres, font voir les operations qu'il faut faire pour trouver ces trois parties proportionnelles.

DÉFINITION.

QUAND les quatre termes d'une proportion ou de deux rapports égaux, ſont arrangez de façon que les deux termes de l'un des rapports égaux ſont dans un ordre renverſé, on nomme la proportion *inverſe* ou *reciproque*. Par exemple, la proportion droite étant 2. 4 :: 8. 16, l'inverſe ou la reciproque eſt 2. 4. 16. 8; & dans cet arrangement on dit que 2 eſt à 4 en raiſon inverſe de 16 à 8; ou que 2 eſt à 4 reciproquement, comme 8 eſt à 16; & l'on dit que les deux termes du premier rapport ſont reciproquement proportionnels aux deux termes du ſecond. Si la proportion droite eſt *a*. *b* :: *c*. *d*, en l'arrangeant ainſi *a*. *b*. *d* *c*, ou de cette maniere *b*. *a*. *c*. *d*; on dit que *a* eſt à *b* reciproquement comme *c* eſt à *d*, ou que *b* eſt à *a* reciproquement comme *d* eſt à *c*.

Dans cet arrangement de la proportion reciproque, il eſt évident que le 1er & le 3e termes ſont les extrêmes, & que le 2e & le 4e termes ſont les moyens de la proportion droite. Ainſi il eſt facile de reduire la proportion reciproque à la proportion droite, & trois termes étant connus, de trouver le 4e par la regle de proportion. Par exemple, ſi les trois premiers termes *a*, *b*, *d* étant connus, on demande le 4e *c*,
* 340. il eſt évident que * $c = \frac{ad}{b}$.

Quelques Auteurs arrangent encore une proportion reciproque de cette ſeconde maniere. Soit la proportion droite *a*. *b* :: *c*. *d*; la proportion reciproque eſt *a*, *d*, *b*, *c*, c'eſt à dire le 1er terme *a* eſt au 3e *b*, comme le 4e *c* eſt au ſecond *d*. Dans cet ordre de la proportion reciproque, le 1er & le 2e termes ſont les extrêmes, le 3e & le 4e ſont les moyens. Si l'on veut chercher un terme de cette proportion reciproque, par exemple le 4e *c*, il eſt évident que $c = \frac{ad}{b}$.

EXEMPLE III.

UN Courier en faiſant 24 lieues par jour, ne ſçauroit arriver qu'en 8 jours au lieu qu'il ſe propoſe; il ſeroit neceſſaire qu'il y arrivât en 4 jours; on demande combien il doit faire de lieues par jour pour y arriver en 4 jours.

L'état de la queſtion fait connoître que le nombre des lieues qu'on cherche, doit être d'autant plus grand que 24 lieues, que le temps de 4 jours eſt plus petit que le temps

de 8 jours. Ainſi en arrangeant les termes de la proportion ſuivant le ſens de la queſtion, on dira, le Courier employe 8 jours en faiſant 24 lieues par jour; pour n'employer que 4 jours, combien doit-il faire de lieues par jour? La proportion eſt reciproque dans cet arrangement, qui eſt de la ſeconde maniere. Car l'on aura pour premier terme, 8 jours; pour ſecond terme, 24 lieues; pour 3ᵉ terme, 4 jours; & le 4ᵉ terme ſera le nombre des lieues qu'on cherchoit. Il eſt viſible que le premier terme 8 jours, eſt au 3ᵉ 4 jours, comme reciproquement le 4ᵉ terme, qui eſt le nombre des lieues qu'on cherche, eſt au 2ᵉ terme 24 lieues. D'où l'on voit qu'il faut multiplier le premier terme 8 & le ſecond 24 l'un par l'autre, car ce ſont les extrêmes de la proportion droite, & diviſer le produit 192 par le 3ᵉ terme 4 qui eſt le moyen connu; & le quotient 48 eſt le 4ᵉ terme de la proportion reciproque, & c'eſt auſſi le ſecond moyen de la proportion droite.

On auroit reduit la proportion inverſe à une proportion droite, en l'ordonnant de cette maniere; 4 jours ſont à 8 jours, comme 24 lieues ſont au nombre des lieues qu'on cherche, que l'on trouve être 48 lieues.

Exemple IV.

Supposé qu'ayant une étoffe d'une $\frac{1}{2}$ aulne de large, 8 aulnes ſuffiſent pour faire un habit; on trouve une autre étoffe qui a $\frac{2}{3}$ de large, on veut ſçavoir combien il en faut d'aulnes pour faire un habit. Il eſt évident que plus l'étoffe a de largeur, & moins il en faut d'aulnes pour faire un habit; c'eſt pourquoi en ſuivant le ſens de la queſtion, on dira, autant qu'une $\frac{1}{2}$ aulne eſt plus petite que $\frac{2}{3}$ d'aulne, autant le nombre de 8 aulnes doit être en proportion inverſe plus grand que le nombre d'aulnes qu'on cherche; Et c'eſt l'arrangement de la premiere maniere de la proportion reciproque. Pour trouver le 4ᵉ terme, il faut multiplier le premier terme $\frac{1}{2}$ & le 3ᵉ terme 8, qui ſont les deux moyens de la proportion reciproque reduite à une proportion droite, & diviſer le produit $\frac{8}{2} = 4$ par le 2ᵉ terme $\frac{2}{3}$, qui eſt un des moyens de la proportion droite; & le quotient $\frac{12}{2} = 6$ ſera le 4ᵉ terme de la proportion reciproque; & en même temps le ſecond moyen de la proportion droite. Ainſi il faut 6 aulnes

d'étoffe de $\frac{2}{3}$ de large. La proportion droite eſt $\frac{2}{3} . \frac{1}{2} :: 8 . x$.

EXEMPLE V.

IL y a auſſi des cas où il faut partager une grandeur donnée en un nombre de parties qui ayent entr'elles des rapports inverſes d'autres rapports qui ſont entre autant de grandeurs données qu'on demande de parties; ce qu'on exprime de cette maniere. Partager une grandeur donnée p en un nombre donné de parties x, y, &c. qui ſoient entr'elles reciproquement comme ſont entr'elles autant de grandeurs donnés a, b, &c.

On en prendra un exemple de phyſique ſur le mouvement des corps. Pour le faire concevoir clairement, on ſuppoſera qu'on démontre dans le traité du mouvement, que la quantité du mouvement d'un corps qui ſe meut, eſt le produit de ſa maſſe par ſa viteſſe. Ainſi nommant m la maſſe d'un corps, & v ſa viteſſe, mv eſt la quantité de ſon mouvement. Il ſuit de là & de l'article 338, qu'afin que deux corps homogenes, dont les maſſes ſont differentes, qu'on nommera M & m, ayent une égale quantité de mouvement; il faut que leurs viteſſes, qu'on nommera V & v, ſoient entr'elles reciproquement comme les maſſes M & m; c'eſt à dire, que le rapport inverſe des viteſſes V & v ſoit égal au rapport direct des maſſes M & m. Il
* 338. faut donc que $M . m :: v . V$. Car l'on en déduira * $MV = mv$; c'eſt à dire que les quantitez de mouvement ſont égales.

Cela ſuppoſé, voici le Problême. Une viteſſe (u) étant donnée, la partager reciproquement aux maſſes M & m de deux corps; c'eſt à dire la partager en deux parties, qu'on nommera V & v, telles que leur rapport inverſe $\frac{v}{V}$ ſoit égal au rapport direct $\frac{M}{m}$ des maſſes des corps.

Operation. Il faut faire deux regles de proportion. Le premier terme de chacune doit être la ſomme des deux maſſes $M + m$; le ſecond terme de chacune doit être la viteſſe à partager (u); le 3ᵉ terme de la premiere regle doit être la maſſe m du ſecond corps; le 3ᵉ terme de la 2ᵉ regle doit être la maſſe M du premier corps; & les 4ᵉˢ termes, qu'on trouvera en faiſant ces deux regles,

$$M + m . u :: \begin{cases} m . \frac{mu}{M+m} = V. \\ M . \frac{Mu}{M+m} = v, \end{cases}$$

ſeront

feront les parties de viteffes qu'on cherche ; fçavoir $\frac{mu}{M+m}$ fera la viteffe V qu'il faut donner au corps M ; & $\frac{Mu}{M+m}$ fera la viteffe v qu'il faut donner au corps m ; & après cela leurs quantitez de mouvement MV & mv feront égales. Car il eft évident que les numerateurs m u & Mu des 4[es] termes, ayant le même confequent $M+m$, & étant chacun multiplié par la même grandeur (u), font entr'eux comme m à M, c'eft à dire, le rapport des 4[es] termes eft égal à l'inverfe du rapport direct $\frac{M}{m}$; & de plus il eft évident que la fomme des 4[es] termes $\frac{mu+Mu}{M+m}$ eft égale à la grandeur (u) qu'il falloit partager.

COROLLAIRE III. PROBLÊME II.

342. *DEUX grandeurs* a *&* c *étant données, trouver la grandeur* y *qui eft un moyen proportionel entre* a *&* c; *c'eft à dire dans la proportion continue* ∺ a. y. c, *il faut trouver le moyen proportionel* y, *les deux grandeurs* a *&* c *étant données.*

Operation. Il faut multiplier a par c, & prendre la racine quarrée du produit ac; cette racine 2[e], repreſentée par $\sqrt{ac}$, fera la grandeur y qu'on cherche. Car par la fuppofition $a . y :: y . c$. Donc * $y^2 = ac$. En tirant la racine 2[e] de chacune de ces grandeurs égales, on aura * $y = \sqrt{ac}$. * 338. * 211.

COROLLAIRE IV. PROBLÊME III.

343. *LE produit* ac *de deux grandeurs étant donné, trouver un quarré* y² *qui lui foit égal.*

Operation. Il faut trouver * y moyenne proportionelle entre a & c, & le quarré y^2 de y * fera égal à ac. * 342. * 338.

REMARQUES.

I.

344. DANS les grandeurs numeriques, lorfque le produit ac des deux grandeurs numeriques données, n'eft pas une puiffance parfaite, on ne peut pas trouver exactement un nombre y * qui foit moyen proportionel entre le nombre a & le nombre c; mais dans la Geometrie, en exprimant chacune des lignes droites d'une figure par une lettre, on peut trouver * 307.

Tt

exactement une ligne, representée par y, qui soit moyenne proportionnelle entre deux lignes données a & c.

2.

345. On fera remarquer ici aux Commençans, par rapport aux calculs dans lesquels les grandeurs doivent être homogenes, la maniere de distinguer dans les fractions litterales, celles qui sont homogenes, c'est à dire d'un même nombre de dimensions.

La multiplication des grandeurs litterales est la cause de leurs dimensions; par exemple, le produit ab est de deux dimensions; abc est de trois dimensions, &c. La division qui est opposée à la multiplication, diminue les dimensions des produits. C'est pourquoi dans une fraction litterale, le numerateur étant censé être divisé par le dénominateur, le surplus des dimensions du numerateur sur le dénominateur, est le nombre des dimensions de la fraction. Par exemple $\frac{ab}{c}$ est une fraction lineaire; $\frac{abd}{c}$ est de deux dimensions; $\frac{a^5}{b^2}$ est de trois dimensions. Il en est de même des autres.

Quand on a des fractions qui ne sont pas homogenes, on peut les rendre homogenes en multipliant le numerateur de celles qui ont le moins de dimensions, ou multipliant le dénominateur de celles qui ont le plus de dimensions par une grandeur litterale prise pour l'unité. Ainsi pour rendre $\frac{ab}{c}$ homogene à $\frac{b^5}{c^2}$, on prendra, par exemple, a pour l'unité, & l'on écrira $\frac{a^3b}{c}$ au lieu de $\frac{ab}{c}$, & $\frac{a^3b}{c}$ sera homogene à $\frac{b^5}{c^2}$; ou bien on écrira $\frac{b^5}{a^2c^3}$ au lieu de $\frac{b^5}{c^2}$, & les fractions $\frac{ab}{c}$, $\frac{b^5}{a^2c^3}$ seront homogenes. Ces operations en changeant l'expression des fractions, n'en changent point la valeur; car il est évident qu'une grandeur multipliée ou divisée par l'unité ou par les puissances de l'unité, ne change point de valeur.

COROLLAIRE V. PROBLÊME IV.

346. *DEUX termes d'une progression geometrique étant donnez; trouver de suite tous les termes suivans.*

Operation. Soient les deux premiers termes donnez a & b; il est évident que l'on a trois termes d'une proportion continue $a . b :: b . x$; & l'on cherche le 4e terme x qui est le 3e
* 341. terme de la progression. On le trouvera en prenant * le quar-

ré b^2 du moyen b, & le divisant par le premier terme a; & il viendra $x = \frac{b^2}{a}$. L'on a déja ∺ $a . b . \frac{b^2}{a}$. Pour trouver par ordre les termes suivans, on voit clairement qu'il ne faut que prendre le quarré du terme qu'on vient de trouver, & diviser ce quarré par le terme qui précede immédiatement le terme qu'on vient de découvrir, & le quotient sera le terme qui le suit. Ainsi la progression sera ∺ $a . b . \frac{b^2}{a} . \frac{b^3}{a^2} . \frac{b^4}{a^3} . \frac{b^5}{a^4}$, &c.

Si le premier terme de la progression est l'unité, tous les termes seront de suite les puissances du second terme, ∺ $1 . a . a^2 . a^3 . a^4$, &c.

Si l'unité étant le premier terme, le second est $\frac{1}{a}$, on trouvera que la progression est ∺ $1 . \frac{1}{a} . \frac{1}{a^2} . \frac{1}{a^3} . \frac{1}{a^4}$, &c. ou bien, * ce qui revient au même, ∺ $1 . a^{-1} . a^{-2} . a^{-3}$. * 145.
a^{-4}, &c.

On peut ordonner ces deux progressions de maniere qu'elles ne feront qu'une même progression, dans laquelle le rapport de chaque terme à celui qui est immédiatement plus à droite que lui, sera $\frac{1}{a}$: (ce rapport est nommé *le rapport qui regne dans la progression*) l'unité sera entre les termes de la progression qui auront pour exposans des nombres entiers positifs qui suivront vers la droite, & entre les termes qui auront des exposans négatifs qui précederont l'unité vers la gauche; & on pourra concevoir que la progression s'étend à l'infini tant vers la droite que vers la gauche de l'unité. ∺ &c. $a^{-6} . a^{-5} . a^{-4} . a^{-3} . a^{-2} . a^{-1} . 1 .$ ou $a^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6$, &c.

On peut de même continuer à l'infini vers la gauche la progression ∺ $a . b . \frac{b^2}{a} . \frac{b^3}{a^2} . \frac{b^4}{a^3}$, &c. & l'on trouvera ∺ &c. $\frac{a^5}{b^4} . \frac{a^4}{b^3} . \frac{a^3}{b^2} . \frac{a^2}{b} . a . b . \frac{b^2}{a} . \frac{b^3}{a^2} . \frac{b^4}{a^3} . \frac{b^5}{a^4}$, &c. ou bien ∺ &c. $a^5 b^{-4} . a^4 b^{-3} . a^3 b^{-2} . a^2 b^{-1} . a . b \; a^{-1} b^2 . a^{-2} b^3 . a^{-3} b^4 . a^{-4} b^5$, &c.

REMARQUE.

CES expressions des progressions geometriques, prises de leur formation, servent à en découvrir facilement les proprietez.

Des changemens qu'on peut faire sur les quatre termes a . b :: c . d *d'une proportion droite, de maniere que les quatre nouveaux termes qui viendront de ces changemens, seront encore une proportion.*

347. On a déja démontré deux de ces changemens ; sçavoir, quand on a une proportion droite $a . b :: c . d$, on aura * la proportion *inverse* $b . a :: d . c$, & * *l'alterne* $a . c :: b . d$.
* 55.
* 62.

COROLLAIRE VI.

348. La proportion droite étant $a . b :: c . d$, on aura (ce qu'on nomme *en composant* ou *par composition*, ce qu'on devroit plutôt nommer *en ajoutant* ou *par addition*) $a + b . b :: c + d . d$; on aura encore $a - b . b :: c - d . d$, (ce qu'on nomme *en divisant* ou *par division*, & ce qu'on devroit plutôt nommer *en retranchant* ou *par soustraction*.)

* 338. *Démonstration.* Il suit de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, que * $ad = bc$. Cela supposé, on trouve que le produit des extrêmes de l'une & l'autre des proportions précedentes, est égal au produit des moyens ; car dans la premiere, $ad + bd = bc + bd$; & dans
* 338. la seconde, $ad - bd = bc - bd$. Donc * $a + b . b :: c + d . d$; & $a - b . b :: c - d . d$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE VII.

349. On déduit des proportions précedentes cette autre-ci, $a + b . c + d :: a - b . c - d$. Car puisqu'on a démontré que $a + b . b :: c + d . d$, & que $a - b . b :: c - d . d$, on aura la proportion alterne $a + b . c + d :: b . d :: a - b . c - d$.

COROLLAIRE VIII.

350. La proportion droite étant $a . b :: c . d$, on aura $a . a - b :: c . c - d$. Ce qu'on nomme *conversion de raison*, ou simplement *conversion*. On aura encore $a . a + b :: c . c + d$. Car la
* 338. proportion droite donnant * $ad = bc$, dans l'un & l'autre des changemens de ce Corollaire, on trouvera le produit des extrêmes égal à celui des moyens, étant visible que dans le premier, $ac - ad = ac - bc$, & dans le second, $ac + ad = ac + bc$.

REMARQUES.

I.

351. On doit remarquer que la proportion droite étant $a . b :: c . d$, & l'alterne $a . c :: b . d$, les mêmes changemens qui conviennent à la proportion droite, doivent aussi convenir à l'alterne. Ainsi, 1°. $a + c . c :: b + d . d$; 2°. $a - c . c :: b - d . d$; 3°. $a + c . b + d :: a - c . b - d :: c . d$; 4°. $a . a - c :: b . b - d$; 5°. $a . a + c :: b . b + d$.

2.

Voila les principaux changemens que l'on peut faire sur les termes d'une proportion droite, de maniere que les quatre termes qui resultent de ces changemens, soient encore en proportion. Il faut se les rendre très familiers à cause de leur frequent usage. Il y en a encore d'autres qui ne sont pas d'un si grand usage. Il est inutile de les mettre, car quand on les rencontrera, ou quand on en aura besoin, on pourra toujours s'assurer si les quatre nouveaux termes sont en proportion, en prenant le produit des extrêmes & des moyens, & en voyant s'ils sont égaux. On en va mettre quelques exemples pour faire voir aux Commençans qu'ils ne sçauroient leur causer de difficulté.

COROLLAIRE IX.

352. QUAND on a une proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, laquelle donne $ad = bc$; en supposant que m represente un nombre quelconque entier ou rompu, & que n en represente un autre; on aura, 1°. $\frac{ma}{b} = \frac{mc}{d}$; 2°. $\frac{a}{nb} = \frac{c}{nd}$; 3°. $\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$; 4°. $\frac{a \pm mb}{b} = \frac{c \pm md}{d}$; 5°. $\frac{ma \pm mb}{b} = \frac{mc \pm md}{d}$, &c. Car il est évident que dans tous ces changemens le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. On a mis, pour abreger, $\pm$ dans les deux derniers changemens; c'est à dire afin de renfermer deux cas en un seul.

COROLLAIRE X.

353. SUPPOSE' $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ce qui donne * $ad = bc$; & que $\frac{e}{b} = \frac{f}{d}$, *338.
ce qui donne $ed = bf$; l'on aura $\frac{a + e}{b} = \frac{c + f}{d}$. Car il est évident que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

COROLLAIRE XI.

354. DANS une proportion $a . b :: c . d$, le plus grand & le plus petit termes sont toujours les deux extrêmes ou les deux moyens. C'est à dire, si a est plus grand que chacun des trois autres termes, d est necessairement le plus petit terme. Si a est le moindre, d est le plus grand. Si c'est un moyen b qui est le plus grand ou le moindre des termes, l'autre moyen c sera le plus petit ou le plus grand.

*338. *Démonstration.* * $ad = bc$. Donc si le plus grand terme se trouve parmi les extrêmes, & que ce soit par exemple a; d ne sçauroit être ni égal à chacun des deux moyens b ou c, ni plus grand qu'aucun des deux moyens b ou c; car le produit ad surpasseroit le produit bc de b, (b étant supposé égal à d, ou moindre que d) par c plus petit que a, par la supposition. Ainsi d est le plus petit terme de la proportion quand a est le plus grand. Si c'étoit un des moyens qui fût le plus grand ou le plus petit terme de la proportion, la même démonstration feroit voir que l'autre moyen seroit aussi le plus petit ou le plus grand terme.

COROLLAIRE XII.

355. LORSQUE le plus grand terme a est un des extrêmes, & par consequent le plus petit est l'autre; la somme des extrêmes $a + d$ surpasse la somme des moyens $b + c$; c'est le contraire quand le plus grand & le plus petit termes sont les moyens.

Démonstration. Puisque $a . b :: c . d$, l'on aura *par conver-*
*350. *sion*, * $a . a - b :: c . c - d$; d'où viendra l'alterne $a . c :: a - b . c - d$. Mais par la supposition $a > c$. Donc $a - b > c - d$. Par consequent si l'on ajoute $b + d$ à chaque membre, $a - b + b + d\ (= a + d) > c - d + b + d (= b + c)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE XIII.

356. D'où il suit que dans une proportion continue $a . b :: b . c$, la somme $a + c$ des extrêmes surpasse le double $2b$ du moyen proportionel.

COROLLAIRE XIV.

357. Si l'on a trois grandeurs d'une part $a \,.\, b \,.\, c$, & trois d'une autre $e \,.\, f \,.\, g$, de telle sorte que $a.b :: e.f$, & $b.c :: f.g$, l'on aura (ce qu'on nomme *par égalité*) $a \,.\, c :: e \,.\, g$.

Démonstration. Puisque $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, on aura * $\frac{a}{e} = \frac{b}{f}$. De même * 347.
$\frac{b}{c} = \frac{f}{g}$ donnera * $\frac{b}{f} = \frac{c}{g}$. Donc * $\frac{a}{e} = \frac{c}{g}$. Par consequent * a. * 347.
$c :: e \,.\, g$. *Ce qu'il falloit démontrer*. * 320.
* 347.

S'il y avoit tant de grandeurs qu'on voudra d'une part a, b, c, d, e, &c. & le même nombre de grandeurs f, g, h, i, k, &c. d'une autre; supposé qu'on nomme correspondantes la premiere d'une part & la premiere de l'autre, la seconde d'une part & la seconde de l'autre, & ainsi de suite; & qu'en allant de suite de la premiere à la derniere, deux grandeurs de la premiere part ayent toujours le même rapport que les deux correspondantes de la seconde part; la même démonstration continuée, fera voir que la premiere d'une part, sera toujours *par égalité* à la derniere, ou à telle autre qu'on voudra; comme la premiere de l'autre part à la derniere, ou à la correspondante.

COROLLAIRE XV.

358. Si l'on a a, b, c d'une part, e, f, g de l'autre; & que la premiere a soit à la seconde b d'une part, comme de l'autre la seconde f à la troisiéme g; & que la seconde b de la premiere part soit à la troisiéme c, comme de l'autre la premiere e est à la seconde f; on aura (ce qu'on nomme dans les Elemens d'Euclide *par égalité troublée*) la premiere a à la troisiéme c d'une part, comme de l'autre la premiere e à la troisiéme g.

Démonstration. $\frac{a}{b} = \frac{f}{g}$ donne * $ag = bf$. De même $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$ * 338.
donne $bf = ce$. Donc $ag = ce$. Par consequent * $a.c :: e.g$. * 338.
Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

CETTE maniere de conclure *par égalité troublée*, est difficile à retenir; c'est pourquoi quand on la trouve dans les Auteurs, il suffit de s'assurer de la conclusion $\frac{a}{c} = \frac{e}{g}$ par l'égalité du produit des extrêmes & du produit des moyens,

que l'on déduit des porportions données qui servent de premisses, sans se mettre en peine de retenir cette maniere d'arranger les grandeurs données.

COROLLAIRE XVI.

359. SI l'on a quatre grandeurs qui fassent une proportion $a \,.\, b :: c \,.\, d$; les puissances quelconques d'un même degré, dont on marquera l'exposant par m, sont aussi une proportion; c'est
*338. à dire $a^m \,.\, b^m :: c^m \,.\, d^m$. Car il suit de $a \,.\, b :: c \,.\, d$, * que $ad = bc$. Elevant chacun de ces produits égaux à la puissan-
*211. ce m, on aura * $a^m d^m = b^m c^m$. Donc * $a^m \,.\, b^m :: c^m \,.\, d^m$.
*338. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE XVII.

360. D'où il suit que si $a^m \,.\, b^m :: c^m \,.\, d^m$; on aura $a \,.\, b :: c \,.\, d$; car le produit des extrêmes $a^m d^m$ étant égal à celui des moyens $b^m c^m$;
*211. les racines, dont l'exposant est m, de ces produits * sont neces-
*338. sairement égales. Ainsi $ad = bc$; d'où * l'on a $a \,.\, b :: c \,.\, d$.

Ces deux derniers Corollaires conviennent aussi aux racines quelconques. Si $\sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} \,.\, \sqrt[m]{d}$, l'on aura $a \,.\, b :: c \,.\, d$; & si $a \,.\, b :: c \,.\, d$, l'on aura $\sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} \,.\, \sqrt[m]{d}$. C'est la même démonstration.

COROLLAIRE XVIII.

361. SI l'on a une progression quelconque $\div\div\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f$, &c. l'on aura aussi $\div\div\, a^m \,.\, b^m \,.\, c^m \,.\, d^m \,.\, e^m \,.\, f^m$, &c. & encore $\div\div\, \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} \,.\, \sqrt[m]{c} \,.\, \sqrt[m]{d} \,.\, \sqrt[m]{e}$, &c. & si $\div\div\, a^m \,.\, b^m \,.\, c^m \,.\, d^m \,.\, e^m$, &c. ou bien encore si $\div\div\, \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} \,.\, \sqrt[m]{c} \,.\, \sqrt[m]{d} \,.\, \sqrt[m]{e}$, &c. l'on aura aussi $\div\div\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e$, &c. C'est la même démonstration.

AVERTISSEMENT.

VOILA les propositions sur les proportions des grandeurs qui sont le plus d'usage; il est inutile d'en apprendre beaucoup d'au-
*336. tres qu'on pourroit ajouter. Quand il s'en presentera, on les
338. deduira aisément de * l'11e & du 12e Theorêmes.

Les

Les Comparaisons des rapports inégaux.

COROLLAIRES DE L'ONZIÉME THEOREME *. *336.

1.

362. SI $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, l'on aura * $ad > bc$. Et si $ad > bc$, l'on aura * *336.
$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. *337.

2.

363. Supposant $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ce qui donne * $ad > bc$, l'on aura pour *336.
les rapports *inverses* $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ car $bc < ad$.

3.

364. On aura pour l'*alterne* $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, puisque $ad > bc$.

4.

365. On aura *par composition*, ou plûtôt *par addition* $\frac{a+b}{b} > \frac{c+d}{d}$, *336.
car * $ad + bd > bc + bd$.

5.

366. On aura *par division*, ou plûtôt *par soustraction* $\frac{a-b}{b} > \frac{c-d}{d}$,
parceque $ad - bd > bc - bd$.

6.

367. Enfin on aura *par conversion* $\frac{a}{a-b} < \frac{c}{c-d}$; car le produit des extrêmes $ac - ad$ est moindre que celui des moyens $ac - bc$, puisque dans le premier le produit ad (plus grand par la supposition que bc) est retranché de ac, & dans le second bc moindre que ad est retranché de la même grandeur ac.

7.

368. Si l'on a plusieurs grandeurs d'une part $a.b.c$, & autant d'une autre $e.f.g$; & que $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$; & $\frac{b}{c} > \frac{f}{g}$. On aura *par égalité* $\frac{a}{c} > \frac{e}{g}$.
Démonstration. $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$ donne l'alterne * $\frac{a}{e} > \frac{b}{f}$; & $\frac{b}{c} > \frac{f}{g}$ *364.
donne l'alterne * $\frac{b}{f} > \frac{c}{g}$: Donc $\frac{a}{e} > \frac{c}{g}$: d'où l'on tire l'alterne * 364.
$\frac{a}{c} > \frac{e}{g}$. *Ce qu'il falloit démontrer*.

8.

369. Ayant d'une part a, b, c, & de l'autre e, f, g, supposant $\frac{a}{b} > \frac{f}{g}$, & $\frac{b}{c} > \frac{e}{f}$, on aura *par égalité troublée* $\frac{a}{c} > \frac{e}{g}$.

* 336. *Démonstration*. $\frac{a}{b} > \frac{f}{g}$ donne * $ag > bf$; & $\frac{b}{c} > \frac{e}{f}$ donne *
* 336. $bf > ce$. Donc $ag > ce$: d'où l'on déduit * $\frac{a}{c} < \frac{e}{g}$. *Ce qu'il falloit démontrer*.

9.

370. Si c est moindre que a, & d moindre que b, & qu'on suppose $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, l'on aura $\frac{a}{b} < \frac{a-c}{b-d}$.

Démonstration. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ donne $ad > bc$. Cela supposé, il est évident que le produit des extrêmes $ab - ad$ de $\frac{a}{b}$, $\frac{a-c}{b-d}$, est moindre que le produit des moyens $ab - bc$.

REMARQUE.

CES propositions sur la comparaison des rapports inégaux sont bien de moindre usage que celles qui sont sur la comparaison des rapports égaux. Ainsi il est inutile d'ajouter d'autres comparaisons des rapports inégaux; s'il s'en présentoit, on les déduiroit aisément de l'11e Theorême & des Corollaires précedens; & l'on déduit même si facilement toutes
* 336. celles qu'on vient d'expliquer de l'11e Theorême *, qu'il suffit de bien le retenir, comme un principe fondamental de la comparaison des rapports égaux & inégaux; & il est inutile de se charger la memoire des comparaisons des rapports inégaux.

SECTION V.

Où l'on explique les rapports composez.

DÉFINITIONS.

1.

371. SI l'on multiplie plusieurs rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, les uns par les autres, leur produit $\frac{ace}{bdf}$ s'appelle *un rapport composé* de ces rapports, lesquels se nomment aussi *les rapports composans*, ou les rapports *simples*.

Il est évident que ce seroit la même chose, si l'on disoit que le rapport du produit ace de tous les antecedens de plusieurs rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, au produit bdf de tous les consé-

quents, eſt *composé* de tous ces rapports qui en ſont les rapports *composans*.

2.

372. Lorſque les rapports compoſans ſont égaux, s'il y en a deux, le rapport compoſé de ces deux rapports égaux s'appelle un rapport *doublé* de chacun de ces rapports égaux; s'il y en a trois, le rapport compoſé s'appelle *triplé* de chacun de ces rapports; s'il y en a quatre, il ſe nomme *quadruplé* de chacun de ces rapports, & ainſi de ſuite. Par exemple, ſi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$; $\frac{ac}{bd}$ eſt un rapport doublé de $\frac{a}{b}$, ou de ſon égal $\frac{c}{d}$: $\frac{ace}{bdf}$ eſt triplé de $\frac{a}{b}$, ou de ſon égal $\frac{c}{d}$, ou de $\frac{e}{f}$: $\frac{aceg}{bdfh}$ eſt quadruplé de $\frac{a}{b}$, ou de ſon égal $\frac{c}{d}$, ou de ſon égal $\frac{e}{f}$, ou de ſon égal $\frac{g}{h}$. Il en eſt de même des autres.

REMARQUE.

QUAND tous les rapports compoſans d'un rapport compoſé ſont égaux entr'eux, on peut conſiderer le rapport compoſé, comme s'il n'étoit fait que du même rapport repeté pluſieurs fois; c'eſt à dire multiplié par lui-même pluſieurs fois. Ainſi ce rapport compoſé peut être conſideré comme un produit dont tous les multiplicateurs ſont égaux entre eux.

D'où il ſuit que ſi deux ou pluſieurs rapports ſont compoſez chacun d'un même nombre de rapports, de façon que tous les rapports compoſans de chacun ſoient égaux entre eux; ces rapports compoſez ne ſçauroient être égaux, que le rapport ſimple dont l'un eſt compoſé ne ſoit égal au rapport ſimple dont l'autre eſt compoſé. Car il eſt évident que quand deux produits ſont égaux, ſi les multiplicateurs de l'un ſont tous égaux entr'eux, & que les multiplicateurs de l'autre ſoient auſſi égaux entr'eux, & qu'il y ait un même nombre de multiplicateurs dans l'un & dans l'autre; il faut que le multiplicateur, par la répetition duquel l'un des produits eſt formé, ſoit égal au multiplicateur; par la répetition duquel, faite le même nombre de fois, l'autre produit égal eſt auſſi formé.

La propoſition qu'on vient d'expliquer dans cette remarque eſt ſi évidente, qu'on pourra la mettre pour la 2[e] partie du 1[er] axiome qui ſuivra bien-tôt.

3ᵉ DE'FINITION.

373. CHACUN des rapports ſimples égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dont un rapport $\frac{ac}{bd}$ eſt doublé, s'appelle *ſoudoublé* de ce rapport $\frac{ac}{bd}$. Chacun des rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, dont un rapport $\frac{ace}{bdf}$ eſt triplé, s'appelle *ſoutriplé* de ce rapport, & ainſi des autres. On dit, par exemple, que le rapport de a à b eſt ſoudoublé du rapport de ac à bd, & que le rapport de a à b eſt ſoutriplé du rapport de ace à bdf.

4.

374. Deux produits homogenes qui ſont en rapport doublé, ou triplé, ou quadruplé, &c. s'appellent *ſemblables*; ainſi ſuppoſant $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$; ac & bd ſont des produits ſemblables, & encore ace, bdf, & de même $aceg$, $bdfh$.

Les deux termes de chacun des rapports ſimples égaux qui ſont les rapports compoſans ſont nommez *relatifs* ou *homologues*. Ainſi dans les produits ſemblables $aceg$, $bdfh$, a eſt relatif à b, c à d, e à f, & g à h.

5.

375. Si deux produits homogenes ABC, abc ſont égaux, & que les dimenſions A, B, C du premier, quoiqu'inégales entr'elles, ſoient pourtant égales, la premiere A de l'un à la premiere a de l'autre; la ſeconde B à la ſeconde b; & la troiſiéme C à la troiſiéme c. On dit que les dimenſions de l'un ſont égales aux dimenſions de l'autre *chacune à chacune*, ou que les multiplicateurs ſont égaux chacun à chacun.

AXIOMES.

I.

376. LORSQUE les rapports compoſans de deux rapports compoſez d'un même nombre de rapports ſimples, ſont égaux chacun à chacun, les deux rapports compoſez ſont égaux. Car deux produits ſont égaux quand les multiplicateurs de l'un ſont égaux aux multiplicateurs de l'autre chacun à chacun.

Quand les rapports ne ſont compoſez chacun que de ſimples rapports tous égaux entr'eux; ſi deux ou pluſieurs rap-

ports composez chacun d'un même nombre de rapports composans, sont égaux, le rapport simple par la répetition duquel l'un est composé est égal au rapport simple par la répetition duquel, faite le même nombre de fois, l'autre est aussi composé.

2e Axiome.

377. Si deux ou plusieurs rapports sont égaux, & que l'un soit composé d'un certain nombre de rapports composans ; on peut concevoir chacun des rapports égaux à ce rapport composé, comme étant aussi composé des mêmes rapports composans, ou du même nombre de rapports composans égaux aux rapports composans du premier chacun à chacun. Par exemple $\frac{6}{30} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$. Le premier $\frac{6}{30}$ est composé des trois rapports simples $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$, on peut concevoir $\frac{1}{5}$ & $\frac{2}{10}$ chacun comme étant composé des mêmes rapports, ou de trois rapports qui leur soient égaux chacun à chacun.

Remarque.

378. Quand on a dit qu'on pouvoit concevoir les rapports composez égaux, comme composez chacun des mêmes rapports composans, ou de rapports composans égaux, on n'a pas prétendu dire que chacun des rapports composans, dont est formé un rapport composé, fussent déterminez, & précisément les mêmes rapports. Car un même rapport composé, comme $\frac{1}{5}$, peut être conçu composé des trois rapports $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$. Il peut encore être conçu composé des trois rapports $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, qui ne sont pas égaux aux trois premiers. Mais quelque varieté qu'on puisse concevoir dans les rapports composans d'un rapport composé; il est toujours évident que deux rapports composez égaux peuvent aussi être conçus composez d'un même nombre de rapports, de sorte que les rapports composans de l'un soient les mêmes que les composans de l'autre, ou qu'ils leur soient égaux.

Corollaires.

I.

379. Deux produits homogenes *ab* & *cd*; *abc* & *def*; *abcd* & *efgh*, &c. ont entr'eux un rapport composé des rapports

qui ſont entre les dimenſions de l'un & les dimenſions de l'autre, ou entre les multiplicateurs de l'un & les multipli-
* 287 & cateurs de l'autre. $\frac{ab}{cd} = * \frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$. $\frac{abc}{def} = \frac{a}{d} \times \frac{b}{e} \times \frac{c}{f}$. $\frac{abcd}{efgh} =$
371. $\frac{a}{e} \times \frac{b}{f} \times \frac{c}{g} \times \frac{d}{h}$, &c.

2.

380. Lorſque deux produits homogenes ont quelques-unes de leurs dimenſions égales, ils ſont entr'eux comme leurs di-
* 109. menſions inégales $\frac{a^2b}{a^2c} = * \frac{b}{c}$; $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$, &c.

3.

381. Quand il y a entre deux grandeurs a & f pluſieurs grandeurs interpoſées, comme dans cette ſuite a, b, c, d, e, f, Le rapport des deux grandeurs a & f entre leſquelles il y en a pluſieurs autres d'interpoſées b, c, d, e, eſt compoſé de tous les rapports qui ſont entre les interpoſées. C'eſt à dire dans la ſuite, a, b, c, d, e, f. Le rapport $\frac{a}{f}$ eſt compoſé de tous les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{e}{f}$.

* 371. *Démonſtration.* * $\frac{abcde}{bcdef}$ eſt un rapport compoſé * de $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$,
* 109. $\frac{d}{e}$, $\frac{e}{f}$, Or $\frac{abcde}{bcdef} = * \frac{a}{f}$. Par conſequent * $\frac{a}{f}$ eſt auſſi compo-
* 377. ſé des mêmes rapports qui ſont entre les grandeurs interpoſées. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

382. ON voit par le Corollaire précedent qu'on eſt libre de faire qu'un rapport ſimple $\frac{a}{g}$ puiſſe être conçu comme compoſé de tant, & pour ainſi dire, de tels rapports qu'on voudra; car ſuppoſé qu'on veuille que $\frac{a}{g}$ puiſſe être conçu compoſé de ſix rapports; il n'y a qu'à interpoſer cinq grandeurs entre a & g, & l'on aura, par exemple, la ſuite a, b, c, d, e, f, g, & on pourra concevoir que $\frac{a}{g}$ eſt un rapport compoſé de ces ſix rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{f}{g}$. On pourroit même faire en ſorte que tous ces rapports compoſans fuſſent donnez, & tels qu'on voudroit, ſi ce n'eſt le dernier $\frac{f}{g}$ qui ſe trouveroit néceſſairement déterminé.

Quoique cette maniere de faire qu'un rapport ſimple puiſſe être regardé comme compoſé de tant de rapports compoſans qu'on voudra, ſoit arbitraire, elle ne laiſſe pas

d'être d'usage pour avoir la résolution de plusieurs Problêmes dans les Mathematiques.

PROBLÊME I.

383. *AYANT deux ou plusieurs rapports composans, trouver le rapport qui en est composé.*

1. *Maniere*. Il n'y a qu'à multiplier tous les rapports composans les uns par les autres, & le produit * sera le rapport composé qu'on demande. Ainsi le rapport composé de $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ est $\frac{ace}{bdf}$. *371.

2. *Maniere*. Pour avoir le rapport composé des deux $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, il faut faire cette proportion * $a . b :: d . \frac{bd}{a}$ On nommera *341. p le quatriéme terme $\frac{bd}{a}$, & l'on aura $\frac{c}{p}$ pour le rapport composé de $\frac{a}{b}$ & de $\frac{c}{d}$. Car dans la suite c, d, p, le rapport $\frac{c}{p}$ * *381. est composé de $\frac{c}{d}$ & de $\frac{d}{p}$; mais par la construction $\frac{d}{p} = \frac{a}{b}$. Par consequent $\frac{c}{p}$ est un rapport composé de $\frac{c}{d}$ & de $\frac{a}{b}$.

S'il y a trois rapports composans $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$. On trouvera d'abord, comme on vient de l'enseigner, le rapport $\frac{c}{p}$ composé des deux $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. On fera ensuite cette proportion * *341. $e . f :: p . \frac{fp}{e}$. On supposera $\frac{fp}{e} = q$, & l'on aura le rapport $\frac{c}{q}$ composé des rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$. Car dans la suite c, d, p, q, le rapport $\frac{c}{q}$ est * composé de $\frac{c}{d}$, de $\frac{d}{p} = \frac{a}{b}$, & de $\frac{p}{q} = \frac{e}{f}$. *381.

S'il y a quatre rapports composans $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$, aprés avoir trouvé le rapport $\frac{c}{q}$ composé des trois premiers $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, on fera cette proportion $g . h :: q . \frac{hq}{g}$, & supposant $\frac{hq}{g} = r$, le rapport $\frac{c}{r}$ sera composé des quatre $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$. Car dans la suite c, d, p, q, r, le rapport $\frac{c}{r}$ * est composé des rapports *381. $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{p} = \frac{a}{b}$, $\frac{p}{q} = \frac{e}{f}$, & $\frac{q}{r} = \frac{g}{h}$.

REMARQUES.

I.

384. CETTE seconde methode de trouver le rapport composé de tant de rapports composans donnez qu'on voudra qui se pratique en interposant, entre une grandeur donnée, & une autre qu'on trouve par des proportions réiterées, des grandeurs telles que les rapports des grandeurs interposées soient égaux aux rapports proposez chacun à chacun; cette

methode, dis-je, de trouver un rapport composé de rapports ſimples donnez, eſt celle que l'on ſuit ordinairement dans la Geometrie & dans les Sciences Mathematiques où l'on employe les figures de la Geometrie.

2.

385. Cette methode a ces deux commoditez, 1°. En ſuppoſant que chacun des termes des rapports compoſans repréſente une ligne droite, chaque proportion de l'operation faiſant auſſi trouver pour quatriéme terme une ligne droite, la premiere & la derniere grandeur entre leſquelles ſont interpoſées les grandeurs qu'on trouve, ne ſont chacune qu'une ligne droite, auſſi bien que chacune des interpoſées, & cette, premiere & derniere grandeur étant repréſentées chacune par une ſeule lettre, le rapport composé de tant de rapports compoſans qu'on voudra n'eſt exprimé que par deux lettres, l'une au numerateur, & l'autre au dénominateur, ce qui rend l'expreſſion du rapport composé la plus ſimple qu'il ſe puiſſe. Par exemple, on a vû que le rapport composé $\frac{aceg}{bdfh}$ ſe reduit à $\frac{a}{r}$.

3.

386. 2°. On peut diverſifier l'expreſſion la plus ſimple d'un rapport composé de pluſieurs rapports donnez, de differentes manieres toutes équivalentes, parmi leſquelles on a la liberté de choiſir celles qui peuvent être les plus commodes pour la réſolution des Problêmes.

Pour faire clairement concevoir aux Commençans la maniere de trouver ces differentes expreſſions ſimples équivalentes d'un rapport composé de pluſieurs rapports, on leur fera remarquer qu'on peut prendre celle qu'on voudra des grandeurs données dans les rapports compoſans donnez, pour le premier terme du rapport composé qu'on cherche. Par exemple, ſi l'on veut qu'un des numerateurs duquel on voudra des rapports compoſans $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$, ſoit pris pour le premier terme du rapport composé qu'on cherche, & que ce ſoit, par exemple a, on fera ces proportions les unes aprés les autres. 1re, $c . d :: b . p$. 2e, $e . f :: p . q$. 3e, $g . h :: q . r$, & l'on aura $\frac{a}{r}$ pour le rapport composé qu'on cherche. Car
*381. dans la ſuite a, b, p, q, r, le rapport $\frac{a}{r}$ * eſt composé de $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{p} = \frac{c}{d}$, $\frac{p}{q} = \frac{e}{f}$, $\frac{q}{r} = \frac{g}{h}$.

Si

Si l'on veut que le premier terme du rapport composé qu'on cherche soit l'un des dénominateurs des rapports composans donnez. Par exemple b, on sera par ordre ces proportions. 1re, $d . c :: a . p$. 2e, $f . e :: p . q$. 3e, $b . g :: q . r$. Et le rapport composé qu'on cherche sera $\frac{r}{b}$. Car dans la suite $r . q . p . a . b$, on aura (à cause des rapports inverses) $\frac{r}{b}$ pour le rapport composé * de $\frac{r}{q} = \frac{g}{b}$, $\frac{q}{p} =$ * 381.
$\frac{e}{f}$, $\frac{p}{a} = \frac{c}{d}$ & $\frac{a}{b}$.

REMARQUE IV.

387. ON peut même prendre une grandeur telle qu'on voudra pour le premier terme ou pour le second terme du rapport composé qu'on cherche (ce qui peut servir en quelques résolutions de Problêmes, & en quelques démonstrations) par exemple, supposé qu'on prenne une grandeur arbitraire n pour le premier terme du rapport qu'on cherche, on sera par ordre ces proportions. 1re, $a . b :: n . p$. 2e, $c . d :: p . q$. 3e, $e . f :: q . r$. 4e, $g . b :: r . s$. Et le rapport composé qu'on cherche sera $\frac{n}{s}$. Car dans la suite n, p, q, r, s * * 381.
on aura $\frac{n}{s}$ pour le rapport composé de $\frac{n}{p} = \frac{a}{b}$; $\frac{p}{q} = \frac{c}{d}$; $\frac{q}{r} = \frac{e}{f}$; $\frac{r}{s} = \frac{g}{b}$.

PROBLÊME II.

388. *AYANT un rapport composé $\frac{a}{m}$ de plusieurs rapports, supposé que tous les rapports composans soient donnez, excepté un seul, trouver le rapport composant qui n'est pas donné.*

C'est à dire, quand le rapport $\frac{a}{m}$ n'est composé que de deux rapports, & que l'un des deux composans est donné, par exemple $\frac{c}{d}$, il faut trouver l'autre.

Quand le rapport $\frac{a}{m}$ est composé de trois rapports, & qu'on en suppose deux donnez, par exemple $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, ou que le rapport $\frac{c}{f}$ composé des deux rapports donnez est connu, l'on cherche le troisiéme, & ainsi des autres.

1. *Maniere*. Il faut diviser le rapport composé donné $\frac{a}{m}$ par le rapport donné $\frac{c}{d}$, s'il n'est composé que de deux rapports ; par le rapport composé $\frac{ce}{df}$ de tous les rapports composans donnez, si $\frac{a}{m}$ est composé de plusieurs rapports, & le quotient $\frac{ad}{cm}$ dans le premier cas, $\frac{adf}{cem}$ dans le second cas, sera le rapport composant qu'il falloit trouver. Car il est évident

qu'en multipliant par le quotient qu'on vient de trouver $\frac{ad}{cm}$,
* 107 & 371. le rapport compoſant donné $\frac{c}{d}$, le produit * ſera le rapport compoſé $\frac{a}{m}$ de ces deux rapports $\frac{c}{d}$, $\frac{ad}{cm}$. C'eſt la même démonſtration quand le rapport eſt compoſé de pluſieurs rapports.

2. *Maniere*. Pour trouver le ſecond rapport compoſant du rapport $\frac{a}{m}$ compoſé de deux rapports dont le premier $\frac{c}{d}$ eſt
* 341. donné, on fera cette proportion * $c.\ d :: a.\ p$, & $\frac{p}{m}$ ſera le rapport compoſant qu'on cherche. Car dans cette ſuite a,
* 381. p, m, le rapport de $\frac{a}{m}$ eſt compoſé * des deux rapports $\frac{a}{p}$ & $\frac{p}{m}$; mais par la conſtruction $\frac{a}{p} = \frac{c}{d}$ eſt celui des rapports compoſans qui eſt donné. Donc $\frac{p}{m}$ eſt l'autre que l'on cherchoit.

* 341. Ou bien on fera cette proportion * $d.\ c :: m.\ q$, & $\frac{a}{q}$ ſera le rapport qu'on cherchoit. Car dans la ſuite a, q, m, le rapport
* 381. $\frac{a}{m}$ eſt compoſé * des deux rapports $\frac{a}{q}$ & $\frac{q}{m}$; mais par la ſuppoſition $\frac{q}{m} = \frac{c}{d}$; par conſequent $\frac{a}{q}$ eſt le ſecond rapport compoſant.

Si $\frac{a}{m}$ eſt compoſé de trois rapports, & qu'on en ait deux donnez $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, ou que l'on ait le rapport $\frac{c}{p}$ compoſé de ces deux là;
* 383. 2ᵉ maniere. pour trouver le troiſiéme, 1°, * on reduira les deux rapports compoſans $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ au rapport $\frac{c}{p}$ qui en eſt compoſé s'ils n'y
* 341. ſont pas réduits. 2°. On fera cette proportion * $c.\ p :: a.\ q$, ou celle-ci $p.\ c :: m.\ r$. Dans le 1ᵉʳ cas $\frac{q}{m}$ eſt le 3ᵉ rapport compoſant qu'on cherche; & dans le 2ᵉ cas, c'eſt $\frac{a}{r}$. Car dans le 1ᵉʳ cas on aura, à cauſe de la ſuite a, q, m, le rapport $\frac{a}{m}$
* 381. compoſé des rapports * $\frac{a}{q}$, $\frac{q}{m}$; mais $\frac{a}{q}$ eſt par la ſuppoſition égal au rapport $\frac{c}{p}$ compoſé des deux rapports compoſans donnez; par conſequent $\frac{q}{m}$ eſt le 3ᵉ rapport compoſant de $\frac{a}{m}$. Dans le 2ᵉ cas, on aura, à cauſe de la ſuite a, r, m, le rapport
* 381. $\frac{a}{m}$ compoſé * $\frac{a}{r}$ & de $\frac{r}{m}$; mais $\frac{r}{m}$ eſt égal à $\frac{c}{p}$, c'eſt à dire au produit des deux rapports donnez; par conſequent $\frac{a}{r}$ eſt le 3ᵉ rapport compoſant qu'on cherchoit.

Cela ſuffit pour faire connoître la maniere de trouver le ſeul rapport compoſant inconnu qu'on cherche, lorſque tous les autres rapports compoſans d'un rapport compoſé donné $\frac{a}{m}$, ſont connus. Si un ſeul rapport compoſant de $\frac{a}{m}$ étoit connu, la même methode feroit découvrir le rapport compoſé des autres rapports ſimples dont $\frac{a}{m}$ eſt compoſé.

Usage des rapports composez dans le Commerce.

AVERTISSEMENT.

On trouve dans le Commerce une infinité d'exemples qui dépendent des rapports composez. On n'en mettra ici, comme en passant, que de deux sortes pour faire voir l'usage des rapports composez dans le Commerce, parceque l'on n'a en vûe, en ce Traité du calcul, que l'usage qu'il doit avoir pour apprendre à fond les Mathematiques. Les exemples de la 1re sorte sont ceux où ayant tous les rapports composans d'un rapport composé, & un des deux termes d'un rapport qui lui est égal, il faut trouver l'autre terme. C'est ce qu'on nomme *la regle de trois composée*. Par exemple, 2000 livres rapportent en trois années 100 écus de rente, on demande combien 8000 livres donneront de rente en 12 années? On cherche dans cet exemple un nombre inconnu d'écus qui ait avec 100 écus un rapport égal au rapport composé des deux rapports composans le premier de 8000 liv. à 2000 liv. le second de 12 années à 3 années. Les exemples de la 2e sorte sont ceux dans lesquels il s'agit de partager un nombre donné en un nombre déterminé de parties qui ayent entr'elles des rapports égaux à des rapports composez dont les rapports composans sont donnez. C'est ce qu'on nomme *la regle de societé ou de compagnie composée*. Par exemple si trois personnes ayant fait une societé, ont mis chacun une certaine somme, ce qui fera les trois sommes a, b, c; que le premier n'ait mis a que pour un temps d, le second ait mis b pour un autre temps e, le troisiéme ait mis c pour un autre temps f, & qu'il y ait eu un profit P, il faut partager ce profit P en trois parties inconnues x, y, z, qui ayent entre elles des rapports $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ égaux aux rapports composez, dont le premier a pour rapports composans $\frac{a}{b}$, $\frac{d}{e}$; le second $\frac{b}{c}$, $\frac{e}{f}$.

La Regle de trois composée.

PROBLÊME.

Tous les rapports composans d'un rapport composé étant donnez, un seul terme étant aussi donné d'un rapport égal à ce rapport composé, trouver l'autre terme de ce rapport égal.

Regle ou *Operation*. Il faut apporter toute l'attention neceſſaire pour bien diſtinguer par l'état de la queſtion, tous les termes des rapports compoſans dont le rapport compoſé doit être formé, & le terme ſeul connu du rapport qui lui eſt égal dont on cherche l'autre terme. Après quoi on arrangera facilement les termes de cette maniere.

On ſuppoſera, pour une plus grande clarté, que le terme qu'on cherche eſt repréſenté par x, l'autre terme du même rapport par e, les antecedens donnez des rapports compoſans par a & c, leurs conſequents par b & d. Ainſi l'on aura $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{e}{x}$.

Le terme x qu'on cherche ſera mis le dernier dans la 4[e] place. On mettra dans la 2[e] ou 3[e] place le terme connu e, qui eſt l'antecedent du rapport dont le terme x qu'on cherche eſt le conſequent. On écrira les uns ſous les autres dans la premiere place tous les antecedens a, c des rapports compoſans, & dans la 2[e] ou 3[e] place tous leurs conſequents b, d, les uns ſous les autres. Enſuite on multipliera tous les antecedens de la premiere place, & leur produit ac ſera le premier terme d'une regle de proportion ſimple; on prendra le produit bd de tous leurs conſequens qui ſont dans la 2[e] ou 3[e] place, le produit bd ſera le 2[e] ou 3[e] terme de la regle de trois ſimple. Le terme connu e du rapport dont on cherche l'autre terme, ſera le 2[e] ou 3[e] terme de la regle de trois ſimple. Enfin on prendra le produit bde du 2[e] & du 3[e] terme de la regle de trois ſimple, qu'on diviſera par le premier terme ac, & le quotient $\frac{bde}{ac}$ ſera le terme x qu'on cherche.

EXEMPLE I.

2000 liv. (a) rapportent en 3 années (c) 100 écus (e); on demande le nombre d'écus x, que donneront 8000 liv. (b) en 12 années (d).

Arrengement des termes de la regle de trois compoſée.

$$\begin{matrix} 2000\ (a) \\ 3\ (c) \end{matrix} . \begin{matrix} 8000\ (b) \\ 12\ (d) \end{matrix} :: 100\ (e) . x.$$

Regle de trois ſimple.

$6000\ (ac) . 96000\ (bd) :: 100\ (e) . x = 1600$ écus $(\frac{bde}{ac})$.

La démonſtration eſt évidente par le calcul litteral; car

par l'état de la queſtion $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{e}{x}$; d'où il ſuit que $x = \frac{bde}{ac}$. Ainſi la regle fait découvrir le terme x que l'on cherche du rapport $\frac{e}{x} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

REMARQUE.

On peut reduire tous les Exemples de la regle de trois compoſée, à pluſieurs regles des trois ſimples. Pour faire cette reduction dans l'Exemple précedent, on dira: Si 2000 liv. (a) rapportent en un certain temps (qui eſt ici celui de 3 ans) 100 écus (e); quel eſt le nombre inconnu y d'écus que rapporteront 8000 liv. (b) dans le même temps (qui eſt celui de 3 ans)? L'on fera donc cette proportion * 2000 (a). 8000 * 341.
(b) :: 100 (e). $y = \frac{be}{a} = 400$. Ainſi l'on trouvera pour 4ᵉ terme 400 écus $= \frac{be}{a}$. On dira enſuite, en 3 ans (c) une certaine ſomme (qui eſt 8000 liv.) rapporte 400 écus $(\frac{be}{a})$; en 12 ans (d); quel nombre d'écus (x) rapportera la même ſomme 8000 liv. * 341.
& l'on fera cette proportion * 3 (c). 12 (d) :: 400 $(\frac{be}{a})$. $x = \frac{bed}{ac} = 1600$. Ainſi le terme x que l'on cherchoit eſt 1600 écus, comme on l'avoit trouvé dans l'Exemple.

Voici la raiſon pourquoi on a mis cette maniere de reduire la regle de trois compoſée, à pluſieurs ſimples. Il y a des cas où l'on cherche le terme x d'un rapport dont l'autre terme (e) eſt connu, lequel rapport eſt égal à un rapport compoſé dont tous les rapports compoſants ſont donnez; mais il y a parmi ces rapports compoſants donnez des rapports inverſes, & ces rapports compoſants inverſes qui ſont connus, & qui entrent dans la regle de trois compoſée, lui font donner le nom de regle de trois compoſée inverſe. Dans ces cas il y a une regle pour trouver le terme inconnu qu'on cherche; mais comme elle pourroit embaraſſer les Commençans, on a cru qu'il valoit mieux leur apprendre à reduire tous les Exemples des regles de trois compoſées, tant ceux qui ne contiennent que des rapports compoſants directs, que ceux qui en contiennent d'inverſes, à de ſimples proportions: ce qui ne ſçauroit jamais embaraſſer; on en va mettre une Exemple.

EXEMPLE II.

100 Soldats (a) dépenſent 40 écus (c) en 3 jours (e), en quel nombre (x) de jours 10000 Soldats (b) dépenſeront-ils 200000 écus (d)?

Sans se mettre en peine si cet Exemple contient une regle de trois composée droite ou inverse, on le reduira en proportions droites simples, en disant, 1°. 100 Soldats (*a*) dépensent 40 écus (*c*) en un certain temps (qui est dans cet Exemple 3 jours), quel nombre *y* d'écus dépenseront 10000 Soldats (*b*) dans le même temps (de trois jours)? La premiere proportion simple sera donc 100(*a*). 10000(*b*) :: 40(*c*). $y =$
*341. * $\frac{bc}{a} = 4000$. C'est à dire que 10000 Soldats dépenseroient dans le temps (de 3 jours) 4000 écus. 2°. On dira ensuite, un certain nombre de Soldats (qui est dans cet Exemple 10000) dépensent 4000 écus ($\frac{bc}{a}$) en trois jours (*e*); en quel nombre *x* de jours dépenseront-ils 200000 écus (*d*)? Et la seconde proportion simple sera 4000 ($\frac{bc}{a}$). 200000 (*d*) :: 3 (*e*). $x =$
*341. * $\frac{ade}{bc} = 150$. C'est à dire, on trouve pour le 4e terme *x* (qui est celui qu'on cherche dans la question) 150 jours.

La Regle de Compagnie composée.

PROBLÊME.

PARTAGER un nombre donné p *en un nombre déterminé de parties inconnues, par exemple en trois parties* x, y, z, *de maniere que les rapports de ces parties* $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, *soient egaux à des rapports composez dont les rapports composans sont donnez, par exemple, que* $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{e}$, & $\frac{y}{z} = \frac{b}{c} \times \frac{e}{f}$. *D'où il est clair qu'il faut aussi que* $x + y + z = p$.

On voit par l'état de la question que *x*. *y* :: *ad*. *be*, & *y*. *z* :: *be*. *cf*. D'où l'on a les alternes *x*. *ad* :: *y*. *be* :: *z*. *cf*.

Pour mieux faire concevoir la maniere de resoudre le Problême, on l'appliquera à un Exemple. Trois personnes ont fait une societé: le premier a mis 10 pistoles (*a*) pour 2 mois (*d*); le second a mis 20 pistoles (*b*) pour 3 mois (*e*); le 3e a mis 30 pistoles (*c*) pour quatre mois (*f*). Ils ont eu de profit 300 liv. (*p*); il faut partager ce profit en trois parties que l'on cherche *x*, *y*, *z*, de maniere que *x* soit à *y* en rapport composé du rapport simple qui est entre *a* & *b*, & du rapport simple qui est entre *d* & *e*; & que *y* soit à *z* en rapport composé du rapport simple qui est entre *b* & *c*, & du rapport simple qui est entre *e* & *f*.

Résolution du Problême. Il faut multiplier l'argent que chacun a mis par le temps pour lequel il l'a mis. Faire de la somme des produits $ad + be + cf$ le premier terme d'une proportion, le profit p doit être le second terme. Mettre successivement pour 3e terme chacun des produits ad, be, cf de l'argent par le temps; enfin faire autant de regles de trois simples qu'il y a de personnes; & les quatriémes termes que l'on trouvera seront les nombres qu'on cherche. En voici l'exemple figuré.

	10 pistoles (a)	20 pistoles (b)	30 pistoles (c)
	2 mois (d)	3 mois (e)	4 mois (f)
produits	20 (ad)	60 (be)	120 (cf)

$$200\,(ad+be+cf) \,.\, 300\,(p) :: \begin{cases} 20\,(ad) \,.\; 30\,\left(\frac{adp}{ad+be+cf}\right) = x \\ 60\,(be) \,.\; 90\,\left(\frac{bep}{ad+be+cf}\right) = y \\ 120\,(cf) \,.\; 180\,\left(\frac{cfp}{ad+be+cf}\right) = z \end{cases}$$

Démonstration. L'operation litterale fait voir que les parties x, y, z, qu'on trouve par la regle, ont entr'elles les rapports que renferme l'état de la question, & que leur somme $x + y + z = p$.

AVERTISSEMENT.

Il est inutile de donner ici les regles que l'on trouve dans les Arithmetiques pratiques pour le Commerce. Ce Traité du calcul étant fait pour l'Analyse, qui est la science d'employer le calcul à la résolution des Problêmes des Mathematiques, & à découvrir dans ces sciences tout ce qu'on peut désirer d'en sçavoir; quand les Lecteurs auront appris l'Analyse, ils sçauront d'eux-mêmes résoudre les questions qui peuvent se rencontrer dans le Commerce, sans avoir besoin des regles qu'on en donne dans les Arithmetiques ordinaires.

Des rapports composez, dont tous les rapports composans sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE IV.

389. Le rapport qui est entre deux grandeurs quarrées $\frac{a^2}{b^2}$ * est doublé du rapport des racines $\frac{a}{b}$; le rapport qui est entre * 372.

deux 3es puiſſances $\frac{a^3}{b^3}$, eſt triplé du rapport des racines $\frac{a}{b}$; le rapport $\frac{a^4}{b^4}$ eſt quadruplé du rapport $\frac{a}{b}$; & ainſi de ſuite: Car $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$; $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, &c.

*121. Le rapport $\frac{a}{b}$ * eſt ſoudoublé du rapport $\frac{a^2}{b^2}$, ſoutriplé de $\frac{a^3}{b^3}$, ſouquadruplé de $\frac{a^4}{b^4}$, & ainſi de ſuite. De même $\frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{b}}$ eſt ſoudoublé du rapport $\frac{a}{b}$; $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ en eſt ſoutriplé; $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$ en eſt ſouquadruplé, & ainſi de ſuite. Ou ce qui revient au même $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$ eſt ſoudoublé de $\frac{a}{b}$; $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}$ en eſt ſoutriplé, & ainſi de ſuite. Car il eſt évident que le quarré de $\sqrt[2]{a}$ ou de $a^{\frac{1}{2}}$ eſt a, celui de $\sqrt[2]{b}$ ou de $b^{\frac{1}{2}}$ eſt b; ainſi $\frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{b}} \times \frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{b}} = \frac{a}{b}$; de même $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{b}$. Il en eſt de même des autres.

Les Commençans doivent faire attention, que $\sqrt[2]{a}$ eſt un
*145. ſigne qu'on a déterminé * à marquer la racine 2e de a; que $\sqrt[3]{a}$ en marque la racine 3e; & qu'en general $\sqrt[n]{a}$ marque la racine de a, dont l'expoſant eſt un nombre entier quelconque repréſenté par n; & qu'elever une racine à la puiſſance dont elle eſt la racine, n'eſt autre choſe que de trouver cette puiſſance même. Par exemple, ſi l'on veut élever $\sqrt[2]{4}$ à la 2e puiſſance, on doit neceſſairement trouver la puiſſance même 4, dont $\sqrt[2]{4}$ exprime la racine 2e. Si l'on veut élever $\sqrt[3]{8}$ à la troiſiéme puiſſance, on trouvera neceſſairement 8 pour la 3e puiſſance, dont $\sqrt[3]{8}$ eſt la racine 3e. En general ſi l'on veut élever $\sqrt[n]{a}$ à la puiſſance n, on doit écrire a pour la puiſſance n qui a $\sqrt[n]{a}$ pour ſa racine.

Le rapport $\frac{\sqrt[2]{a^3}}{\sqrt[2]{b^3}}$ eſt ſoudoublé du rapport $\frac{a^3}{b^3}$; $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2}}$ eſt ſoutriplé de $\frac{a^2}{b^2}$, &c. ou ce qui eſt la même choſe $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}$ eſt ſoudoublé de $\frac{a^3}{b^3}$, &c. $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$ eſt ſoutriplé de $\frac{a^2}{b^2}$, &c.

En

En general, ſi l'on ſuppoſe que *n* repréſente un nombre entier quelconque, ou un nombre rompu quelconque, $\frac{a^n}{b^n}$ ſera l'expreſſion generale de tout rapport compoſé d'autant de rapports égaux à $\frac{a}{b}$, qu'il y a d'unitez dans le nombre *n*, quand *n* eſt un nombre entier; & de tout rapport ſoudoublé, ſoutriplé, ſouquadruplé du rapport $\frac{a}{b}$, & ainſi à l'infini, en ſuppoſant que *n* repréſente ſucceſſivement tous les nombres rompus dont l'unité eſt le numerateur; enfin de tout rapport ſoudoublé, ſoutriplé, ſouquadruplé, &c. de $\frac{a}{b}$ élevé à telle puiſſance qu'on voudra, en ſuppoſant que *n* repréſente un nombre rompu tel qu'on voudra, dont le numerateur eſt different de l'unité auſſi-bien que le dénominateur.

On peut auſſi ſéparer les expreſſions de ces trois cas, de ces trois manieres. Le premier cas ſera exprimé par $\frac{a^n}{b^n}$. Le 2e cas par $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$. Le 3e cas par $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$. Dans le 1er cas, $\frac{a^n}{b^n}$ eſt compoſé d'autant de rapports ſimples égaux à $\frac{a}{b}$, qu'il y a d'unitez dans le nombre entier *n*. Dans le 2e cas, $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ marque le rapport ſimple par la répetition duquel autant de fois qu'il y a d'unitez dans le nombre entier quelconque *n*, eſt formé le rapport compoſé $\frac{a}{b}$. C'eſt à dire, $\frac{a}{b}$ eſt compoſé du rapport $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ repeté autant de fois qu'il y a d'unitez dans *n*. Dans le troiſiéme cas, $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$ eſt le rapport ſimple par la répetition duquel autant de fois qu'il y a d'unitez dans un nombre entier quelconque repréſenté par *m*, eſt formé le rapport compoſé $\frac{a^n}{b^n}$; c'eſt à dire $\frac{a^n}{b^n}$ eſt compoſé autant de fois du rapport ſimple $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$ qu'il y a d'unitez dans le nombre entier *m*.

Cette 3ᵉ expreſſion $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$ peut auſſi exprimer un rapport composé du rapport ſimple $\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}$ repeté autant de fois qu'il y a d'unitez dans le nombre entier quelconque n.

Ce trois expreſſions peuvent, comme on l'a expliqué, ſe réunir dans la ſeule expreſſion $\frac{a^n}{b^n}$, en ſuppoſant, par rapport à la premiere, que n repréſente un nombre entier quelconque; par rapport à la 2ᵉ, que n repréſente une fraction quelconque dont l'unité eſt le numerateur; par rapport à la 3ᵉ, que n repréſente une fraction dont les deux termes ſont chacun un nombre entier quelconque.

COROLLAIRE V.

390. DEUX produits homogenes * *ſemblables* ont entr'eux un
*374. rapport doublé du rapport ſimple qui eſt entre leurs dimenſions relatives, ou entre leurs multiplicateurs relatifs, s'ils ſont chacun de deux dimenſions, ils ont un rapport triplé du même rapport compoſant s'ils ſont chacun de trois dimenſions, quadruplé s'ils ſont de quatre dimenſions, & ainſi de ſuite.

*374. Par exemple, ſi ab & cd ſont ſemblables; c'eſt à dire, ſi * $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{ab}{cd}$ eſt un rapport doublé de $\frac{a}{c}$, ou de ſon égal $\frac{b}{d}$. Si abc, def ſont ſemblables, c'eſt à dire ſi $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, $\frac{abc}{def}$ eſt un rapport triplé de $\frac{a}{d}$, ou de $\frac{b}{e}$, ou de $\frac{c}{f}$, & ainſi des autres. Car par la ſuppoſition $\frac{ab}{cd}$, $\frac{abc}{def}$, $\frac{abcd}{efgh}$, &c. ſont des produits des rapports égaux $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \cdot \frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{f} \cdot \frac{a}{e}, \frac{b}{f}, \frac{c}{g}, \frac{d}{h}$. Donc le premier
*372. * eſt doublé, le ſecond triplé, le troiſiéme quadruplé & ainſi de ſuite, de chacun des rapports égaux dont ils ſont les produits.

COROLLAIRE VI.

391. DEUX produits homogenes ſemblables ſont entr'eux comme les puiſſances du même degré de leurs dimenſions relatives, ou de leurs multiplicateurs relatifs.

Par exemple, ſi ab & cd ſont ſemblables, $\frac{ab}{cd}=\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}$. Si abc & def ſont ſemblables $\frac{abc}{def}=\frac{a^3}{d^3}=\frac{b^3}{e^3}=\frac{c^3}{f^3}$, & ainſi des autres. Car par la ſuppoſition $\frac{ab}{cd}$ & $\frac{a^2}{c^2}$, $\frac{abc}{def}$ & $\frac{a^3}{d^3}$, &c. ſont compoſez d'un même nombre de rapports égaux. Par conſequent * ce ſont des rapports compoſez égaux. *376.

COROLLAIRE VII.

392. CELA eſt cauſe que quand des produits homogenes ſont ſemblables, on dit ordinairement qu'ils ſont entr'eux comme les quarrez de leurs côtez relatifs, ou de leurs dimenſions relatives, s'ils ſont de deux dimenſions; comme les cubes de leurs côtez relatifs, s'ils ſont de trois dimenſions, &c.

COROLLAIRE VIII.

393. DE même lorſque les deux termes a & b d'un rapport $\frac{a}{b}$ ſont en rapport ſoudoublé, ou ſoutriplé, ou ſouquadruplé, &c. de $\frac{c}{d}$, on dit que a & b ſont entr'eux comme les racines 2es, 3es, &c. de c & d; ce qui s'exprime ainſi $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt[2]{c}}{\sqrt[2]{d}}$ $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{d}}$, &c. ou bien $\frac{a}{b}=\frac{c^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}}$; $\frac{a}{b}=\frac{c^{\frac{1}{3}}}{d^{\frac{1}{3}}}$, &c. & en general $\frac{a}{b}=\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$, en ſuppoſant que n repréſente un nombre entier quelconque. Car par la ſuppoſition $\frac{c}{d}$ eſt compoſé d'autant de rapports égaux au rapport ſimple $\frac{a}{b}$ que le nombre n contient d'unitez. Or $\frac{c}{d}$ eſt auſſi compoſé d'autant de rapports égaux à $\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}=\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$ que * le nombre n contient d'unitez. Il *389. faut donc que le rapport ſimple $\frac{a}{b}$ ſoit égal au rapport ſimple $\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$; puiſque le produit d'autant de rapports égaux à $\frac{a}{b}$ qu'il y a d'unitez dans n, eſt égal au produit qui vient de la

multiplication d'autant de rapports $\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$, $\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$, $\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$, &c. qu'il y a d'unitez dans le même nombre n.

COROLLAIRE IX.

394. LORSQUE deux ou plusieurs rapports sont égaux $a . b :: c . d :: e . f$, &c. les rapports formez de suite des puissances des termes du même degré, ou qui ont le même exposant, sont égaux; comme aussi les rapports formez des racines qui ont le même exposant sont égaux. C'est à dire, $a^n . b^n :: c^n . d^n :: e^n . f^n$ &c. comme aussi $a^{\frac{1}{n}} . b^{\frac{1}{n}} :: c^{\frac{1}{n}} . d^{\frac{1}{n}} :: e^{\frac{1}{n}} . f^{\frac{1}{n}}$ &c.

Car il est évident que les rapports des puissances sont des rapports composez du même nombre de rapports composans égaux, ainsi ils sont égaux; & que les rapports des racines sont les rapports composans dont les rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ &c. sont composez; & chacun en est composé d'un même nombre; par consequent ces rapports composans sont égaux.

COROLLAIRE X.

395. D'où il suit que si l'on a une progression geometrique $\div a . b . c . d . e . f$ &c. l'on aura la progression geometrique $\div a^n . b^n . c^n . d^n . e^n . f^n$. &c & encore $\div a^{\frac{1}{n}} . b^{\frac{1}{n}} . c^{\frac{1}{n}} . d^{\frac{1}{n}} . e^{\frac{1}{n}} . f^{\frac{1}{n}}$ &c. & encore $\div a^{\frac{n}{m}} . b^{\frac{n}{m}} . c^{\frac{n}{m}} . d^{\frac{n}{m}} . e^{\frac{n}{m}} . f^{\frac{n}{m}}$ &c.

COROLLAIRE XI.

396. LES produits des termes correspondans de deux proportions, sont aussi une proportion; & les produits des termes correspondans de deux ou de plusieurs progressions, sont aussi une progression. Par exemple, si $a . b :: c . d$, & $e . f :: g . h$. L'on aura $ae . bf :: cg . dh$. Car $\frac{ae}{bf}$, $\frac{cg}{dh}$ sont chacun composé du même nombre de rapports égaux: Et si $\div a . b . c . d . e$ &c. & $\div g . h . i . k . l$. &c. L'on aura $\div ag . bh . ci . dk . el$. &c. Car les rapports $\frac{ag}{bh}$, $\frac{bh}{ci}$, $\frac{ci}{dk}$, $\frac{dk}{el}$ &c. sont composez chacun du même nombre de rapports égaux.

COROLLAIRE XII.

397. En toute progreſſion geometrique ∺ $a . b . c . d . e . f$ &c. le rapport $\frac{p}{q}$ de l'un des termes qu'on nommera p à un autre terme qu'on nommera q, eſt doublé du rapport $\frac{a}{b}$ qui regne dans la progreſſion s'il y a un terme d'interpoſé entre p & q; le rapport $\frac{p}{q}$ eſt triplé du rapport qui regne dans la progreſſion s'il y a deux termes interpoſez entre p & q; il ſera quadruplé, s'il y a trois termes d'interpoſez, & ainſi à l'infini.

Car s'il y a un terme interpoſé entre p & q, le rapport $\frac{p}{q}$ * eſt compoſé de deux rapports égaux; s'il y en a trois, il eſt compoſé de trois rapports égaux, &c. Ainſi le rapport du premier terme a au troiſiéme c eſt doublé, du premier a au quatriéme d eſt triplé, &c. * 381.

COROLLAIRE XIII.

398. D'où il ſuit qu'en prenant dans une progreſſion le 1er terme, le 3e, le 5e, le 7e, & ainſi de ſuite, l'on aura encore une progreſſion; & qu'en general, les termes pris de ſuite, entre leſquels il y a un égal nombre de termes interpoſez, ſont en progreſſion: Car ce ſera un même rapport qui regnera entre tous les termes.

COROLLAIRE XIV.

399. Dans une progreſſion geometrique le rapport d'un terme p à un autre terme q, entre leſquels il y a un terme interpoſé, eſt égal au rapport des quarrez de deux termes conſecutifs $\frac{a^2}{b^2}$; s'il y a deux termes interpoſez, $\frac{p}{q}$ eſt égal au rapport des 3es puiſſances $\frac{a^3}{b^3}$ de deux termes conſecutifs; s'il y a trois termes d'interpoſez, $\frac{p}{q}$ eſt égal au rapport des 4es puiſſances $\frac{a^4}{b^4}$ de deux termes conſecutifs. En general ſi l'on ſuppoſe que n marque le nombre quelconque des termes interpoſez entre deux termes p & q de la progreſſion, l'on aura $\frac{p}{q} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$.

Car $\frac{p}{q}$ eſt compoſé d'autant de rapports compoſans égaux qu'il y a d'unitez dans le nombre des termes interpoſez plus un. Mais en élevant deux termes conſecutifs tels qu'on vou-

* 389 à la fin. dra, comme a & b à la puissance $n+1$, $\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$ sera * un rapport composé du même nombre de rapports composans égaux ; par conséquent $\frac{p}{q} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$.

PROBLÊME.

400. *UN rapport $\frac{a}{b}$ étant donné, trouver le rapport qui en est doublé, ou triplé, ou quadruplé, &c.*

Il n'y à qu'à élever $\frac{a}{b}$ au quarré, à la 3e puissance, à la 4e puissance, &c. & l'on aura $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, &c. pour le
* 389. rapport * doublé, ou triplé, ou quadruplé, &c. du rapport $\frac{a}{b}$.

Autre maniere, par le moyen des grandeurs interposées.
* 346. Il faut trouver, les deux grandeurs a & b étant données pour les premiers termes d'une progression, le 3e terme qu'on nommera x, si l'on veut un rapport doublé ; le 4e qu'on nommera y, si l'on veut un rapport triplé ; le 5e z, si l'on
* 397. veut un rapport quadruplé, &c. Car il est évident * que $\frac{a}{x}$ sera un rapport doublé de $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{y}$ en sera triplé ; $\frac{a}{z}$ en sera quadruplé, &c.

Ou bien si l'on veut, on pourra prendre b pour le premier terme, & a pour le second terme d'un progression,
* 346. & on trouvera * le 3e terme qu'on nommera u ; le 4e qu'on nommera t ; le 5e qu'on nommera s, &c. & il est évident
* 397. que * dans la progression ÷ &c. $s . t . v . a . b$, le rapport $\frac{v}{b}$ sera doublé de $\frac{a}{b}$; $\frac{t}{b}$ en sera triplé ; $\frac{s}{b}$ en sera quadruplé, &c.

PROBLÊME.

401. *UN rapport composé $\frac{a}{b}$ étant donné, trouver le rapport composant dont $\frac{a}{b}$ est doublé, ou triplé, ou quadruplé, &c.*

Il faut prendre la racine quarrée $\frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{b}}$ de $\frac{a}{b}$, si l'on veut le
* 389. rapport dont * $\frac{a}{b}$ est doublé ; la racine 3^e $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, si l'on veut le rapport dont $\frac{a}{b}$ est triplé ; $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$ si l'on veut le rapport dont

$\frac{a}{b}$ eſt quadruplé. En general $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, on $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ exprimera le rapport dont $\frac{a}{b}$ eſt doublé, en ſuppoſant $n=2$; dont $\frac{a}{b}$ eſt triplé, en ſuppoſant $n=3$, & ainſi de ſuite.

C'eſt à dire $\frac{a}{b}$ eſt compoſé * d'autant de rapports égaux à $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ qu'il y a d'unitez dans n, en ſuppoſant que n repréſente tel nombre entier qu'on voudra. *389.

COROLLAIRE I.

402. ON ſuppoſe que $\frac{ac}{bc}$ eſt un rapport numerique compoſé d'autant de rapports égaux à $\frac{\sqrt[n]{ac}}{\sqrt[n]{bc}}$ qu'il y a d'unitez dans n (n repréſente un nombre entier quelconque.) Si $\frac{ac}{bc}$ étant réduit aux moindres termes $\frac{a}{b}$, le moindre rapport $\frac{a}{b}$ n'eſt pas une puiſſance parfaite dont l'expoſant ſoit n; c'eſt à dire, ſi les nombres a & b ne ſont pas chacun une puiſſance parfaite dont n ſoit l'expoſant; le rapport compoſant $\frac{\sqrt[n]{ac}}{\sqrt[n]{bc}}$ eſt une grandeur incommenſurable avec l'unité, avec les nombres a & b, & avec tous les autres nombres formez de la même unité dont a & b ſont formez.

Démonſtration. $\frac{ac}{bc} . 1 :: {}^{*}ac . bc :: {}^{*}a . b :: \frac{a}{b} . 1$. Ainſi $^{*}\frac{ac}{bc} . 1 :: a . b$ *330. *332. *320.
$:: \frac{a}{b} . 1$. Donc $^{*}\frac{\sqrt[n]{ac}}{\sqrt[n]{bc}} . \sqrt[n]{1} = 1 :: \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} :: \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} . 1$. Mais les *394.
nombres a & b ſont ſuppoſez des puiſſances numeriques imparfaites dont l'expoſant eſt n; par conſequent * $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ eſt incommenſurable avec l'unité. $\frac{\sqrt[n]{ac}}{\sqrt[n]{bc}}$ eſt donc auſſi incommenſurable avec l'unité, & avec tout nombre formé de cette unité. *309.

Si l'on ſuppoſe $n=2$. On verra que le rapport ſimple $\frac{\sqrt[2]{ac}}{\sqrt[2]{bc}}$, dont $\frac{ac}{bc}$ eſt doublé, eſt une grandeur incommenſurable

quand $\frac{ac}{bc}$ étant réduit au moindre rapport $\frac{a}{b}$, ce moindre rapport n'eſt pas un quarré parfait. Ainſi ſi deux quarrez ſont entr'eux comme 3 à 2, le rapport ſimple $\frac{\sqrt[2]{3}}{\sqrt[2]{2}}$ dont $\frac{3}{2}$ eſt doublé, eſt incommenſurable avec 1, avec $\frac{3}{2}$, & avec tous les nombres.

Si l'on ſuppoſe $n=3$, & que $\frac{ac}{bc}$ étant réduit aux moindres termes $\frac{a}{b}$, a & b ſoient des 3[es] puiſſances imparfaites; $\frac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{bc}}$ eſt incommenſurable avec l'unité, avec ac & bc, & avec tous les nombres formez de la même unité. Par exemple, deux 3[es] puiſſances ſont entr'elles comme 3 à 2; le rapport $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$, dont $\frac{3}{2}$ eſt triplé, eſt une grandeur incommenſurable avec l'unité, avec $\frac{3}{2}$, & avec tous les nombres; & ainſi des autres.

COROLLAIRE II.

403. SI on élevoit le rapport $\frac{\sqrt[n]{ac}}{\sqrt[n]{bc}}$ à la puiſſance dont m ſeroit l'expoſant (m repréſente un nombre entier quelconque) l'on auroit le rapport $\frac{\sqrt[n]{\overline{ac}^m}}{\sqrt[n]{\overline{bc}^m}} = \frac{\overline{ac}^{\frac{m}{n}}}{\overline{bc}^{\frac{m}{n}}}$ qui eſt compoſé * d'autant de rapports ſimples égaux à $\frac{\sqrt[n]{ac}}{\sqrt[n]{bc}} = \frac{ac^{\frac{1}{n}}}{bc^{\frac{1}{n}}}$ que l'expoſant m contient d'unitez.

* 389. à la fin.

Le Problême ſuivant fournira la methode de trouver par le moyen des grandeurs interpoſées, le rapport compoſant dont un rapport donné eſt doublé ou triplé, &c.

PROBLÊME.

404. *TROUVER entre deux grandeurs données autant de grandeurs moyennes proportionelles qu'on voudra.*

Soient a & b les deux grandeurs données, & que n exprime le nombre des moyennes proportionnelles qu'on cherche. Il eſt évident qu'il ſuffit de trouver la premiere moyenne qu'on nommera x; car x étant connue, on trouvera aiſé-

ment, * par la regle de proportion, toutes les moyennes suivantes. * 341.

Résolution. Il est évident que * $a^{n+1} . x^{n+1} :: a . b$. D'où * 399. l'on déduit * $ax^{n+1} = a^{n+1}b$. En divisant chaque grandeur * 338. par a, on aura $x^{n+1} = \frac{a^{n+1}b}{a} = a^{n+1-1}b = a^n b$. Ainsi $x^{n+1} = a^n b$. En tirant la racine dont l'exposant est $n+1$ de chacune de ces grandeurs égales, on aura $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$.

Cette expression $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$ marque ce qu'il faut faire pour trouver entre a & b la premiere de tant de moyennes proportionnelles qu'on voudra.

Par exemple, si l'on veut une seule moyenne entre a & b; alors $n = 1$; mettant 1 à la place de n dans $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$, on aura $x = \sqrt[2]{ab}$. Ce qui fait voir que la racine quarrée du produit ab de deux grandeurs est moyenne proportionnelle entre ces deux grandeurs; car $a . \sqrt[2]{ab} :: \sqrt[2]{ab} . b$, puisque le produit des extrêmes, & celui des moyens sont la même grandeur ab.

Si l'on veut la premiere de deux moyennes entre a & b; alors $n = 2$. Mettant 2 à la place de n dans $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$, on aura $x = \sqrt[3]{a^2 b}$; ce qui fait voir que la racine 3[e] du produit fait du quarré a^2 par b, est la premiere des deux moyennes proportionnelles entre a & b. Car $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2 b}}$ étant élevé à la 3[e] puissance, on aura $\frac{a^3}{a^2 b}$. Or $a^3 . a^2 b :: * a . b$. Par consequent * 109. le rapport $\frac{a^3}{a^2 b}$ étant triplé du rapport $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2 b}}$; $\frac{a}{b}$ est aussi triplé * du même rapport. Ainsi $\sqrt[3]{a^2 b}$ est la premiere des deux grandeurs moyennes proportionnelles interposées entre a & b. * 389, 376 & 377.

Si l'on veut la premiere de cinq moyennes proportionnelles entre a & b; alors $n = 5$, & $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$ deviendra $x = \sqrt[6]{a^5 b}$. Ainsi $\sqrt[6]{a^5 b}$ est la premiere des cinq moyennes entre a & b. Pour s'en convaincre il n'y a qu'à * former la * 346. progression, dont a & b sont les deux premiers termes, $\div a . b . \frac{b^2}{a} . \frac{b^3}{a^2} . \frac{b^4}{a^3} . \frac{b^5}{a^4} . \frac{b^6}{a^5}$. Si l'on multiplie ensuite les termes par la même grandeur a^5, on aura * la progression * 75.

∺ $a^6 . a^5b . a^4b^2 . a^3b^3 . a^2b^4 . ab^5 . b^6$. Enfin si l'on prend la
* 395. racine 6e de chaque terme * on aura la progression ∺ $a . \sqrt[6]{a^5b} . \sqrt[6]{a^4b^2} . \sqrt[6]{a^3b^3} . \sqrt[6]{a^2b^4} . \sqrt[6]{ab^5} . b$, où l'on voit que $\sqrt[6]{a^5b}$ est la premiere des cinq moyennes proportionnelles entre a & b.

Ces exemples suffisent pour faire voir aux Lecteurs que $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$ leur fera trouver la premiere de tant de moyennes proportionnelles qu'ils voudront entre deux grandeurs a & b. Ils remarqueront seulement que quand a & b sont deux nombres, il y a plusieurs cas où la premiere des moyennes proportionnelles, marquée par la formule, ne pourra se trouver exactement par nombres, comme on le verra dans le 5e Corollaire.

COROLLAIRE I.

405. QUAND on a un rapport donné $\frac{a}{b}$, & qu'on le suppose composé d'autant de rapports égaux qu'en exprime $n + 1$, ($n + 1$ represente un nombre entier quelconque.) Pour trouver le rapport composant auquel tous les autres sont égaux, il est évident qu'il ne faut que chercher la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre a & b qu'il y a d'unitez dans n, & le rapport de a à cette premiere
* 397. moyenne $\sqrt[n+1]{a^n b}$, c'est à dire $\frac{a}{\sqrt[n+1]{a^n b}}$ sera * le rapport composant qu'on cherche.

COROLLAIRE II.

406. SUPPOSANT que n représente un nombre entier quelconque: si l'on a cette proportion $a^{n+1} . c^{n+1} :: a . b$; la grandeur c sera la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre a & b, que n contient d'unitez.

Démonstration. En nommant x la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre a & b que n contient d'uni-
* 399. tez, on aura * cette proportion $a^{n+1} . x^{n+1} :: a . b$. Par
* 320. consequent * $\frac{a^{n+1}}{c^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{x^{n+1}}$. L'on aura donc $c^{n+1} = * x^{n+1}$,
* 319.
* 221. & $c = * x$.

en mettant successivement 1, 2, 3, 4, &c. à la place de n, on verra que si $a^2 . c^2 :: a . b$, l'on aura $\div a . c . b$. Si $a^3 . c^3 :: a . b$, l'on aura c pour la premiere de deux moyennes proportionnelles entre a & b. Si $a^4 . c^4 :: a . b$, l'on aura c pour la premiere de trois moyennes proportionnelles entre a & b, & ainsi de suite.

COROLLAIRE III.

407. On a vû dans le Problême précedent * la maniere de trouver la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre a & b que n contient d'unitez, en supposant que a est la premiere grandeur, & b la derniere, & que $\sqrt[n+1]{a^n b}$ est la premiere moyenne proportionnelle qui suit a. Il est évident qu'en prenant b pour la premiere grandeur, & a pour la seconde, on trouvera de la même maniere que la premiere des moyennes proportionnelles la plus proche de b est $\sqrt[n+1]{ab^n}$. Ainsi dans le 1er Corollaire *, en supposant $\frac{a}{b}$ composé d'autant de rapports égaux que $n + 1$ contient d'unitez, on trouvera encore que $\frac{\sqrt[n+1]{ab^n}}{b}$ est le rapport composant égal à tous les autres dont $\frac{a}{b}$ est composé; & dans le second Corollaire, * si $b^{n+1} . c^{n+1} :: b . a$; la grandeur c sera la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre b & a, que n contient d'unitez; & cette même grandeur c sera la moyenne la plus proche de b. C'est pourquoi si $b^2 . c^2 :: b . a$, l'on aura $\div b . c . a$. Si $b^3 . c^3 :: b . a$, l'on aura c pour la premiere de deux moyennes proportionnelles entre b & a; & ainsi des autres.

* 404.
* 405.
* 406.

COROLLAIRE IV.

408. Quand les deux grandeurs a & b sont déterminées, & que le nombre n des moyens proportionnels entre a & b est déterminé, chacun des termes moyens est aussi déterminé, quoiqu'il ne soit pas connu. C'est à dire, il ne peut pas y avoir deux ou plusieurs grandeurs inégales pour le premier moyen, mais il n'y en a qu'une seule de possible; & de même pour le second moyen, pour le 3e, pour le 4e, &c.

Car on a démontré que le 1er moyen étoit necessairement
*404. * $\sqrt[n+1]{a^nb}$, & il est évident que le rapport de la premiere grandeur a (qui est déterminé) à $\sqrt[n+1]{a^nb}$, ne feroit pas le même si l'on imaginoit pour 1er moyen une grandeur inégale à $\sqrt[n+1]{a^nb}$, ainsi le 1er moyen est necessairement déterminé. Le même raisonnement fait voir que le second moyen, le 3e, &c. doivent être aussi chacun une grandeur déterminée.

COROLLAIRE V.

409. En toute progression numerique, que l'on prenne deux termes quelconques représentez par a & b, entre lesquelles il y ait un nombre n tel qu'on voudra de moyens proportionnels; si a^nb est une puissance numerique parfaite dont l'exposant soit $n+1$, ou bien encore si ab^n est une puissance numerique parfaite dont l'exposant soit $n+1$; alors les racines $\sqrt[n+1]{a^nb}$, comme aussi $\sqrt[n+1]{ab^n}$ sont chacune un nombre qui est la racine exacte, sçavoir $\sqrt[n+1]{a^nb}$, de la puissance numerique a^nb, & $\sqrt[n+1]{ab^n}$ de la puissance numerique ab^n; & le rapport
*399. composant * $\frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{b}} = \frac{a}{\sqrt[n+1]{a^nb}} =$ * $\frac{\sqrt[n+1]{ab^n}}{b}$ (égal à tous ceux dont
*407.
$\frac{a}{b}$ est composé, & dont il y en a autant qu'il y a d'unitez dans $n+1$) peut s'exprimer par nombres; puisque a & $\sqrt[n+1]{a^nb}$, comme aussi $\sqrt[n+1]{ab^n}$ & b sont des nombres.

Mais si a^nb, comme aussi ab^n, ne sont pas chacun une puissance numerique parfaite dont l'exposant soit $n+1$; alors
*309. $\sqrt[n+1]{a^nb}$ & $\sqrt[n+1]{ab^n}$ * sont chacune une grandeur incommensurable. Par consequent les deux termes du rapport composant
*407. $\frac{a}{\sqrt[n+1]{a^nb}} =$ * $\frac{\sqrt[n+1]{ab^n}}{b} =$ * $\frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{b}}$ (qui est égal à tous les rapports
*389.
égaux composans dont le rapport $\frac{a}{b}$ est composé, & dont

il y en a autant qu'il y a d'unitez dans $n + 1$) ſont incommenſurables. On ſuppoſe que le moindre rapport $= \frac{a}{b}$ n'eſt pas une puiſſance parfaite dont l'expoſant eſt $n + 1$.

REMARQUE.

LES Commençans doivent d'eux-mêmes ſe former les cas particuliers de ce 5e Corollaire, en ſuppoſant n ſucceſſivement égale à 1, 2, 3, &c. & en mettant des nombres à la place de a & de b, & ils verront que quand un quarré eſt double ou triple d'un autre, comme auſſi quand un cube eſt double ou triple d'un autre, &c. c'eſt à dire quand le rapport de ces puiſſances eſt $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, le côté de l'un des deux eſt incommenſurable avec le côté de l'autre; car $\sqrt{2}$ eſt incommenſurable avec $\sqrt{1} = 1$, comme auſſi $\sqrt[3]{2}$ eſt incommenſurable avec $\sqrt[3]{1} = 1$.

THEORÊME.

Sur les moyennes proportionnelles entre deux grandeurs a & b *élevées à une puiſſance quelconque* a^n, b^n.

410. ON ſuppoſe que n repréſente un nombre entier quelconque; & qu'on éleve les grandeurs a & b à la puiſſance n, l'on aura a^n, b^n. Cela ſuppoſé, les produits $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$, $a^{n-4}b^4$, & ainſi de ſuite juſqu'à $a^{n-n}b^n$, dans leſquels la puiſſance a^n diminue d'un degré de l'un à l'autre, & les puiſſances de b vont en augmentant d'un degré depuis b^1 juſqu'à b^n, ces produits, dis-je, ſont de ſuite des grandeurs moyennes proportionnelles entre a^n & b^n, & il y a autant de ces moyennes proportionnelles qu'il y a d'unitez dans $n - 1$; c'eſt à dire $\div\div a^n . a^{n-1}b . a^{n-2}b^2 . a^{n-3}b^3 . a^{n-4}b^4$, & ainſi de ſuite juſqu'à $a^{n-n}b^n = b^n$.

Par exemple, ſuppoſant $n = 2$, on aura $\div\div a^2 . ab . b^2$. Suppoſant $n = 3$, on aura $\div\div a^3 . a^2b . ab^2 . b^3$. Si $n = 4$, on aura $\div\div a^4 . a^3b . a^2b^2 . ab^3 \; b^4$. Si $n = 5$, on aura $\div\div a^5 . a^4b . a^3b^2 . a^2b^3 . ab^4 . b^5$, & ainſi de ſuite.

Démonſtration. 1°. Il eſt évident que le rapport de deux termes conſécutifs, qui regne dans la progreſſion, eſt $\frac{a}{b}$; car la puiſſance de a ayant une dimenſion de plus dans un ter-

me à gauche que dans celui qui le suit immédiatement à droite; & b ayant au contraire une dimension de moins dans le terme à gauche que dans celui qui le suit immédiatement à droite; il est clair qu'en effaçant en deux termes consécutifs les lettres communes, il ne doit rester que a pour antecedent, & que b pour consequent du rapport de deux termes consécutifs, qui est par consequent $\frac{a}{b}$. 2°. Les termes moyens étant les produits pris de suite des puissances de a (dont les exposans diminuent d'une unité d'un terme à l'autre depuis le premier terme a^n) & des puissances de b (dont les exposans vont en augmentant d'une unité d'un terme à l'autre depuis b^1 juqu'au terme b^n); il est évident qu'il doit y avoir autant de termes moyens qu'il y a d'unitez dans $n - 1$. Donc $\div\!\div a^n . a^{n-1} b . a^{n-2} b^2 . a^{n-3} b^3$, & ainsi de suite jusqu'à $a^{n-n} b^n = b^n$; & il y aura autant de moyens qu'il y a d'unitez dans $n - 1$, puisque 1 est l'exposant de b dans le premier moyen $a^{n-1} b^1$; & que dans le dernier moyen, b doit avoir pour exposant $n - 1$. Quand le premier terme $a = 1$, la progression sera $\div\!\div 1 . b . b^2 . b^3$. &c.

COROLLAIRE.

411. Il suit de là * qu'en prenant les racines dont n est l'exposant, on aura cette progression $\div\!\div \sqrt[n]{a^n} = a . \sqrt[n]{a^{n-1} b} . \sqrt[n]{a^{n-2} b^2} . \sqrt[n]{a^{n-3} b^3} . \sqrt[n]{a^{n-4} b^4}$. &c. jusqu'à $\sqrt[n]{a^0 b^n} = \sqrt[n]{1 b^n} = b$, & qu'il y aura dans cette progression autant de moyens proportionnels entre a & b qu'il y a d'unitez dans $n - 1$. Quand $a = 1$, la progression précedente devient $\div\!\div \sqrt[n]{1} = 1 . \sqrt[n]{b} . \sqrt[n]{b^2} . \sqrt[n]{b^3} . \sqrt[n]{b^4}$. &c. jusqu'à $\sqrt[n]{b^n} = b$.

* 395.

De la proportion & de la progression harmonique.

AVERTISSEMENT.

412. Il y a une autre sorte de proportion & de progression formée des progressions geometrique & arithmetique, qui est de peu d'usage, si ce n'est dans la Musique dont elle exprime les principaux accords: on la nomme, à cause de cela, la proportion harmonique. Voici ce que c'est.

DÉFINITION.

413. LORSQUE trois grandeurs comme 3 . 4 . 6 sont telles que la 1re 3 est à la 3e 6, comme la difference 1 de la premiere à la seconde est à la difference 2 de la seconde à la troisiéme, on dit que ces trois grandeurs 3 . 4 . 6 font une *proportion harmonique*. Quand la proportion harmonique s'étend à plus de trois termes, on la nomme *progression harmonique*.

PROBLÊME.

414. *DEUX termes d'une proportion harmonique étant donnez; trouver le troisiéme terme.*

Operation. Soient les deux termes donnez représentez par a, b, & qu'ils soient les deux premiers termes; & que le 3e terme, qu'on cherche, soit représenté par x. Ainsi $a . b . x$ feront une proportion harmonique.

1°. Si la proportion va en augmentant, on aura cette proportion geometrique $a . x :: b - a . x - b$. C'est à dire, la 1re grandeur a est à la 3e x; comme la difference $b - a$ de la 2e b à la 1re a, est à la difference $x - b$ de la 3e x à la 2e b.

En prenant les produits des extrêmes & des moyens, on aura * $ax - ab = bx - ax$. En ajoutant à chaque membre de cette égalité la grandeur $+ ax - bx + ab$, on trouvera $2ax - bx = ab$. Enfin en divisant chacune de ces grandeurs égales par $2a - b$, on trouvera $x = \frac{ab}{2a-b}$. Par consequent la proportion harmonique sera $a . b . \frac{ab}{2a-b}$. Ce 3e terme $x = \frac{ab}{2a-b}$ servira de formule pour trouver le 3e terme d'une proportion harmonique qui va en augmentant, les deux 1ers termes étant donnez; & l'on remarquera que quand le second terme b surpasse le double $2a$ du premier terme, comme encore quand $b = 2a$; on ne peut pas trouver de troisiéme terme aux deux termes donnez de la proportion harmonique. *338.

Exemple. 2 & 3 étant donnez pour les deux premies termes d'une progression harmonique, si l'on demande le troisiéme $x = \frac{ab}{2ab-b}$, il faut supposer $a = 2$; $b = 3$, & substituer ces valeurs de a & de b dans la formule, & l'on trou-

vera $\frac{ab}{2a-b}=6$. Ainſi la proportion harmonique ſera $2.3.6$.

2°. Quand la proportion harmonique $a.b.x$ va en diminuant, on aura cette proportion geometrique $a.x :: a-b.b-x$. C'eſt à dire la premiere grandeur a eſt à la 3ᵉ x; comme l'excez $a-b$ de la 1ʳᵉ a ſur la 2ᵉ b, eſt à l'excez $b-x$ de la 2ᵉ b ſur la 3ᵉ x.

En prenant le produit des extrêmes & celui des moyens,
*338. on aura * $ab-ax=ax-bx$. En ajoutant $+ax$ à chacune de ces grandeurs égales, il viendra $ab=2ax-bx$. En diviſant par $2a-b$ chacune de ces grandeurs égales, on trouvera $x=\frac{ab}{2a-b}$, comme dans le 1ᵉʳ cas, & la proportion harmonique ſera $a.b.\frac{ab}{2a-b}$. Si les deux premiers termes ſont $a=6$; $b=3$; l'on trouvera que le 3ᵉ terme $x=\frac{ab}{2a-b}=\frac{6\times 3}{2\times 6-3}=2$, & la proportion harmonique ſera $6.3.2$.

3°. Si le terme x que l'on cherche eſt le terme moyen entre les deux termes donnez a & b; la proportion harmonique ſera $a.x.b$; & ſi elle va en augmentant, l'on aura cette proportion geometrique $a.b :: x-a.b-x$. Par conſequent $ab-ax=bx-ab$. En ajoutant à chaque membre la grandeur $+ax+ab$, on trouvera $2ab=bx+ax$. Diviſant chaque membre par $a+b$, on aura $\frac{2ab}{a+b}=x$. La proportion harmonique ſera donc $a.\frac{2ab}{a+b}.b$. Et en réduiſant tous les termes au même dénominateur, & prenant les ſeuls numerateurs; on aura encore la proportion harmonique $a^2+ab.2ab.ab+b^2$.

Si la proportion harmonique va en diminuant, on aura cette proportion geometrique $a.b :: a-x.x-b$. D'où l'on déduira l'égalité $ax-ab=ab-bx$. En ajoutant à chaque membre $+bx+ab$, on trouvera $ax+bx=2ab$. En diviſant chaque membre par $a+b$, on aura $x=\frac{2ab}{a+b}$; & la proportion harmonique ſera, comme ci-deſſus, $a.\frac{2ab}{a+b}.b$. Et en réduiſant tous les termes au même dénominateur; en prenant les ſeuls numerateurs, on aura encore la proportion harmonique $a^2+ab.2ab.ab+b^2$ comme ci-deſſus.

Les deux termes 1 & 2 d'une proportion harmonique étant donnez : pour trouver un moyen proportionel harmonique, il faut ſe ſervir de la formule $\frac{2ab}{a+b}$; & l'on trouvera $\frac{2ab}{a+b}=\frac{2\times 1\times 2}{1+2}$

$\frac{3\times1\times2}{1+2} = \frac{4}{3}$. La progreſſion harmonique ſera $1 . \frac{4}{3} . 2$. Si l'on veut réduire les trois termes à un même dénominateur, & prendre les ſeuls numerateurs, on aura encore la progreſſion harmonique $3 . 4 . 6$.

Les deux termes 2 & 3 étant donnez, pour trouver un moyen proportionnel harmonique, il faut ſubſtituer dans $\frac{2ab}{a+b}$ les valeurs de $a = 2$, $b = 3$, & l'on aura $\frac{2\times2\times3}{2+3} = \frac{12}{5}$, & la proportion harmonique ſera $2 . \frac{12}{5} . 3$; & multipliant tous les termes par 5, on aura encore la progreſſion harmonique 10. 12. 15.

On peut auſſi déduire de la proportion harmonique $a . b . \frac{ab}{2a-b}$ du 1er & 2e article, en multipliant tous les termes par $2a - b$, cette autre proportion harmonique, $2a^2 - ab . 2ab - b^2 . ab$.

Application de la formule a. b. $\frac{ab}{2a-b}$ *d'une progreſſion harmonique dont les deux premiers termes* a *&* b *ſont donnez, & où l'on cherche le* 3e *terme repréſenté par* $\frac{ab}{2a-b}$, *à un exemple dont on déduira une formule qui ſervira à trouver tant de termes qu'on voudra d'une progreſſion harmonique, deux termes de cette progreſſion étant donnez.*

SOIENT $\frac{c}{f+d} . \frac{c}{f+2d}$ les deux premiers termes donnez d'une proportion harmonique, pour trouver le 3e qu'on nommera x; il faut ſuppoſer $\frac{c}{f+d} = a$, $\frac{c}{f+2d} = b$, & ſubſtituer ces valeurs de a & de b dans la formule $x = \frac{ab}{2a-b}$; après avoir fait le calcul, on trouvera que le troiſiéme terme eſt $\frac{c}{f+3d}$, & que la proportion harmonique eſt $\frac{c}{f+d} . \frac{c}{f+2d} . \frac{c}{f+3d}$.

COROLLAIRE I.

414. SI l'on ſuppoſe $g = f + d$, la proportion harmonique précedente ſera $\frac{c}{g} . \frac{c}{g+d} . \frac{c}{g+2d}$. Mais par l'exemple précedent $\frac{c}{g+d} . \frac{c}{g+2d} . \frac{c}{g+3d}$ ſont une proportion harmonique, par conſequent en ſuppoſant $b = g + d$, les trois termes $\frac{c}{b+d} . \frac{c}{b+2d} . \frac{c}{b+3d}$ feront encore une proportion harmonique; & l'on voit clairement qu'en ſuppoſant de ſuite $i = b + d$; $k = i + d$; $l = k + d$, &c. on continuera de trouver de nouveaux ter-

mes à l'infini. D'où il eſt évident que $\frac{c}{b+d}$. $\frac{c}{b+2d}$. $\frac{c}{b+3d}$. $\frac{c}{b+4d}$. $\frac{c}{b+5d}$. $\frac{c}{b+6d}$, &c. ſont une progreſſion harmonique. C'eſt à dire ſi l'on forme une *ſuite* infinie de fractions, & que le numerateur de chacune ſoit une même grandeur quelconque repréſentée par c, & que les dénominateurs ſoient de ſuite les termes poſitifs d'une progreſſion arithmetique quelconque repréſentée par $\div b + d . b + 2d . b + 3d . b + 4d$. &c. la *ſuite* formée de ces fractions ſera une progreſſion harmonique.

D'où l'on voit la raiſon pourquoi on nomme la *ſuite* $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{7}$. &c. *une progreſſion harmonique*.

COROLLAIRE II.

415. LE Corollaire précedent fournit le moyen, quand on a deux grandeurs quelconques, données repréſentées par a & b, de faire une progreſſion harmonique qui ait la 1re grandeur a pour premier terme, & la 2e b pour dernier terme, & qui ait tant de termes qu'on voudra. C'eſt à dire, il donne le moyen de trouver entre les grandeurs données a & b tant de termes moyens qu'on voudra d'une progreſſion harmonique.

Car il n'y a qu'à prendre, 1°, une grandeur arbitraire qui ait pour diviſeurs exacts les grandeurs données a & b. (Cette grandeur peut être repréſentée par abc; car $\frac{abc}{a} = bc$, & $\frac{abc}{b} = ac$.) Par ce moyen on pourra réduire les grandeurs a & b en deux fractions qui leur ſeront équivalentes, & l'on aura $\frac{abc}{bc} = a$, $\frac{abc}{ac} = b$.

2°. Il ne s'agit plus que de former une progreſſion arithmetique d'autant de termes qu'on en veut donner à la progreſſion harmonique, & que le premier terme de la progreſſion arithmetique ſoit le diviſeur bc, & le dernier terme ſoit le diviſeur ac: ce que l'on enſeignera dans la ſuite.

3°. Et de faire une *ſuite* de fractions qui ayent toutes pour numerateur la grandeur abc qu'on a ſuppoſée, & qui ayent pour dénominateurs les termes de la progreſſion arithmetique que l'on a formée pris de ſuite. Cette *ſuite* de fractions (dont la 1re eſt égale à a, & la derniere à b,) ſera la progreſſion harmonique qu'il falloit former.

Par exemple, si l'on propose de former une progression harmonique de quatre termes, dont le premier terme soit $3 = a$, & le 4[e] soit $12 = b$. 1°. Il faut prendre un nombre comme $24 = abc$ qui ait 3 & 12 pour diviseurs exacts : (il est évident que $c = \frac{2}{3}$; car $abc = 3 \times 12 \times \frac{2}{3} = 24$.) & réduire par ce moyen 3 & 12 aux fractions équivalentes $\frac{abc}{bc} = \frac{24}{8} = 3 = a$, $\frac{abc}{ac} = \frac{24}{2} = 12 = b$.

2°. Il faut former une progression arithmetique de 4 termes, dont le 1[er] soit le diviseur 8, & le 4[e] soit le diviseur 2. On verra *dans les articles* 497 & 499 le moyen de former cette progression qui est ÷ 8. 6. 4. 2.

3°. Il faut écrire $\frac{24}{8} = 3$. $\frac{24}{6} = 4$. $\frac{24}{4} = 6$. $\frac{24}{2} = 12$. C'est la progression harmonique qu'il falloit former. Car il est évident par le 1[er] Corollaire * que ces quatre termes, dont le *414. premier & le dernier sont les grandeurs données 3 & 12, sont une progression harmonique.

DE'FINITION.

416. TROIS grandeurs comme 3. 5. 6 font *une proportion contr'harmonique*, lorsque la 3[e] 6 est à la 1[re] 3; comme la difference 2 de la 1[re] 3 à la 2[e] 5 est à la difference 1 de la 2[e] 5 à la 3[e] 6. C'est à dire, on dit que les trois grandeurs 3. 5. 6 font une proportion contr'harmonique, parceque 6. 3 :: 5 — 3. 6 — 5. Et si la proportion contr'harmonique s'étend à plus de trois termes, on la nomme *une progression contr'harmonique*.

Mais comme elle n'est pas d'usage dans les Mathematiques, il suffit d'en avoir donné une idée, & il est inutile de s'y arrêter davantage.

SECTION VI.

Où l'on explique le calcul des incommenſurables ſimples, ou qui n'ont qu'un ſigne radical.

Suppoſitions que l'on a démontrées dans les Livres précedens.

1.

417. LA racine d'une puiſſance numerique imparfaite (laquelle puiſſance numerique eſt un nombre entier ou une fraction) * eſt une grandeur incommenſurable. Par exemple, la racine 2e de 3 eſt une grandeur incommenſurable; la racine 3e de $\frac{1}{2}$ eſt une grandeur incommenſurable, & ainſi des autres.

* 309.

Cela eſt cauſe qu'on exprime les grandeurs incommenſurables par le *ſigne radical* $\sqrt{}$, en écrivant au deſſus du ſigne l'expoſant qui marque ſi c'eſt une racine 2e, 3e, &c. Par exemple $\sqrt[2]{3}$ exprime la racine 2e de 3; $\sqrt[3]{5}$ marque la racine 3e de 5; $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$ marque la racine 5e de la puiſſance imparfaite $\frac{2}{3}$. Quand on veut marquer une incommenſurable d'une maniere generale, on ſe ſert d'une lettre pour l'expoſant du ſigne radical. Par exemple $\sqrt[n]{a}$ marque la racine quelconque de la puiſſance a. Quand il n'y a point d'expoſant ſur le ſigne $\sqrt{}$, on y ſous entend l'expoſant 2. Ainſi $\sqrt{a}$ eſt la même choſe que $\sqrt[2]{a}$. On exprime * encore les incommenſurables comme des puiſſances, ſans ſe ſervir du ſigne radical $\sqrt{}$, en écrivant au haut de la grandeur vers la droite la fraction qui en eſt l'expoſant. Ainſi $3^{\frac{1}{2}}$ eſt la même choſe que $\sqrt[2]{3}$. De même $a^{\frac{1}{3}}$ eſt la même que $\sqrt[3]{a}$. En general $a^{\frac{1}{n}}$ eſt la même choſe que $\sqrt[n]{a}$; & $a^{\frac{m}{n}}$ eſt la même choſe $\sqrt[n]{a^m}$.

* 153.

2.

418. La racine, dont l'expoſant eſt un nombre pair, d'une grandeur négative, comme $\sqrt[2]{-ab}$, $\sqrt[4]{-a^3b}$, &c * qui eſt une grandeur impoſſible qu'on nomme (à cauſe de cela) *grandeur imaginaire*, eſt auſſi régardée comme une grandeur incommenſurable.

* 100.

3.

419. Il y a enfin parmi les grandeurs littèrales des puiſſances parfaites & imparfaites; par exemple a^3 eſt une 3e puiſſance parfaite, dont la racine 3e eſt a; mais a^2b étant conſiderée comme une puiſſance 3e, eſt une puiſſance imparfaite; car il n'y a pas de grandeur litterale dont le quarré étant multiplié par cette grandeur même donne pour produit a^2b.

Les racines des puiſſances litterales imparfaites ſont auſſi regardées comme des grandeurs incommenſurables. Par exemple $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[5]{a^3}$, &c. ſont des incommenſurables; & en general $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a^{n-1}b}$ ſont des incommenſurables.

4.

420. Pour élever une incommenſurable comme $\sqrt[2]{ab}$ à la puiſſance dont l'expoſant eſt celui du ſigne $\surd$, il ne faut qu'effacer $\surd$, & la grandeur qui étoit précedée du ſigne $\surd$, ſans autre changement, ſera la puiſſance qu'on demande. Ainſi pour élever $\sqrt[2]{ab}$ à la 2e puiſſance, il ne faut qu'écrire ab, de même la 3e puiſſance de $\sqrt[3]{a}$ eſt a. La 2e puiſſance de $\sqrt[2]{-ab}$ eſt $-ab$; la puiſſance n de $\sqrt[n]{a}$ eſt a; la puiſſance n de $\sqrt[n]{a^{n-1}b}$ eſt $a^{n-1}b$; & ainſi des autres. Cela eſt évident de ſoi-même.

5.

421. Lorſque la grandeur litterale précedée du ſigne radical eſt élevée à une puiſſance qui a le même expoſant que la racine, la grandeur incommenſurable eſt égale à la grandeur litterale qui demeure en effaçant tant le ſigne radical que l'expoſant de la puiſſance litterale. C'eſt à dire $\sqrt[2]{a^2} = a$; $\sqrt[3]{a^3} = a$; en general $\sqrt[n]{a^n} = a$; $\sqrt[n]{a^2b^n} = a^2b$. Cela eſt évident de ſoi-même.

REMARQUE.

APRE'S avoir donné des expreſſions aux grandeurs incommenſurables, on les a réduites au calcul; c'eſt à dire, on a trouvé le moyen de faire les mêmes operations ſur les incommenſurables que l'on fait ſur les grandeurs commenſurables entieres & rompues, ſçavoir l'addition, la ſouſtra-

ction, la multiplication, &c. & même de les faire entrer dans le calcul des grandeurs commensurables, en ajoutant, soustrayant, multipliant & divisant les grandeurs commensurables & incommensurables mêlées les unes avec les autres; C'est ce qu'on va expliquer.

Le calcul des grandeurs incommensurables.

DÉFINITIONS.

1.

422. DANS les grandeurs incommensurables on dit que la grandeur devant laquelle est le signe radical, *est sous le signe*. Ainsi dans $\sqrt[2]{3}$, $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a^2 + ab + b^2}$, &c. les grandeurs 3, 2, a, $a^2 + ab + b^2$ sont sous le signe.

Quand la grandeur qui est sous le signe est complexe, on tire une ligne depuis le signe radical qui couvre toute la grandeur complexe qui est sous le signe. Ainsi dans $\sqrt[3]{a^2 + ab + b^2}$ la grandeur complexe $a^2 + ab + b^2$ que couvre la ligne, est sous le signe $\sqrt[3]{}$.

2.

423. Pour ajouter des grandeurs incommensurables tant entr'elles qu'avec des commensurables, on les joint ensemble sans changer leurs signes + ou —, en écrivant les commensurables les premieres à gauche; & pour les retrancher les unes des autres, on change le signe de celles qu'on doit retrancher, & ensuite on les joint avec leur signe changé aux grandeurs dont on les veut retrancher. Ainsi pour ajouter $\sqrt[2]{ab}$ à a, on écrit $a + \sqrt[2]{ab}$. Pour ajouter $\sqrt[2]{a}$ à $\sqrt[2]{b}$, on écrit $\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$. Pour ôter $+ \sqrt[2]{b}$ de $\sqrt[2]{a}$, on écrit $\sqrt[2]{a} - \sqrt[2]{b}$. Pour retrancher de $+ a$ l'incommensurable $\sqrt[2]{b}$, on écrit $a - \sqrt[2]{b}$. Il en est de même des autres.

3.

424. Pour multiplier une grandeur incommensurable par une grandeur commensurable, on écrit la grandeur commensurable la premiere, & on lui joint l'incommensurable, ob-
* 95. servant * la regle des signes + & —.

Pour multiplier a par $\sqrt[2]{ab}$, ou $\sqrt[2]{ab}$ par a, on écrit $a \sqrt[2]{ab}$.

Pour multiplier $\sqrt[3]{a^2 + ab + b^2}$ par $a + b$, on écrit $\overline{a + b}\sqrt[3]{a^2 + ab + b^2}$. On tire une ligne sur la grandeur complexe $\overline{a + b}$ pour marquer que cette grandeur complexe est multipliée par l'incommensurable.

De même $- a\sqrt[m]{ax}$ est produit de $+ \sqrt[m]{ax}$ par $- a$, ou de $+ a$ par $- \sqrt[m]{ax}$. $+ a\sqrt[m]{ax}$ est le produit de $- \sqrt[m]{ax}$ par $- a$. $+ a\sqrt[m]{ax}$ est aussi le produit de $+ a$ multiplié par $+ \sqrt[m]{ax}$.

4.

425. Dans un produit d'une incommensurable par une commensurable, comme dans $a\sqrt[m]{ax}$, on dit que la grandeur a *est hors du signe*, & que la grandeur ax est sous le signe.

Quand il y a une grandeur complexe sous le signe, on l'ordonne par rapport à une lettre comme dans les produits : s'il y a une inconnue, c'est cette lettre inconnue qu'on prend pour ordonner la grandeur complexe, & ordinairement on écrit les termes qui contiennent les plus hautes puissances de l'inconnue les plus à droite de cette maniere $ax\sqrt[m]{ab - ax + cx^2 + ex^3}$.

5.

426. Pour diviser une grandeur commensurable par une incommensurable, ou une incommensurable par une commensurable, on écrit celle qui est le dividende sur une ligne, & celle qui est le diviseur au dessous, & cette fraction est le quotient auquel on donne le signe + ou —, suivant la regle * des signes de la division. * 139.

Par exemple pour diviser $+ a$ par $- \sqrt[3]{ab}$, on écrit pour quotient $- \frac{a}{\sqrt[3]{ab}}$. Le quotient de $- \sqrt[3]{ab}$ par $+ a$ est $- \frac{\sqrt[3]{ab}}{a}$: on l'écrit encore de cette sorte $- \frac{1}{a}\sqrt[3]{ab}$, parceque $- \sqrt[3]{ab} = - 1\sqrt[3]{ab}$. Pour diviser $- ax\sqrt[m]{a + bx}$ par $- b$, on écrit pour quotient $+ \frac{ax\sqrt[m]{a + bx}}{b}$, ou bien $+ \frac{ax}{b}\sqrt[m]{a + bx}$.

REMARQUE.

On a mis ce premier calcul des incommensurables en définitions, parcequ'il ne consiste qu'en des signes arbitraires qu'on a déterminez à ce calcul; & il est pourtant d'un très

grand usage dans les Mathematiques. Il n'est pas nécessaire d'avertir qu'on marque aussi dans les incommensurables, comme dans les autres grandeurs, la multiplication par le signe ×, comme $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$, & la division de deux incommensurables, en les écrivant en fraction, le dividende sur une ligne, & le diviseur au dessous $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

La multiplication des incommensurables lorsque chacun des multiplicateurs ne contient qu'un seul signe radical, & que l'exposant de chaque signe radical est le même.

PROBLÊME I.

427. *MULTIPLIER deux ou plusieurs incommensurables, dont chacune n'a qu'un seul signe radical, lequel signe a dans chacune le même exposant.*

Regle ou operation. Il faut prendre le produit des grandeurs qui sont sous chaque signe radical, & écrire au devant le signe radical avec le même exposant, & ce sera le produit qu'on cherche. On observera la regle * des signes + & — de la multiplication.

* 95.

EXEMPLES.

POUR multiplier $+\sqrt[3]{a}$ par $+\sqrt[3]{b}$, on écrira pour produit $+\sqrt[3]{ab}$.

Pour multiplier $-\sqrt[3]{a-b}$ par $+\sqrt[3]{a+b}$, on écrira pour produit $-\sqrt[3]{a^2-b^2}$.

Pour multiplier $+\sqrt[3]{a^2}$ par $-\sqrt[3]{a}$, on écrira pour produit

* 421. $-\sqrt[3]{a^3} = * - a$.

Pour multiplier $\sqrt{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt{\frac{4}{5}}$, il faut prendre le produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{4}{5}$ qui est $\frac{12}{10}$, & écrire $\sqrt{}$ au devant, & le produit qu'on cherche est $\sqrt{\frac{12}{10}}$.

Pour multiplier $+\sqrt[5]{a}$, $-\sqrt[5]{b}$, $-\sqrt[5]{c}$ les unes par les autres, il faut écrire pour produit $+\sqrt[5]{abc}$.

Démonstration du Problême. $\sqrt[5]{a}$ & $\sqrt[5]{b}$ peuvent représenter les incommensurables qu'il faut multiplier l'une par l'autre;

* 72. on va démontrer que leur produit est $\sqrt[5]{ab}$. Car * 1. $a :: b.$ $ab.$

ab. Donc * $\sqrt[n]{1} = 1 . \sqrt[n]{a} :: \sqrt[n]{b} . \sqrt[n]{ab}$. Ainsi * $\sqrt[n]{ab}$ eſt le produit de $\sqrt[n]{a}$ par $\sqrt[n]{b}$. *Ce qu'il falloit démontrer.* * 360. * 72.

COROLLAIRE I.

428. ON multiplie auſſi une incommenſurable par une grandeur commenſurable à la maniere des incommenſurables, en élevant la derniere à la puiſſance dont l'expoſant eſt celui du ſigne de l'incommenſurable; ce qui donne une expreſſion incommenſurable à la grandeur commenſurable ſans en changer la valeur. Par exemple, pour multiplier $\sqrt[2]{a}$ par b, on change b en $\sqrt[2]{b^2} = b$, puis on forme le produit $\sqrt[2]{ab^2} = \sqrt[2]{a} \times \sqrt[2]{b^2} =$ * $b\sqrt[2]{a}$. * 421.

La démonſtration eſt la même. Car $1 . b^2 :: a . ab^2$. Donc $\sqrt[2]{1} = 1 . \sqrt[2]{b^2} = b :: \sqrt[2]{a} . \sqrt[2]{ab^2} =$ * $b\sqrt[2]{a}$. * *Ce qu'il falloit, &c.* * 421. * 72.

Pour multiplier $\sqrt[n]{a}$ par b, on changera b en $\sqrt[n]{b^n} =$ * b, * 421.
& on formera enſuite le produit $\sqrt[n]{ab^n} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b^n} =$ * $b\sqrt[n]{a}$. * 421.
Car $1 . b^n :: a . ab^n$. Donc * $\sqrt[n]{1} = 1 . \sqrt[n]{b^n} = b :: \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{ab^n}$ * 360.
$=$ * $b\sqrt[n]{a}$. * 421.

COROLLAIRE II.

Qui contient la Methode de reduire une incommenſurable à l'expreſſion la plus ſimple.

429. D'où l'on voit, 1°. que quand la grandeur qui eſt ſous le ſigne $\sqrt[n]{ab^n}$ eſt un produit ab^n formé de deux multiplicateurs, dont l'un eſt une puiſſance parfaite b^n qui a pour expoſant n, c'eſt à dire l'expoſant du ſigne radical, & dont l'autre multiplicateur a eſt une puiſſance imparfaite; on peut changer cette expreſſion en cette autre $b\sqrt[n]{a}$, en laiſſant ſous le ſigne $\surd$ la ſeule puiſſance imparfaite a, & écrivant au-devant du ſigne $\surd$ la racine b de la puiſſance parfaite b^n. Car $\sqrt[n]{ab^n} =$ * * 427.
$\sqrt[n]{b^n} \times \sqrt[n]{a} =$ * $b\sqrt[n]{a}$. * 421.

Cette operation contient une diviſion & une multiplication. Pour le voir clairement on remarquera, 1°. que $\sqrt[n]{ab^n} = 1\sqrt[n]{ab^n} = 1\frac{\sqrt[n]{ab^n}}{1}$. 2°. Que pour reduire $1\sqrt[n]{ab^n}$ à $b\sqrt[n]{a}$, on diviſe la grandeur $1\frac{\sqrt[n]{ab^n}}{1} = 1\frac{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b^n}}{1}$ par $\sqrt[n]{b^n}$; ce qui donne $\frac{1\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b^n}}{1\sqrt[n]{b^n}} =$ * $\frac{1\sqrt[n]{a}}{1} = 1\sqrt[n]{a}$: & qu'ainſi cette diviſion ſe fait * 109.

en effaçant simplement la grandeur b^n dans $1\sqrt[n]{ab^n}$. 3° Mais comme il faut que la grandeur à laquelle on reduit $1\sqrt[n]{ab^n}$ lui soit égale, & qu'elle ait precisément la même valeur que $1\sqrt[n]{ab^n}$; il faut la multiplier par la même grandeur $\sqrt[n]{b^n}$ par laquelle on l'a divisée, cela se fait en écrivant b audevant de $\sqrt[n]{a}$, de cette maniere $b\sqrt[n]{a}$; car $b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ab^n}$. On peut encore remarquer que $1\sqrt[n]{ab^n}$ a deux parties multipliées l'une par l'autre, l'une sous le signe qui est $\sqrt[n]{ab^n}$, l'autre hors du signe qui est ici l'unité seule 1. En reduisant $1\sqrt[n]{ab^n}$ à $b\sqrt[n]{a}$, on divise la partie qui est sous le signe par $\sqrt[n]{b^n}$ ce qui se fait en effaçant b^n & écrivant $1\sqrt[n]{a}$; & on multiplie en même temps l'autre partie (1) qui est hors du signe, par la même grandeur $\sqrt[n]{b^n} = b$; ce qui se fait en écrivant b audevant du signe, & $1\sqrt[n]{ab^n}$ est reduite à $b\sqrt[n]{a}$ qui est égale à $1\sqrt[n]{ab^n}$.

Cette maniere de retirer hors du signe dans $\sqrt[n]{ab^n}$ la grandeur commensurable $b = \sqrt[n]{b^n}$ pour former l'expression $b\sqrt[n]{a}$, s'appelle *reduire une incommensurable à sa plus simple expression*. On dit aussi que c'est *retirer hors du signe une grandeur* b^n *qui est sous le signe*.

COROLLAIRE III.

430. 2°. QUAND une incommensurable contient une commensurable hors du signe comme $b\sqrt[n]{a}$, on peut sans en changer la valeur, faire passer la grandeur commensurable b sous le signe, en élevant b à la puissance n dont l'exposant est celui du signe, & multipliant ensuite la grandeur a qui est sous le signe par cette puissance b^n; & l'on aura $b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ab^n}$.

Application de ces Corollaires à des Exemples.

POUR reduire $\sqrt{18}$ à sa plus simple expression, on divisera 18 par 9 qui est le plus grand quarré qui divise exactement 18, & on écrira 3 racine 2ᵉ de 9 devant le signe radical, & 2 qui est le quotient de 18 divisé par 9 sous le signe radical, & l'expression la plus simple de $\sqrt{18}$ sera $3\sqrt{2}$.

On reduira de même $\sqrt[3]{54}$ à son expression la plus simple $3\sqrt[3]{2}$, en divisant 54 par la plus grande 3ᵉ puissance parfaite 27

qui ſoit un diviſeur de 54, & écrivant le quotient 2 de 54 diviſé par 27 ſous le ſigne, & la racine 3e de 3 de 27 hors du ſigne.

On réduira $\sqrt[3]{\frac{54}{32}}$ à ſa plus ſimple expreſſion $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{4}}$, en reduiſant le numerateur $\sqrt[3]{54}$ à ſa plus ſimple expreſſion $3\sqrt[3]{2}$, & de même le dénominateur à ſa plus ſimple expreſſion $2\sqrt[3]{4}$, & écrivant enſuite ces plus ſimples expreſſions en fraction $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{4}}$, ou bien $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{4}}$; & à cauſe de $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ on peut encore écrire $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{\frac{54}{32}}$.

On reduira $\sqrt[3]{a^5-a^3b^2}$ à la plus ſimple expreſſion $a\sqrt[3]{a^2-b^2}$, en diviſant la grandeur complexe $a^5-a^3b^2$ par a^3 qui eſt la plus grande 3e puiſſance parfaite qui en ſoit un diviſeur, & écrivant le quotient a^2-b^2 ſous le ſigne, & la racine 3e a de a^3 hors du ſigne.

On reduira $\sqrt[3]{x^6-5ax^5+9a^2x^4-7a^3x^3+2a^4x^2}$ à ſa plus ſimple expreſſion $\overline{x-a}\sqrt[3]{x^3-2ax^2}$, en diviſant la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne par $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$ qui eſt la plus grande 3e puiſſance parfaite qui la diviſe exactement, & écrivant le quotient x^3-2ax^2 ſous le ſigne, & $x-a$ qui eſt la racine 3e de $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$ hors du ſigne avec une ligne qui couvre $x-a$, pour marquer que l'incommenſurable eſt multipliée par la grandeur complexe entiere $x-a$.

Pour reduire la grandeur incommenſurable $\sqrt[3]{x^3+\frac{4mpx^3}{a^2}}$ à ſon expreſſion la plus ſimple $\frac{x}{a}\sqrt[3]{a^2+4mp}$, 1°. on reduira tous les termes de la grandeur qui eſt ſous le ſigne à un même dénominateur, & l'on aura $\sqrt[3]{\frac{a^2x^3+4mpx^3}{a^2}}$. 2°. On reduira le numerateur à ſon expreſſion la plus ſimple $x\sqrt[3]{a^2+4pm}$, & le dénominateur $\sqrt[3]{a^2}$ a ſon expreſſion la plus ſimple a; & l'on aura $\frac{x\sqrt[3]{a^2+4mp}}{a}$, ou bien $\frac{x}{a}\sqrt[3]{a^2+4mp}$.

Pour reduire $\sqrt[3]{\frac{a^6m^3}{p^3x^3}+\frac{4a^4m^3}{px^3}}$ à ſa plus ſimple expreſſion $\frac{am}{px}\sqrt[3]{a^4+4mp}$, 1°. on reduira les termes de la grandeur qui eſt ſous le ſigne au même dénominateur, & l'on aura $\sqrt[3]{\frac{a^6m^3+4a^4m^3p}{p^3x^3}}$. 2°. On reduira le numerateur à ſa plus ſimple

expression $am\sqrt[3]{a^2 + 4mp}$, & le dénominateur $\sqrt[3]{p^3x^3}$ à px, & l'on aura $\frac{am}{px}\sqrt[3]{a^2 + 4mp}$.

Ces exemples suffisent pour faire concevoir la maniere de reduire une incommensurable à sa plus simple expression, quand la grandeur qui est sous le signe a pour diviseur une puissance parfaite dont l'exposant est le même que celui du signe radical; car quand il n'y a pas de tel diviseur, on ne peut pas le reduire à une plus simple expression, du moins sans une préparation qu'on donnera dans la suite, par laquelle on met sous le signe un diviseur qui est une puissance parfaite du degré de l'exposant du signe radical, sans changer la valeur de l'incommensurable.

Pour reduire sous le signe dans $3\sqrt[2]{2}$, la grandeur 3, il faut élever 3 à la 2e puissance, & multiplier par cette puissance 9 la grandeur 2 qui est sous le signe, & écrire le produit 18 sous le signe, & l'on aura $\sqrt[2]{18} = 3\sqrt[2]{2}$.

On reduira de même $3\sqrt[3]{2}$ à $\sqrt[3]{54}$, en écrivant sous le signe le produit 54 de 27 (qui est la 3e puissance de 3) par 2.

On reduira de même $a^2\sqrt[3]{a^3 - b^3}$ à $\sqrt[3]{a^9 - a^6b^3}$. Il en est de même des autres.

COROLLAIRE IV.

431. POUR multiplier deux ou plusieurs incommensurables qui ont toutes, ou quelques-unes, une grandeur commensurable hors du signe, & qui ont le même exposant du signe radical, comme $a\sqrt[n]{b}$ par $a\sqrt[n]{c}$; il faut écrire le produit des commensurables hors du signe, & celui des incommensurables sous le signe. Ainsi le produit de $a\sqrt[n]{b} \times a\sqrt[n]{c}$ est $a^2\sqrt[n]{bc}$.

On peut aussi, si l'on veut, reduire dans chaque multiplicateur la grandeur commensurable sous le signe, & faire ensuite la multiplication. Par exemple on reduira $a\sqrt[n]{b}$ à $\sqrt[n]{a^nb}$, & $a\sqrt[n]{c}$ à $\sqrt[n]{a^nc}$, & l'on formera ensuite le produit $\sqrt[n]{a^{2n}bc}$, qui se reduit à $a^2\sqrt[n]{bc}$.

Démonstration. * $1 . a^nb :: a^nc . a^{2n}bc$. Donc * $\sqrt[n]{1} = 1$.
*72 *360. *72. $\sqrt[n]{a^nb} = a\sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{a^nc} = a\sqrt[n]{c} . \sqrt[n]{a^{2n}bc} = a^2\sqrt[n]{bc}$. Ainsi * $a^2\sqrt[n]{bc}$ & $\sqrt[n]{a^{2n}bc}$ sont chacune le produit de $a\sqrt[n]{b}$ par $a\sqrt[n]{c}$.

De même $6\sqrt[2]{10}$ est le produit de $2\sqrt[2]{5}$ par $3\sqrt[2]{2}$.

COROLLAIRE V.

432. UNE grandeur commenſurable a peut ſe reduire en un produit qui aura pour multiplicateurs la racine de cette grandeur repetée autant de fois que l'expoſant du ſigne radical contiendra d'unitez. Ainſi $a = \sqrt[2]{a} \times \sqrt[2]{a}$, $a = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a}$, $a = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a}$. Il en eſt de même des autres. Cela eſt évident par la formation des puiſſances. * *143.

REMARQUE.

433. CETTE reduction d'une grandeur commenſurable en un produit équivalent exprimé par la racine de cette grandeur, eſt d'uſage en pluſieurs calculs. L'on a, par exemple, $\frac{\overline{a+1} \times \sqrt[2]{c+1}}{\sqrt[2]{a+1} \times \sqrt[2]{b+1}}$. En changeant $a+1$ en $\sqrt[2]{a+1} \times \sqrt[2]{a+1}$, on reduit cette fraction à $\frac{\sqrt[2]{a+1} \times \sqrt[2]{a+1} \times \sqrt{c+1}}{\sqrt[2]{a+1} \times \sqrt[2]{b+1}}$, laquelle en effaçant les grandeurs communes au numerateur & au dénominateur, ſe reduit à $\frac{\sqrt[2]{a+1} \times \sqrt[2]{c+1}}{\sqrt[2]{b+1}}$.

COROLLAIRE VI.

Où l'on explique la multiplication des racines impoſſibles ou imaginaires.

434. QUAND une grandeur negative (c'eſt à dire précedée du ſigne —) eſt regardée comme une puiſſance dont l'expoſant eſt un nombre pair, par exemple une 2ᵉ puiſſance, une 4ᵉ puiſſance, une 6ᵉ puiſſance, &c. ſa racine lineaire eſt une grandeur impoſſible * qu'on nomme imaginaire. Ainſi $\sqrt[2]{-2}$, *100.
$\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[6]{-2}$, $\sqrt[8]{-2}$, &c. ſont des racines imaginaires.

Le calcul de ces racines imaginaires ſert dans la reſolution de beaucoup de Problêmes. Voici ce qu'il faut ſur tout obſer-
435. ver dans ce calcul. 1°. Une racine imaginaire étant élevée à la puiſſance dont l'expoſant eſt le même que l'expoſant du ſigne radical, rétablit la grandeur réelle dont elle étoit la racine. Ainſi $\sqrt[2]{-a} \times \sqrt[2]{-a} = \sqrt{-a^2} = -a$; $\sqrt[4]{-a}$ étant élevée à la 4ᵉ puiſſance, donne la grandeur réelle negative $-a$. Il en eſt de même des autres.

436. 2°. Il y a deux signes $+$ ou $-$ dans chaque imaginaire; l'un, qui est sous le signe radical, est toujours $-$; l'autre, qui est audevant du signe radical, est ou $+$ ou $-$.

Quand on multiplie une grandeur imaginaire par une grandeur *réelle*, comme $-\sqrt[2]{-3}$ par $+2$, ou par $+\sqrt[2]{2}$, il ne faut avoir égard qu'au signe qui est au devant du signe
*95. radical, & suivre la regle * des signes $+$ & $-$ de la multiplication. Ainsi $+2 \times -\sqrt[2]{-3} = -2\sqrt[2]{-3}$. De même $+\sqrt[2]{2} \times -\sqrt[2]{-3} = -\sqrt[2]{2} \times \sqrt[2]{-3}$, ou simplement $-\sqrt[2]{2}\sqrt[2]{-3}$.

Mais quand on multiplie une imaginaire par elle-même,
*435. & que cette multiplication * rétablit la grandeur réelle negative, (comme quand on multiplie $+\sqrt[2]{-3}$ par $-\sqrt[2]{-3}$, ce qui rétablit la grandeur réelle -3) il faut avoir égard, à deux signes; celui qui précede immediatement la gran-
*434. deur réelle -3 rétablie * est toujours $-$; l'autre, qui précede ce signe negatif $-$, vient de la multiplication des signes qui précedoient les signes radicaux dans les imaginai-
*95. res qu'on a multipliées: ce second signe suit * la regle des signes de la multiplication. Ainsi ce signe est $+$ quand les signes qui précedent les signes radicaux sont tous deux $+$, ou tous deux $-$, & ce signe est $-$ quand l'un des signes qui précedent les signes radicaux est $+$ & l'autre $-$.

D'où l'on voit que dans ce cas où la multiplication rétablit la grandeur réelle negative; cette grandeur réelle rétablie est d'abord précedée de deux signes; celui qui la tou-
*95. che est $-$, & l'autre est $+$ ou $-$, selon * la regle des signes $+$ & $-$. Ainsi $+\sqrt[2]{-3}$ par $-\sqrt[2]{-3} = --3$, $+\sqrt[2]{-3}$ par $+\sqrt[2]{-3} = +-3$, enfin $-\sqrt[2]{-3}$ par $-\sqrt[2]{-3} = +-3$.

*30 & 31. Mais $--3 = * +3$, & $+-3 = -3$. C'est ce qui donne cette regle particuliere à la multiplication des imaginaires, dont le signe radical a pour exposant 2, parceque ce sont presque les seules imaginaires qui se trouvent dans l'usage ordinaire, & on peut aisément étendre la regle aux autres imaginaires.

Regle pour les signes dans la multiplication des imaginaires qui ont $\sqrt[3]{}$.

437. QUAND on multiplie deux imaginaires, qui ont la même grandeur negative sous $\sqrt[3]{}$, l'une par l'autre; la grandeur réelle qui en vient est précedée du signe + quand les signes qui précedent $\sqrt[3]{}$ sont differens, l'un + & l'autre —. Mais quand les signes qui précedent $\sqrt[3]{}$ sont tous deux + ou tous deux —, la grandeur réelle qui vient de la multiplication est précedée du signe —. Par exemple $+\sqrt[3]{-a} \times -\sqrt[3]{-a} = +a$, $-\sqrt[3]{-a} \times +\sqrt[3]{-a} = +a$, $+\sqrt[3]{-a} \times +\sqrt[3]{-a} = -a$, $-\sqrt[3]{-a} \times -\sqrt[3]{-a} = -a$.

Ces choses supposées, la multiplication des racines imaginaires se fait comme celles des autres racines, en observant ce qui est de particulier aux imaginaires.

Exemples de la multiplication des racines imaginaires.

438. POUR multiplier $+a\sqrt[3]{-b}$ par $+c\sqrt[3]{-b}$, on trouvera d'abord $+ac \times -b$, qu'on reduira à $-abc$.

On trouvera de même que $-a\sqrt[3]{-b} \times -c\sqrt[3]{-b} = +ac \times -b = -abc$, & que $+a\sqrt[3]{-b} \times -c\sqrt[3]{-b} = -ac \times -b = +abc$.

Le produit de -3 par $\sqrt[3]{-6} = -3\sqrt[3]{-6}$.

Pour multiplier $-\sqrt[3]{-b}$ par $+a\sqrt[3]{a}$; il faut écrire $-a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{-b}}$, ou bien pour éviter la confusion, $-a\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{-b}$.

REMARQUE.

439. DANS la multiplication d'une racine imaginaire $\sqrt[3]{-b}$ par une racine réelle $\sqrt[3]{a}$, il vaut mieux, ce semble, écrire pour le produit $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{-b}$, que $\sqrt[3]{-ab}$, afin de distinguer toujours dans le calcul la racine imaginaire $\sqrt[3]{-b}$ de la racine réelle $\sqrt[3]{a}$ par laquelle elle est multipliée.

La raison de cette distinction est que la multiplication des imaginaires ne rétablit la grandeur réelle negative dont la racine est imaginaire, que dans le seul cas où la racine imaginaire est élevée à la puissance dont l'exposant est le même

que l'exposant du signe radical ; par exemple, la multiplication de $\sqrt[2]{-b}$ ne rétablira la grandeur réelle $-b$ qu'en élevant $\sqrt[2]{-b}$ à la 2e puissance, ce qui arrive en multipliant $\sqrt[2]{-b}$ par $\sqrt[2]{-b}$. Le produit $\sqrt[2]{-b^2}$ est alors égal à $-b$. Mais si en multipliant $\sqrt[2]{-b}$ par $\sqrt[2]{b}$, on écrivoit aussi pour produit $\sqrt[2]{-b^2}$; dans ce cas $\sqrt[2]{-b^2}$ ne feroit pas la grandeur réelle negative $-b$ dont $\sqrt[2]{-b}$ est la racine imaginaire; (& si l'on retiroit la racine b hors du signe , il faudroit laisser sous le signe $\sqrt[2]{}$ l'imaginaire $\sqrt{-1}$, de cette maniere $b\sqrt[2]{-1} = \sqrt[2]{-b^2}$, pour exprimer que dans la multiplication d'une imaginaire $\sqrt[2]{-b}$ par une réelle $\sqrt[2]{b}$, le produit $\sqrt[2]{-b^2}$ ou $b\sqrt[2]{-1}$ contient toujours une racine imaginaire.)

Pour éviter cette confusion de deux expressions semblables de deux choses si differentes, il me semble qu'il vaut mieux écrire $\sqrt[2]{b} \times \sqrt[2]{-b}$, que $\sqrt[2]{-b^2}$.

Quand on multiplie aussi une imaginaire par une imaginaire differente, comme $\sqrt[2]{-a}$ par $\sqrt[2]{-b}$, il faut de même écrire pour le produit $\sqrt[2]{-a} \times \sqrt[2]{-b}$, afin de distinguer toujours chacune des imaginaires differentes dans le produit.

On peut aussi remarquer que quand la grandeur qui est précedée du signe $-$ sous le signe $\sqrt[2]{}$, est un quarré parfait comme dans $\sqrt[2]{-b^2}$, qui ne vient pas du produit $\sqrt[2]{-b} \times \sqrt[2]{-b}$, duquel naîtroit la grandeur réelle $-b$, mais qui vient de ce qu'on a tiré la racine 2e du quarré negatif $-b^2$ en écrivant $\sqrt[2]{-b^2}$; il paroît mieux de conserver cette expression qui distingue la grandeur imaginaire, que de retirer hors du signe $\sqrt{}$, la racine de ce quarré parfait, de cette maniere $b\sqrt[2]{-1}$. Et si l'on se servoit dans la pratique de cette expression $b\sqrt[2]{-1}$, au lieu de $\sqrt[2]{-b^2}$, il faudroit prendre garde de ne la pas confondre avec les grandeurs réelles.

La

La Division des incommensurables, lorsque le dividende & le diviseur ne contiennent chacun qu'un signe radical, & que l'exposant de chaque signe radical est le même.

PROBLÊME II.

440. *FAIRE la division de deux grandeurs incommensurables, ou dont au moins l'une est incommensurable, lorsque chaque incommensurable n'a qu'un signe radical, & que l'exposant de chaque signe radical est le même.*

Regle ou Operation. Il faut diviser la grandeur qui est sous le signe dans le dividende par la grandeur qui est sous le signe dans le diviseur, & écrire le signe radical avec le même exposant devant le quotient, & ce sera le quotient qu'on cherche. On suivra * la regle des signes + & — de la division. *139.

EXEMPLES.

POUR diviser $+\sqrt[3]{a^2b}$ par $+\sqrt[3]{ab}$, on divisera a^2b par ab, ce qui donnera le quotient a, on écrira le signe $\sqrt[3]{}$ devant le quotient, & l'on aura $+\sqrt[3]{a}$ pour le quotient.

Pour diviser $+\sqrt[3]{b^2}$ par $-\sqrt[3]{bc}$, on écrira pour quotient $-\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$, ou, si l'on veut, $-\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c}}$.

Pour diviser $-\sqrt[3]{a}$ par $-\sqrt[3]{b}$, on écrira pour quotient $+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

Pour diviser $-\sqrt[m]{a}$ par $+\sqrt[m]{b}$, on écrira pour quotient $-\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$.

Pour diviser $\sqrt[3]{a^2-b^2}$ par $\sqrt[3]{a-b}$, on divisera a^2-b^2 par $a-b$, & on écrira pour quotient $\sqrt[3]{a+b}$.

Pour diviser $\sqrt[m]{b}$ par $\sqrt[m]{b}$, il faut écrire pour quotient $\sqrt[m]{1} = 1$.

On divisera de même $+\sqrt[3]{12}$ par $-\sqrt[3]{4}$, en écrivant pour quotient $-\sqrt[3]{3}$.

On trouvera de même que le quotient de $-\sqrt[3]{\frac{1}{24}}$ par $+\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, est $-\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$, en réduisant * $-\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ à sa plus simple expression. *429.

Pour trouver le quotient de $\sqrt[m]{a^q}$ divisé par $\sqrt[m]{\frac{a^p}{b^p}}$, il faut diviser a^q par $\frac{a^p}{b^p}$, ce qui donnera $\frac{a^q b^p}{a^p}$, & écrire $\sqrt[m]{\frac{a^q b^p}{a^p}}$

* 153. qu'on pourra aussi écrire de cette sorte * $\overline{a^{q-p}\,b^p}^{\frac{1}{m}}$.

& 149. *Démonstration*. En prenant $\sqrt[n]{a}$ pour représenter le dividende, & $\sqrt[n]{b}$ pour représenter le diviseur, il faut démontrer que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ est le quotient de $\sqrt[n]{a}$ divisée par $\sqrt[n]{b}$, ou bien
* 106. que * $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{\frac{a}{b}} . 1$.
* 106 & 111. * $a . b :: \frac{a}{b} . 1$. Donc * $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{\frac{a}{b}} . \sqrt[n]{1} = 1$. *Ce qu'il fallolt démontrer*.

* 360 & 394.

COROLLAIRE I.

441. POUR diviser $a\sqrt[n]{b}$ par $c\sqrt[n]{d}$ il faut diviser, 1°, la grandeur qui est hors du signe dans le dividende par la grandeur qui est hors du signe dans le diviseur, & diviser, 2°, par le Problême précedent les grandeurs qui sont sous le signe: écrire le premier quotient au devant du signe, & le second sous le signe, & l'on aura $\frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$ pour le quotient qu'on cherche; ou bien on réduira sous le signe dans le dividende & dans le diviseur les grandeurs qui sont hors du signe, on en fera ensuite la division par le Problême précedent, & on abregera le quotient en retirant hors du signe les grandeurs qu'on en peut retirer.

Par exemple, on réduira $a\sqrt[n]{b}$ à $\sqrt[n]{a^n b}$, & $c\sqrt[n]{d}$ à $\sqrt[n]{c^n d}$; ensuite on formera le quotient $\sqrt[n]{\frac{a^n b}{c^n d}}$ qu'on réduira à $\frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$.

* 106 & 111. *Démonstration*. * $a^n b . c^n d :: \frac{a^n b}{c^n d} . 1$. Donc * $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$.
* 394. * 429. $\sqrt[n]{c^n d} = c\sqrt[n]{d} :: \sqrt[n]{\frac{a^n b}{c^n d}} =$ * $\frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}} . \sqrt[n]{1} = 1$. * *Ce qu'il falloit*
* 106. *démontrer*.

COROLLAIRE II.

442. POUR faire la division quand il n'y a que l'une des deux
* 430. grandeurs données qui soit incommensurable, il faut * réduire la grandeur commensurable, sans en changer la valeur, à une expression incommensurable qui ait l'exposant du signe de l'incommensurable donnée, & faire ensuite la division.

Par exemple, pour diviser a par $\sqrt[n]{a}$, on réduira a à $\sqrt[n]{a^n}$, & ensuite on divisera $\sqrt[n]{a^n}$ par $\sqrt[n]{a}$, & on trouvera le quotient $\sqrt[n]{\frac{a^n}{a}} = \sqrt[n]{a^{n-1}}$.

On trouvera de même le quotient de 2 divisé par $\sqrt{2}$, en changeant 2 en $\sqrt[2]{4}$; & faisant ensuite la division, on aura $\sqrt[2]{\frac{4}{2}} = \sqrt[2]{2}$ pour le quotient.

Pour diviser 3 par $\sqrt[2]{2}$, on changera 3 en $\sqrt[2]{9}$, & on trouvera ensuite $\sqrt[2]{\frac{9}{2}}$ pour le quotient qu'on cherche.

De même pour diviser $\sqrt[3]{32}$ par 2, on changera 2 en $\sqrt[3]{8}$, & on trouvera ensuite le quotient $\sqrt[3]{4} = \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{8}}$.

REMARQUE.

443. On peut aussi faire la division sans changer l'expression de la grandeur commensurable, en écrivant en fraction la grandeur commensurable & la grandeur incommensurable; c'est à dire en écrivant en fraction le dividende & le diviseur.

Par exemple, on divisera a par $\sqrt[n]{a}$, en écrivant $\frac{a}{1\sqrt[n]{a}}$; on divisera $\sqrt[n]{a}$ par a, en écrivant $\frac{1}{a}\sqrt[n]{a}$.

De même le quotient de $3\sqrt[2]{2}$ par 2, sera $\frac{3}{2}\sqrt[2]{2}$.

COROLLAIRE III.

Où l'on explique la division des racines imaginaires.

444. Quand le dividende & le diviseur contiennent la même grandeur imaginaire; comme aussi quand l'un des deux contient une imaginaire, & l'autre contient la grandeur négative réelle, dont la premiere est la racine imaginaire: la division se fait de la même maniere que celle des incommensurables qu'on vient d'expliquer, en remarquant seulement que le quotient qui vient d'une imaginaire divisée par elle-même, sans avoir égard au signe qui précede le signe $\sqrt{}$, est l'unité positive. Par exemple $\frac{\sqrt[2]{-l^2}}{\sqrt[2]{-l^2}} = +1$; $\frac{\sqrt[2]{-3}}{\sqrt[2]{-3}} = +1$: Car il est évident que $\sqrt[2]{-l^2}$ est contenue une fois dans elle-même $\sqrt[2]{-l^2}$, ce qui se marque par l'unité positive.

Pour diviser $+\sqrt[2]{-3}$ par $-\sqrt[2]{-3}$, le quotient doit être $\frac{+\sqrt[2]{-3}}{-\sqrt[2]{-3}} = -+1 = -1$.

De même $\frac{a\sqrt[2]{-l^2}}{b\sqrt[2]{-l^2}} = \frac{a}{b}$.

Comme aussi pour diviser $-l^2$ par $\sqrt[2]{-l^2}$, il faut changer $-l^2$ en $\sqrt[2]{-l^2} \times \sqrt[2]{-l^2}$, & ensuite former le quotient $\frac{\sqrt[2]{-l^2} \times \sqrt[2]{-l^2}}{\sqrt[2]{-l^2}} = \sqrt[2]{-l^2}$.

De même pour diviser $\sqrt[2]{-l^2}$ par $-l^2$, il faut changer $-l^2$ en $\sqrt[2]{-l^2} \times \sqrt[2]{-l^2}$, & former ensuite le quotient $\frac{1}{\sqrt[2]{-l^2}} = \frac{\sqrt[2]{-l^2}}{\sqrt[2]{-l^2} \times \sqrt[2]{-l^2}}$.

On trouvera de la même maniere que le quotient de $-l^2 = \sqrt[2]{-l^2} \times \sqrt[2]{-l^2}$ par $a\sqrt[2]{-l^2}$, est $\frac{1}{a}\sqrt[2]{\overline{-l^2}}$; que celui de $a\sqrt[2]{-l^2}$ par $-l^2$ $(= \sqrt[2]{-l^2} \times \sqrt[2]{-l^2})$ est $\sqrt[2]{\frac{a}{-l^2}}$.

Mais quand le dividende contient une imaginaire & le diviseur en contient une autre differente ; comme aussi quand il n'y a que l'un des deux qui contienne une imaginaire, & que l'autre contient une grandeur réelle commensurable (differente de la grandeur réelle négative dont le premier contient la racine imaginaire,) la division se fait en écrivant simplement pour quotient le dividende & le diviseur en fraction.

Par exemple, pour diviser $\sqrt[2]{-2}$ par $\sqrt[2]{-3}$, il faut écrire pour quotient $\frac{\sqrt[2]{-2}}{\sqrt[2]{-3}}$. De même le quotient de a divisée par $\sqrt[2]{-l^2}$ est $\sqrt[2]{\frac{a}{-l^2}}$. Le quotient de $\sqrt[2]{a}$ divisée par $\sqrt[2]{-l^2}$, est $\frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{-l^2}}$. Le quotient de $\sqrt[2]{-l^2}$ par $\sqrt[2]{a}$, est $\frac{\sqrt[2]{-l^2}}{\sqrt[2]{a}}$. Il en est de même des autres.

PROBLÊME IV.

Où l'on enſeigne à connoître les cas dans leſquels les incommenſurables ſont commenſurables entr'elles.

445. *TROUVER les cas où deux incommenſurables dont le ſigne radical a le même expoſant, ſont commenſurables entr'elles ; c'eſt à dire les cas où le rapport d'une incommenſurable à une autre incommenſurable eſt égal au rapport d'un nombre à un autre nombre.*

1. *Maniere.* Il faut réduire * l'une & l'autre incommen- * 429.
ſurable à leur plus ſimple expreſſion ; & ſi, après la réduction, il ſe trouve dans l'une & l'autre incommenſurable la même grandeur ſous le ſigne radical, elles ſont commenſurables entr'elles.

EXEMPLES.

ON connoîtra que $\sqrt[2]{32}$ & $\sqrt[2]{18}$ ſont commenſurables entr'elles; car $\sqrt[2]{32} = 4\sqrt[2]{2}$, & $\sqrt[2]{18} = 3\sqrt[2]{2}$; mais $4\sqrt[2]{2} . 3\sqrt[2]{2} :: * 4 . 3$. Par conſequent $\sqrt[2]{32}$ & $\sqrt[2]{18}$ ont entr'elles *75 &
le même rapport que les nombres 4 & 3. 109.

De même $\sqrt[3]{375}$ & $\sqrt[3]{24}$ ſont commenſurables, parceque
$\sqrt[3]{375} = 5\sqrt[3]{3}$, & $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$, & $\frac{5\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3}} = * \frac{5}{2}$. *75. &
109.

En general toutes les incommenſurables repréſentées par $\sqrt[n]{a^n b}$ & par $\sqrt[n]{bc^n}$ ſont commenſurables entr'elles, parceque
$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$, & $\sqrt[n]{bc^n} = c\sqrt[n]{b}$; & $\frac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{b}} = * \frac{a}{c}$. *75 &
109.

Cela convient aux imaginaires quand les grandeurs qui ſont ſous le ſigne radical ſont les mêmes. Par exemple, $3\sqrt[2]{-2} . 5\sqrt[2]{-2} :: * 3 . 5$. *75 &
109.

Cette methode eſt évidente.

2. *Maniere*. On ſuppoſera les deux incommenſurables repréſentées par $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$, & que l'expoſant des deux ſignes radicaux ſoit un même nombre entier quelconque repréſenté par n. Il faudra élever celle des deux grandeurs qu'on voudra, qui eſt ſous l'un des deux mêmes ſignes radicaux, à la puiſſance $n - 1$, & l'on aura a^{n-1} ou b^{n-1} ; il faudra enſuite multiplier cette puiſſance par la grandeur qui eſt

ſous l'autre ſigne radical, & l'on aura $a^{n-1}b$, ou ab^{n-1}. Il faudra voir après cela ſi ce produit $a^{n-1}b$, ou bien ab^{n-1}, eſt une puiſſance parfaite qui ait pour expoſant n; c'eſt à dire il faudra en extraire la racine dont l'expoſant eſt n; & ſi l'on trouve la racine exacte, c'eſt à dire, ſi $\sqrt[n]{a^{n-1}b}$, ou bien $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$, repréſentent chacune une racine exacte; les deux incommenſurables repréſentées par $\sqrt[n]{a}$ & par $\sqrt[n]{b}$ seront
409. commenſurables entr'elles, & leur rapport $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ſera égal à * $\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}}$, ou bien à $\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$.

Par exemple, pour voir ſi $\sqrt{32}$ & $\sqrt{18}$ ſont commenſurables, j'éleve 32 à la puiſſance dont l'expoſant eſt $2 - 1 = 1$, c'eſt à dire, 32 eſt la puiſſance même, je multiplie 32 par 18, & je trouve le produit 576; j'en tire la racine quarrée, & je trouve la racine exacte 24. Cela me fait connoître que $\sqrt{32}$ & $\sqrt{18}$ ſont commenſurables, & que leur rapport eſt égal à $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$.

Pour connoître ſi $\sqrt[3]{375}$ & $\sqrt[3]{24}$ ſont commenſurables, j'éleve 24 à la puiſſance $3 - 1 = 2$, & je multiplie cette puiſſance qui eſt 576 par 375; j'extrais la racine 3e du produit 216000, & je trouve que cette racine eſt exactement 60; j'en conclus que $\sqrt[3]{375}$ & $\sqrt[3]{24}$ ſont commenſurables, & que leur rapport $\frac{\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{24}} = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$.

Ou bien j'éleve 375 à la puiſſance $3 - 1 = 2$; je multiplie cette puiſſance qui eſt 140625 par 24; j'extrais la racine 3e du produit 3375000; & trouvant que cette racine eſt exactement 150, j'en conclus que $\frac{\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{24}} = \frac{375}{150} = \frac{5}{2}$.

Démonſtration de la ſeconde maniere. On ſuppoſera que
389. $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$ repréſentent les deux incommenſurables. $\frac{a}{b}$ * eſt compoſé d'autant de rapports égaux à $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ que n contient d'unitez.

En concevant entre a & b autant de moyens proportion-
405 & nels qu'il y a d'unitez dans $n - 1$, $\frac{a}{b}$ * eſt auſſi compoſé d'au-
407.

tant de rapports égaux à $\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}}$ ou à $\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$ qu'il y a d'unitez dans n. Par consequent $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$. Mais quand $\sqrt[n]{a^{n-1}b}$, comme aussi $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$, est une puissance parfaite dont l'exposant est n; le rapport $\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}}$, comme aussi $\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$ est évidemment un rapport de deux grandeurs commensurables. Par consequent dans ce cas $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ est un rapport commensurable.

3. *Maniere*. Il faut écrire en fraction les deux grandeurs qui sont sous les signes radicaux, & réduire * cette fraction aux moindres termes; par exemple, supposant que les deux incommensurables soient représentées par $\sqrt[n]{a^n b}$, & $\sqrt[n]{bc^n}$, on écrira $\frac{a^n b}{bc^n}$, qu'on réduira au moindre rapport $\frac{a^n}{c^n}$. Si le numerateur & le dénominateur du moindre rapport $\frac{a^n}{c^n}$ sont chacun une puissance parfaite dont l'exposant soit n, le rapport des deux incommensurables sera commensurable; car $\frac{a^n b}{bc^n} = \frac{a^n}{c^n}$; donc $\frac{\sqrt[n]{a^n b}}{\sqrt[n]{bc^n}} =* \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}} =* \frac{a}{b}$. *269. *360. *421.

Par exemple, on verra que $\sqrt[2]{32}$ & $\sqrt[2]{18}$ sont commensurables; parceque $\frac{32}{18}$ étant réduite aux moindres termes $\frac{16}{9}$, les deux termes sont chacun une 2e puissance parfaite. Ainsi $\frac{\sqrt[2]{32}}{\sqrt[2]{18}} = \frac{\sqrt[2]{16}}{\sqrt[2]{9}} = \frac{4}{3}$.

PROBLÊME IV.

446. *ELEVER une incommensurable représentée en general par* $\sqrt[n]{a}$ *à telle puissance qu'on voudra.*

Regle ou Operation. Il n'y a qu'à multiplier * l'incommensurable $\sqrt[n]{a}$ une fois par elle-même, 2 fois, 3 fois, 4 fois, & ainsi de suite, & l'on aura de suite toutes ses puissances * $\sqrt[n]{a^2}$, $\sqrt[n]{a^3}$, $\sqrt[n]{a^4}$, $\sqrt[n]{a^5}$, &c. *427. *143.

En general, pour élever $\sqrt[n]{a}$ à la puissance p, en suppos ant que n & p représentent deux nombres entiers quelconques, il faut écrire $\sqrt[n]{a^p}$. Et pour élever $\sqrt[n]{a^p}$ à la puissance q, il faut écrire $\sqrt[n]{a^{pq}}$.

COROLLAIRE I.

447. EN supposant que n représente successivement tous les nombres entiers 1, 2, 3, 4, &c. l'unité & les puissances d'une incommensurable prises de suite, feront une progression ∻ $\sqrt[n]{1} = 1 . \sqrt[n]{a^1} . \sqrt[n]{a^2} . \sqrt[n]{a^3} . \sqrt[n]{a^4} . \sqrt[n]{a^5}$. &c. Cette progression, à cause de l'exposant indéterminé n, représentera toutes les progressions formées par les racines d'une même grandeur a, & des puissances de cette racine prises de suite, dont 1 est le premier terme, $\sqrt[n]{a^1}$ le second, $\sqrt[n]{a^2}$ le troisiéme, & ainsi de suite.

Car il est évident que le même rapport $\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a}}$ regne dans la progression.

COROLLAIRE II.

448. QUAND $n = 1$, alors le signe $\sqrt[1]{}$ ne marque aucune racine de la grandeur a, ni aucune des puissances de a, mais il représente que a, & les puissances de a sont prises en elles mêmes, c'est à dire $\sqrt[1]{a} = a$, $\sqrt[1]{a^2} = a^2$; ainsi quand $n = 1$, la progression est ∻ $1 . a . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 . a^7 . a^8$, &c.

Quand $n = 2$, la progression est ∻ $1 . \sqrt[2]{a} . \sqrt[2]{a^2} . \sqrt[2]{a^3} . \sqrt[2]{a^4}$. &c. Quand $n = 3$, ∻ $1 . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a^2} . \sqrt[3]{a^3} . \sqrt[3]{a^4} . \sqrt[3]{a^5} . \sqrt[3]{a^6}$. &c. Quand $n = 6$, ∻ $1 . \sqrt[6]{a} . \sqrt[6]{a^2} . \sqrt[6]{a^3} . \sqrt[6]{a^4} . \sqrt[6]{a^5} . \sqrt[6]{a^6} . \sqrt[6]{a^7} . \sqrt[6]{a^8} . \sqrt[5]{a^9} . \sqrt[6]{a^{10}} . \sqrt[6]{a^{11}} . \sqrt[6]{a^{12}}$. &c. Ces progressions particulieres suffisent pour faire appercevoir le nombre infini de progressions particulieres représentées par la progression generale.

COROLLAIRE III.

449. LORSQUE l'exposant du signe radical d'une progression est multiple de l'exposant du signe radical d'une autre progression, tous les termes de cette derniere se trouvent parmi les termes de la premiere d'une maniere équivalente.

Ainsi tous les nombres étant multiples de l'unité, les termes

termes de la progreſſion $\sqrt[1]{\ }$ dont l'expoſant du ſigne $\surd$ eſt 1, ſont parmi les termes de chacune des autres progreſſions.

Tous les termes de la progreſſion, dont le ſigne radical a pour expoſant 2, ſe trouvent parmi les termes de la progreſſion $\sqrt[4]{\ }$, de la progreſſion $\sqrt[6]{\ }$, de la progreſſion $\sqrt[8]{\ }$, de la progreſſion $\sqrt[10]{\ }$, &c.

Tous les termes de la progreſſion $\sqrt[3]{\ }$, ſe trouvent dans chacune des progreſſions dont les ſignes radicaux ſont $\sqrt[6]{\ }$, $\sqrt[9]{\ }$, $\sqrt[12]{\ }$, &c. Il en eſt de même des autres progreſſions.

Démonſtration. 1°. Il eſt évident que les termes de la progreſſion $\sqrt[1]{\ }$ ſe trouvent dans chacune des autres repréſentées par la progreſſion generale $\sqrt[n]{\ }$; car il eſt clair que, par exemple, $\sqrt[2]{a^2} = a$, $\sqrt[2]{a^4} = a^2$; & ainſi des autres; de même dans la progreſſion $\sqrt[6]{\ }$, $\sqrt[6]{a^6} = a$; $\sqrt[6]{a^{12}} = a^2$; $\sqrt[6]{a^{18}} = a^3$; & ainſi des autres; & en general $\sqrt[n]{a^n} = a$, $\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$, $\sqrt[n]{a^{3n}} = a^3$, &c.

De même tous les termes de la progreſſion $\sqrt[2]{\ }$ ſe trouvent d'une maniere équivalente dans la progreſſion $\sqrt[6]{\ }$ où *6* eſt multiple de 2, & dans toutes les autres où l'expoſant du ſigne eſt multiple de 2. Car, par exemple, le terme $\sqrt[2]{a}$ étant le moyen proportionnel dans la progreſſion $\sqrt[2]{\ }$, entre 1 & a, il eſt clair que quelque expreſſion que puiſſe avoir le moyen proportionnel entre 1 & a, ce ſera toujours une grandeur égale à $\sqrt[2]{a}$; & dans la progreſſion $\sqrt[6]{\ }$, il eſt évident que $\sqrt[6]{a^3}$ eſt un moyen proportionnel entre 1 & $\sqrt[6]{a^6} = a$; puiſque ÷ $\sqrt[6]{1} = 1 . \sqrt[6]{a^3} . \sqrt[6]{a^6}$; ainſi $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[2]{a}$.

Tous les termes de la progreſſion $\sqrt[3]{\ }$ ſe trouvent auſſi d'une maniere équivalente dans la progreſſion $\sqrt[6]{\ }$ où 6 eſt multiple de 3. Par exemple, $\sqrt[3]{a}$ étant le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & $\sqrt[3]{a^3} = a$ dans la progreſſion $\sqrt[3]{\ }$; quelqu'expreſſion que puiſſe avoir le 1er des deux moyens proportionnels entre 1 & a, ce ſera toujours une grandeur égale à $\sqrt[3]{a}$. Or il eſt évident que dans la progreſſion $\sqrt[6]{\ }$, le terme $\sqrt[6]{a^2}$ peut être regardé comme le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & $\sqrt[6]{a^6} = a$, puiſque ÷ $1 . \sqrt[6]{a^2} . \sqrt[6]{a^4} . \sqrt[6]{a^6}$. Par conſequent $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$.

Ces exemples ſuffiſent pour faire appercevoir clairement

aux lecteurs la verité de ce raisonnement. Dans une progression dont l'exposant du signe est un nombre multiple de l'exposant du signe d'une autre progression, on peut distinguer tout autant de moyens proportionnels entre 1 & a, & entre toutes les puissances de a prises de suite, dans la premiere que dans la seconde.

Par exemple, dans la progression $\sqrt[6]{}$, on peut distinguer tout autant de moyens proportionnels entre les termes 1 & a, entre a & a^2, entre a^2 & a^3, & ainsi de suite, qu'il y en a entre 1 & a, & a^2 & a^3, &c. dans la progression $\sqrt[2]{}$; comme aussi on peut distinguer tout autant de moyens proportionnels dans la progression $\sqrt[6]{}$ entre 1 & a, a & a^2, a^2 & a^3, &c. qu'il y en a dans la progression $\sqrt[3]{}$, entre 1 & a, a & a^2, a^2 & a^3, &c. Car il est évident qu'en prenant dans la progression $\sqrt[6]{}$, le 1er terme, le 4e, le 7e terme, le 10e terme, & ainsi de suite, en laissant deux termes interposez, on aura la progression $∺ \sqrt[6]{1} = 1 . \sqrt[6]{a^3} . \sqrt[6]{a^6} = a . \sqrt[6]{a^9} . \sqrt[6]{a^{12}} = a^2$, &c. dans laquelle il y a un moyen proportionnel entre 1 & a, entre a & a^2, entre a^2 & a^3, &c. comme il y a un moyen proportionnel entre 1 & a, entre a & a^2, &c. dans la progression $\sqrt[2]{}$ qui est $∺ 1 . \sqrt[2]{a} . \sqrt[2]{a^2} = a . \sqrt[2]{a^3} . \sqrt[2]{a^4} = a^2$. &c. En comparant de même la progression $\sqrt[6]{}$ avec la progression $\sqrt[3]{}$, on verra qu'en prenant le 1er terme, le 3e, le 5e, & ainsi de suite, en laissant un terme interposé, on aura la progression $∺ \sqrt[6]{1} = 1 . \sqrt[6]{a^2} . \sqrt[6]{a^4} . \sqrt[6]{a^6} = a . \sqrt[6]{a^8} . \sqrt[6]{a^{10}} . \sqrt[6]{a^{12}} = a^2$. &c. dans laquelle il y a deux moyens proportionnels entre 1 & a, entre a & a^2, entre a^2 & a^3, &c. comme il y a deux moyens proportionnels entre 1 & a, entre a & a^2, entre a^2 & a^3, &c. dans la progression $\sqrt[3]{}$ qui est $∺ \sqrt[3]{1} = 1 . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a^2} . \sqrt[3]{a^3} = a . \sqrt[3]{a^4} . \sqrt[3]{a^5} . \sqrt[3]{a^6} = a^2$. &c.

Or les grandeurs 1, a, a^2, &c. étant égales dans les deux progressions que l'on compare, les deux moyens proportionnels
* 408. de l'une, * sont necessairement égaux aux moyens correspondans de l'autre.

Par consequent lorsque l'exposant du signe d'une progression est multiple de l'exposant du signe d'une autre progres-

ſion, tous les termes de cette derniere ſe trouvent d'une maniere équivalente parmi les termes de la premiere. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE IV. ET PROBLÊME V.

450. *QUAND on a une incommenſurable comme $\sqrt[6]{a^3}$; en trouver une expreſſion équivalente, 1°, avec une ſigne radical dont l'expoſant ſoit multiple de l'expoſant 6 de l'incommenſurable donnée, par exemple, avec le ſigne $\sqrt[12]{}$. 2° avec un ſigne dont l'expoſant ſoit une aliquote ou ſous-multiple de l'expoſant du ſigne donné $\sqrt[6]{}$, par exemple, avec le ſigne $\sqrt[2]{}$.*

Regle ou Operation pour le premier cas. Il faut diviſer l'expoſant du ſigne que l'on demande par l'expoſant du ſigne donné (dans l'exemple, 12 par *6*;) le quotient (qui eſt 2 dans cet exemple) ſera l'expoſant de la puiſſance à laquelle il faut élever la grandeur qui eſt ſous le ſigne donné. C'eſt à dire, il faut élever la grandeur qui eſt ſous le ſigne donné à la puiſſance dont le quotient eſt l'expoſant; écrire au devant le ſigne radical avec l'expoſant qu'on demande, & l'on aura l'expreſſion équivalente qu'on cherchoit. Dans notre exemple il faut élever a^3 à la puiſſance dont l'expoſant ſoit le quotient 2, & écrire le ſigne $\sqrt[12]{}$ au devant de cette puiſſance a^6, & l'on aura $\sqrt[12]{a^6} = \sqrt[6]{a^3}$. Car comme dans $\div \sqrt[6]{1} = 1 . \sqrt[6]{a^3} . \sqrt[6]{a^6} = a$, la grandeur $\sqrt[6]{a^3}$ eſt moyenne proportionnelle entre 1 & a; de même dans $\div \sqrt[12]{1} = 1 . \sqrt[12]{a^6} . \sqrt[12]{a^{12}} = a$; $\sqrt[12]{a^6}$ eſt moyenne proportionnelle entre 1 & a.

Regle ou operation pour le ſecond cas. Il faut diviſer l'expoſant du ſigne de la grandeur donnée par l'expoſant du ſigne qu'on demande qui en eſt ſous multiple (dans notre exemple, *6* par 2.) Prendre la racine de la grandeur donnée qui eſt ſous le ſigne donné; en prendre, dis-je, la racine dont l'expoſant eſt le quotient qu'on vient de trouver, (dans notre exemple il faut prendre la racine troiſiéme de a^3, qui eſt a,) & écrire cette racine ſous le ſigne radical qu'on demande, & ce ſera l'expreſſion équivalente qu'on cherchoit. Ainſi dans notre exemple on aura $\sqrt[2]{a} = \sqrt[6]{a^3}$. Car comme $\sqrt[6]{a^3}$ eſt moyenne proportionnelle entre 1 & a dans $\div \sqrt[6]{1} = 1 . \sqrt[6]{a^3} . \sqrt[6]{a^6} = a$; de même $\sqrt[2]{a}$ eſt moyenne proportionnelle entre 1 & a dans $\div \sqrt[2]{1} = 1 . \sqrt[2]{a} . \sqrt[2]{a^2} = a$.

DÉFINITION.

CETTE réduction d'une expression incommensurable à une autre équivalente qui ait un autre exposant du signe radical, s'appelle ***la réduction d'une incommensurable à un signe donné.***

REMARQUE.

451. SI dans le premier cas on vouloit réduire une incommensurable comme $\sqrt[6]{a^3}$ à un signe donné dont l'exposant ne fût pas multiple de l'exposant 6 de l'incommensurable, comme si on vouloit réduire $\sqrt[6]{a^3}$ à $\sqrt[8]{}$; on ne le pourroit pas sans introduire un nouveau signe radical. De même on ne sçauroit dans le 2e cas (sans introduire un nouveau signe radical) réduire une incommensurable donnée comme $\sqrt[6]{a^3}$ à un signe dont l'exposant ne seroit pas sous-multiple de l'exposant de l'incommensurable, par ex. au signe $\sqrt[4]{}$. On ne sçauroit pas non plus réduire une incommensurable donnée comme $\sqrt[6]{a^3}$ à un signe dont l'exposant seroit sous-multiple de l'exposant de l'incommensurable donnée, par exemple, au signe $\sqrt[3]{}$, lorsque l'exposant 3 de la puissance a^3 qui est sous $\sqrt[6]{}$, ne peut pas se diviser exactement par le quotient 2 de l'exposant 6 de $\sqrt[6]{}$, divisé par 3 exposant de $\sqrt[3]{}$; ainsi on ne peut pas réduire $\sqrt[6]{a^3}$ au signe $\sqrt[3]{}$; mais on pourroit réduire $\sqrt[6]{a^4}$ au signe $\sqrt[3]{}$, parceque le quotient 2 de 6, exposant de $\sqrt[6]{}$, divisé par 3, exposant de $\sqrt[3]{}$, divisant exactement 4 exposant de a^4, on peut extraire la racine 2e exacte de a^4 qui est a^2, & l'on auroit $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$.

COROLLAIRE V. ET PROBLÉME VI.

452. *REDUIRE deux incommensurables qui ont differens signes radicaux à avoir le même signe radical (c'est à dire avoir le même exposant de leur signe radical) sans en changer la valeur.*

1. *Cas*. Quand l'exposant du signe de l'une des deux incommensurables contient exactement l'exposant du signe de l'autre, il ne faut rien changer dans la premiere, mais
*450. seulement réduire la derniere au signe de la premiere par * le Problême précedent.

Par exemple, pour réduire $\sqrt{a}$ & $\sqrt[6]{a^4}$ à un même ſigne, il faut élever la grandeur a de $\sqrt{a}$ à la puiſſance 3 dont l'expoſant 3 eſt le quotient de l'expoſant 6 de $\sqrt[6]{}$, diviſé par 2, expoſant de $\sqrt{}$, & écrire au devant de cette puiſſance a^3 le ſigne $\sqrt[6]{}$, & l'on aura $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$; & les incommenſurables $\sqrt{a}$, $\sqrt[6]{a^4}$ ſeront réduites à un même ſigne.

De même, pour réduire $\sqrt[3]{2}$ & $\sqrt[6]{20}$, j'éleve la grandeur 2 de $\sqrt[3]{2}$ à la 2e puiſſance marquée par le quotient 2 de 6 expoſant de $\sqrt[6]{}$, diviſé par 3 expoſant de $\sqrt[3]{}$, & j'écris devant 4, qui eſt la 2e puiſſance de 2, le ſigne $\sqrt[6]{}$, & je trouve $\sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2}$. Ainſi $\sqrt[3]{2}$ & $\sqrt[6]{20}$ ſont réduites au même ſigne.

On réduira de même $\sqrt[mn]{a^q}$, $\sqrt[m]{a^q}$ au même ſigne, en changeant ſeulement $\sqrt[m]{a^q}$ en ſont équivalente $\sqrt[mn]{a^{nq}}$.

Remarque ſur ce premier cas.

LORSQU'IL arrive que la grandeur qui eſt ſous le ſigne le plus élevé, eſt une puiſſance parfaite qui a pour expoſant le quotient de l'expoſant du plus grand ſigne radical diviſé par l'expoſant du moindre, il faut extraire cette racine qui ſera exacte, & écrire au devant le moindre ſigne radical; & dans ce cas l'incommenſurable du plus grand ſigne radical ſera réduite au moindre ſigne radical.

Par exemple, s'il faut réduire $\sqrt[3]{a}$ & $\sqrt[6]{a^4}$ au même ſigne, il ne faut rien changer dans $\sqrt[3]{a}$, mais réduire $\sqrt[6]{a^4}$ au ſigne $\sqrt[3]{}$, en tirant la racine 2e de a^4 qui eſt a^2, (parceque 6 diviſé par 3 donne 2 pour quotient;) & l'on aura $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$; & $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[6]{a^4}$ ſeront réduites au même ſigne $\sqrt[3]{}$.

Si l'on avoit $\sqrt[m]{a}$ & $\sqrt[3m]{b^3}$ à réduire au même ſigne, il faudroit ſimplement réduire $\sqrt[3m]{b^3}$ à ſon équivalente * $\sqrt[m]{b}$. * 450.

Si l'on avoit encore $\sqrt[mn]{a^{nq}}$ & $\sqrt[m]{a^p}$, il faudroit réduire $\sqrt[mn]{a^{nq}}$ ſon équivalente $\sqrt[m]{a^q}$.

2. *Cas du 6e Problême.* Si les expoſans des ſignes radicaux ſont *premiers*, il faut les multiplier l'un par l'autre, & leur pro-

duit ſera l'expoſant du ſigne radical auquel il faut réduire
* 450. chaque incommenſurable par * le Problême 5e.

Par exemple, pour réduire $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[3]{3}$ à un même ſigne, il faut prendre le produit $2 \times 3 = 6$; élever $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[3]{3}$ chacune au ſigne $\sqrt[6]{}$; ſçavoir $\sqrt[2]{2}$, en élevant 2 à la puiſſance 3e qui eſt 8 (parceque 6 expoſant de $\sqrt[6]{}$ diviſé par 2 expoſant de $\sqrt[2]{}$, donne 3 pour quotient) & $\sqrt[3]{3}$, en élevant 3 à la 2e puiſſance qui eſt 9 (parceque 6 expoſant de $\sqrt[6]{}$ diviſé par 3 expoſant de $\sqrt[3]{}$, donne 2 pour quotient.) Enfin il faut écrire $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{9}$ qui ſeront équivalentes à $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[3]{3}$.

On réduira de même $\sqrt[3]{a}$ & $\sqrt[7]{b}$ au même ſigne $\sqrt[21]{}$, en écrivant $\sqrt[21]{a^7} = \sqrt[3]{a}$, & $\sqrt[21]{b^3} = \sqrt[7]{b}$.

On réduira de même $\sqrt[m]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$ au même ſigne, en réduiſant $\sqrt[m]{a}$ à ſon équivalente $\sqrt[mn]{a^n}$, & $\sqrt[n]{b}$ à ſon équivalente $\sqrt[mn]{b^m}$.

3. *Cas*. Lorſque les expoſans des deux ſignes radicaux ne
* 262. ſont pas premiers entr'eux, il faut chercher * le moindre nombre dont ils ſont des diviſeurs exacts, & ce nombre ſera l'expoſant du ſigne radical auquel il faut réduire les deux incommenſurables propoſées.

Par exemple, pour réduire au même ſigne les incommenſurables $\sqrt[4]{a}$ & $\sqrt[6]{b}$, il faut chercher le moindre nombre 12
* 450. qui a pour diviſeurs 4 & 6. Il faut enſuite réduire * $\sqrt[4]{a}$ & $\sqrt[6]{b}$ chacune au ſigne $\sqrt[12]{}$; & l'on trouvera $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{a}$, & $\sqrt[12]{b^2} = \sqrt[6]{b}$.

Ce Problême n'a pas beſoin de démonſtration étant une
* 450. ſuite évidente du précedent *.

REMARQUES.

I.

453. CETTE réduction des incommenſurables à un même ſigne eſt neceſſaire pour operer ſur les incommenſurables; car on ne peut les ajouter les unes aux autres, les ſouſtraire les unes des autres, les multiplier & les diviſer les unes par les autres qu'après les avoir réduites à un même ſigne. Elle ſert auſſi à connoître de deux incommenſurables qui ont differens ſignes, celle qui eſt plus grande que l'autre, ce qui eſt

quelquefois neceſſaire. Car étant réduites au même ſigne, & s'il y a des grandeurs hors du ſigne, ces grandeurs étant miſes ſous le ſigne, on voit aiſément * quelle eſt la plus grande. *212.

2.

454. Quand deux incommenſurables de differens ſignes ſont réduites chacune à leur plus ſimple expreſſion, & qu'elles ont quelque grandeur commenſurable hors du ſigne; il faut en les réduiſant au même ſigne ne rien changer dans les grandeurs qui ſont hors du ſigne.

Par exemple, pour réduire $3\sqrt[2]{2}$ & $4\sqrt[3]{5}$ au même ſigne $\sqrt[6]{}$, il faut écrire $3\sqrt[6]{8} = 3\sqrt[2]{2}$, & $4\sqrt[6]{25} = 4\sqrt[3]{5}$. De même pour réduire $a\sqrt[2]{b}$ & $c\sqrt[3]{d}$ au même ſigne $\sqrt[6]{}$, il faut écrire $a\sqrt[6]{b^3} = a\sqrt[2]{b}$ & $c\sqrt[6]{d^2} = c\sqrt[3]{d}$. Car il eſt évident que $a\sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{a^2b} = \sqrt[6]{a^6b^3} = a\sqrt[6]{b^3}$, & de même que $c\sqrt[3]{d} = \sqrt[3]{c^3d} = \sqrt[6]{c^6d^2} = c\sqrt[6]{d^2}$.

COROLLAIRE VI. ET PROBLÊME VII.

455. *EXTRAIRE la racine quelconque, dont l'expoſant eſt un nombre donné, d'une incommenſurable. Par exemple, extraire la racine 2e de* $\sqrt[3]{a}$.

Regle ou Operation. Il faut multiplier l'expoſant du ſigne radical de l'incommenſurable propoſée par l'expoſant de la racine qu'on cherche, le produit ſera l'expoſant du ſigne radical de la racine qu'on cherche, ſous lequel il faudra écrire la grandeur propoſée ſans autre ſigne radical, & ce ſera la racine qu'on demande.

Par exemple, pour trouver la racine 2e de $\sqrt[3]{a}$, je prens le produit 6 de 2 par 3, & j'écris $\sqrt[6]{a}$ pour la racine 2e de $\sqrt[3]{a}$.

Pour extraire la racine 3e de $\sqrt[5]{10}$, il faut prendre le produit $3 \times 5 = 15$, & écrire $\sqrt[15]{10}$ pour la racine 3e de $\sqrt[5]{10}$.

De même pour trouver la racine n de $\sqrt[p]{a}$, il faut prendre le produit np & écrire $\sqrt[np]{a}$ pour la racine n de $\sqrt[p]{a}$.

REMARQUE.

456. LORSQUE l'incommenſurable dont on cherche la racine contient ſous le ſigne une puiſſance parfaite dont l'expoſant

eſt celui de la racine qu'on cherche, comme ſi on vouloit extraire la racine 3e de $\sqrt[3]{a^3}$; dans ce cas il faut ſeulement extraire la racine qu'on demande de la puiſſance qui eſt ſous le ſigne, & écrire cette racine ſous le même ſigne radical ſans changer ſon expoſant, & ce ſera la racine qu'on cherche. Ainſi la racine 3e de $\sqrt[3]{a^3}$ eſt $\sqrt[3]{a}$, puiſque $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a}$
*446. $= * \sqrt[3]{a^3}$. De même la racine n de $\sqrt[n]{a^n}$ eſt $\sqrt[n]{a}$.

Démonſtration du problême. La racine d'une puiſſance tant commenſurable qu'incommenſurable, eſt le premier d'autant de moyens proportionnels entre l'unité & cette puiſſance, qu'il y a d'unitez moins une dans l'expoſant de la racine. Ainſi dans la progreſſion $\div$ 1 . a . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . &c. qui peut repréſenter les puiſſances d'une grandeur a commenſurable ou incommenſurable priſes de ſuite depuis l'unité, puiſque ces puiſſances ſe forment de la même maniere en multipliant continuellement la grandeur a par elle même; dans cette progreſſion, dis-je, la racine 2e a de a^2 eſt le moyen proportionnel entre 1 & a^2. La racine 3e a de a^3 eſt le premier des deux moyens proportionnels entre 1 & a^3; & ainſi de ſuite.

Or le Problême fait découvrir pour la racine qu'on cherche, le premier d'autant de moyens proportionnels entre 1 & la puiſſance incommenſurable propoſée qu'il y a d'unitez moins une dans l'expoſant de la racine qu'on cherche, qui eſt le même que celui de la puiſſance propoſée. (Quand on cherche la racine 2e, 3e, 4e, 5e &c. d'une grandeur commenſurable ou incommenſurable, on conſidere cette grandeur comme une puiſſance 2e, 3e, 4e, 5e, &c. de la racine qu'on cherche.) Car en cherchant, par exemple, la racine 3e de $\sqrt[2]{a}$, on trouve par le Problême $\sqrt[6]{a}$; & il eſt évident
*450. que dans $\div \sqrt[6]{1} = 1 . \sqrt[6]{a} . \sqrt[6]{a^2} . \sqrt[6]{a^3}$. Le terme $\sqrt[6]{a^3} = * \sqrt[2]{a}$, & que $\sqrt[6]{a}$ eſt le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & $\sqrt[6]{a^3}$ qui eſt la puiſſance 3e de $\sqrt[6]{a}$. De même, dans le
*456. cas * de la remarque, la racine 3e de $\sqrt[3]{a^3}$ qu'on trouve être $\sqrt[3]{a}$, eſt le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & $\sqrt[3]{a^3}$, comme on le voit clairement dans la progreſſion $\div \sqrt[3]{1} = 1 . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a^2} . \sqrt[3]{a^3}$. Il eſt évident que cela convient à tous les autres exemples.

Le

Le Problême fait donc découvrir la racine que l'on cherche. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE VII.

457. Il suit du Problême précedent que quand une incommensurable est précedée de plusieurs signes radicaux comme $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}}$, on peut les rêduire à un seul signe radical, en prenant le produit des exposans de tous les signes radicaux, & écrivant ce produit sur ce signe radical. Ainsi $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}} = \sqrt[2\times3\times4]{a^3}$ $= \sqrt[24]{a^3}$. De même $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{p-1}}}} = \sqrt[mnp]{a^{p-1}}$. Si l'on avoit $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^n}}}$, on pourroit la réduire à * $\sqrt[mp]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^n}}}$. Si l'on * 456.
avoit cette expression $\sqrt[2]{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^6}}}$, on la réduiroit d'abord à $\sqrt[2]{\sqrt[3]{a^5\sqrt[4]{a^6}}}$, (* en faisant passer * dans $\sqrt[2]{a\sqrt[3]{a^2}}$, a qui est hors * 430.
du signe $\sqrt[2]{}$ sous ce signe $\sqrt[3]{}$,) & en faisant ensuite passer a^5 sous le signe $\sqrt[4]{}$, on auroit $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{26}}}}$, qu'on réduiroit enfin au seul signe $\sqrt[24]{a^{26}}$ qu'on pourroit encore réduire * à la plus simple ex- * 429.
pression $a\sqrt[24]{a^2}$.

En general on réduira $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b^q\sqrt[p]{c^r}}}$ au seul signe $\sqrt[mnp]{a^{np}b^{pq}c^r}$.

REMARQUE.

458. Le calcul des grandeurs étant le moyen le plus simple & le plus facile de découvrir tout ce qu'on peut désirer de sçavoir dans les Mathematiques ; on doit prendre garde, afin que ce moyen soit aussi très sur, de ne pas employer des expressions de grandeurs qui soient équivoques. C'est pourquoi il est bon de faire ici remarquer aux Commençans que quand il y a plusieurs signes radicaux joints ensemble, comme le sont des multiplicateurs dans un produit ; cette expression peut marquer deux choses, 1°, quand ils sont joints de cette maniere $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[p]{c}$, cela marque une multiplication, c'est à dire, cela marque que les trois incommensurables $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$, sont multipliées les unes par les autres. Dans ce cas, pour rêduire ce produit qui contient trois signes radicaux à un seul signe radical, il faut se servir de la methode de l'*art.* 452. On réduira par cette methode $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}$ à $\sqrt[mn]{a^nb^m}$, & le

produit $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[p]{c}$ sera déja réduit à $\sqrt[mn]{a^n b^m}\sqrt[p]{c}$, qu'on réduira enfin à $\sqrt[mnp]{a^{np}b^{mp}c^{mn}}$.

2°. Quand les signes radicaux sont joints de façon qu'il y a des lignes droites tirées du haut des signes radicaux les plus à gauche, lesquelles lignes couvrent toutes les grandeurs qui sont le plus à droite; cela marque non une multiplication comme dans l'expression précedente, mais une extraction de racines, comme on le voit dans cette expression $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b^q\sqrt[p]{c}}}$; c'est à dire, cette expression marque l'extraction de la racine, dont l'exposant est m, de la grandeur $a\sqrt[n]{b^q\sqrt[p]{c^r}}$; & cette derniere expression exprime le produit de la grandeur a par la racine n de la grandeur $b^q\sqrt[p]{c^r}$.

Pour réduire cette expression qui contient trois signes radicaux à un seul signe radical, on pourra commencer par la grandeur la plus à droite $b^q\sqrt[p]{c^r}$, & on fera passer b^q sous le
* 430. signe $\sqrt[p]{\ }$, * ce qui donnera $\sqrt[p]{b^{pq}c^r}$, & l'on aura déja $a\sqrt[n]{b\sqrt[p]{c^r}}$
* 430. * 455. $= * \, a\sqrt[n]{\sqrt[p]{b^{pq}c^r}} = * \, a\sqrt[np]{b^{pq}c^r}$. On fera ensuite passer * a
* 430. sous le signe $\sqrt[np]{\ }$, & l'on aura $a\sqrt[np]{b^{pq}c^r} = \sqrt[np]{a^{np}b^{pq}c^r}$, &
* 455. $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b^q\sqrt[p]{c^r}}} = \sqrt[m]{\sqrt[np]{a^{np}b^{pq}c^r}} = * \sqrt[mnp]{a^{np}b^{pq}c^r}$.

Enfin, quand plusieurs signes radicaux sont joints, & qu'il n'y a de grandeur que sous le signe radical le plus vers la droite, comme dans cette expression $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}$, cela ne marque qu'une extraction de racines, & cette expression signifie la racine 2ᵉ de la racine 3ᵉ de la racine 4ᵉ de la grandeur a, & on la réduira à $\sqrt[2\times3\times4]{a} = \sqrt[24]{a}$ par le Problême de l'*art* 455. Dans ce cas, il n'y auroit aucune équivoque quand on ne tireroit pas des lignes des signes radicaux les plus à gauche sur ceux qui sont plus à droite.

PROBLÊME VIII.

459. *AYANT une expression qui contient une incommensurable, la changer en differentes expressions toutes équivalentes, c'est à dire, qui auront la même valeur.*

Les differentes expressions équivalentes d'une même grandeur qui contient une incommensurable, sont de grand usage dans l'*Analyse* & dans la resolution des Problêmes des Mathematiques. Voici les principales methodes de trouver ces differentes expressions équivalentes.

La 1re maniere est celle de * réduire une incommensurable à sa plus simple expression. On prépare par là les incommensurables à être plus facilement ajoutées les unes aux autres, & à être retranchées les unes des autres. Car étant ainsi réduites, on ajoute ensemble ou on retranche les unes des autres celles qui sont commensurables entr'elles, comme si c'étoient des grandeurs commensurables; car $a\sqrt[3]{b}$ & $2a\sqrt[3]{b}$ ajoutées ensemble font $3a\sqrt[3]{b}$; & $a\sqrt[3]{b}$ étant retranchée de $2a\sqrt[3]{b}$, la difference est $a\sqrt[3]{b}$. Quand elles sont incommensurables on les ajoute en les joignant simplement avec leurs signes + ou —, & on les retranche les unes de autres, en joignant celles qui doivent être retranchées par des signes opposez à celles dont elles doivent être retranchées. * 429.

La 2e maniere est celle de réduire * sous le signe les grandeurs qui sont hors du signe: ce changement est d'usage en plusieurs rencontres. * 430.

La 3e maniere est celle de donner à une incommensurable un signe radical * dont l'exposant soit multiple ou sous-multiple de celui qu'elle a. Cette maniere sert à préparer les incommensurables au calcul, en réduisant au même signe celles qui doivent entrer dans un même calcul. * 450.

On a déja expliqué les manieres précedentes, en voici d'autres utiles.

460. *La 4e maniere* consiste à multiplier ou à diviser le numerateur & le dénominateur de l'expression qui contient une incommensurable par l'incommensurable même, ou par une autre grandeur; ce qui est cause * que la grandeur conserve toujours la même valeur sous differentes expressions. * 75 & 109.

EXEMPLES.

Pour réduire $\frac{2a}{b\sqrt[2]{\frac{a}{c}}}$ à d'autres expressions équivalentes, on la changera dabord en * $\frac{2\sqrt[2]{a}\sqrt[2]{a}}{b\sqrt[2]{\frac{a}{c}}}$. Ensuite on divisera le numerateur & le dénominateur par $\sqrt[2]{a}$, & l'on aura * 432.

$\frac{2\sqrt[2]{a}}{b\sqrt[2]{\frac{1}{c}}}$; & en faisant la division marquée par $\frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{\frac{1}{c}}}$, on trouvera le quotient $\frac{\sqrt[2]{ac}}{\sqrt[2]{1}}$, ce qui donnera $\frac{2\sqrt[2]{ac}}{b\sqrt[2]{1}} = \frac{2\sqrt[2]{ac}}{b}$, parceque $\sqrt[2]{1} = 1$, & $1b = b$.

Pour réduire $ax\sqrt[2]{\frac{x+a}{x-a}}$ à une expression équivalente dans laquelle le seul dénominateur contienne une incommensurable, il faut multiplier le numerateur & le denominateur par $\sqrt{\overline{x+a}}$, & l'on aura $\frac{ax \times \overline{x+a}}{\sqrt[2]{x^2-a^2}} = ax\sqrt[2]{\frac{x+a}{x-a}}$.

Si l'on veut que l'incommensurable soit au numerateur, il faut multiplier par $\sqrt[2]{x-a}$, & l'on aura $\frac{ax}{x-a}\sqrt[2]{x^2-a^2}$.

Si l'on avoit $\frac{2ax-x^2}{\sqrt[2]{2ax-x^2}}$, on pourroit la rendre plus simple en divisant le numerateur & le dénominateur par $\sqrt[2]{2ax-x^2}$, & l'on auroit $\sqrt[2]{2ax-x^2} = \frac{2ax-x^2}{\sqrt[2]{2ax-x^2}}$; car

* 432. * 109. $\frac{2ax-x^2}{\sqrt[2]{2ax-x^2}} = * \frac{\sqrt[2]{2ax-x^2} \times \sqrt[2]{2ax-x^2}}{\sqrt[2]{2ax-x^2}} = * \sqrt[2]{2ax-x^2}$

s'il y avoit $\frac{\sqrt[2]{2ax-x^2}}{2ax-x^2}$; on trouveroit $\frac{1}{\sqrt[2]{2ax-x^2}} = \frac{\sqrt[2]{2ax-x^2}}{2ax-x^2}$.

Si l'on a $\frac{\frac{\sqrt[2]{x+a}}{\sqrt{a}}}{\frac{\sqrt[2]{x-a}}{\sqrt[2]{a}}}$ à réduire à une expression qui soit plus simple; il n'y a qu'à effacer le diviseur $\sqrt{a}$ du numerateur & du dénominateur qui sont chacun une fraction, &

* 109. l'on aura l'expression équivalente * $\frac{\sqrt[2]{x+a}}{\sqrt[2]{x-a}}$.

REMARQUE.

On voit clairement par les exemples précedens comment on peut faire passer une incommensurable du numerateur au dénominateur, ou du dénominateur au numerateur, sans changer la valeur de l'expression. Les Commençans doivent

faire attention que toute grandeur entiere peut être regardée comme une fraction dont le dénominateur est l'unité, & que quand la grandeur est entiere comme $x\sqrt[2]{x^2 - a^2}$, pour faire passer l'incommensurable au dénominateur, il faut concevoir $x\sqrt[2]{x^2 - a^2} = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{1}$, & multiplier le numerateur & le dénominateur par $\sqrt{x^2 - a^2}$, & l'on aura $\frac{x^3 - a^2 x}{\sqrt[2]{x^2 - a^2}} = x\sqrt{x^2 - a^2}$.

Cette maniere de réduire une grandeur qui contient une incommensurable à des expressions équivalentes, en multipliant ou divisant le numerateur & le dénominateur par une même grandeur ou par des grandeurs égales, sert aussi à faire en sorte qu'il se trouve sous le signe quelque grandeur commensurable qu'on puisse tirer hors du signe, ce qui peut faire changer l'expression en beaucoup de formes qui peuvent être utiles dans l'analyse, ce que l'on va faire voir par des exemples simples & generaux.

On ne sçauroit tirer aucune grandeur commensurable hors du signe dans $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$: supposé qu'on ait besoin de rendre le numerateur commensurable, il n'y a qu'à multiplier le numerateur & le dénominateur par $\sqrt[n]{a^{n-1}}$, & l'on aura $\sqrt[n]{\frac{a^{n-1+1}}{a^{n-1}b}} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{a^{n-1}b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}}$.

Si c'est le dénominateur qu'on veuille rendre commensurable, il faut multiplier par $\sqrt[n]{b^{n-1}}$, & l'on aura $\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{ab^{n-1}}$.

On peut même tirer hors du signe d'une incommensurable telle grandeur qu'on voudra, & qui soit au numerateur ou au dénominateur, quoique l'incommensurable n'ait pour dénominateur ou pour numerateur que l'unité. Par exemple, si l'on veut tirer hors du signe de l'incommensurable $\sqrt[n]{a}$ la grandeur donnée b, & qu'elle soit au numerateur ou au dénominateur, il faut multiplier le numerateur & le dénominateur par $\sqrt[n]{b^n}$, & l'on aura $\frac{\sqrt[n]{a}}{1} = \frac{\sqrt[n]{ab^n}}{\sqrt[n]{b^n}} = b\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{ab^n}$.

On voudroit que $\sqrt[3]{2}$ eût hors du signe $\frac{1}{2}$ ou 2, il faut multiplier le numerateur & le dénominateur par $\sqrt[3]{4}$, & l'on aura $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{8}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{\frac{2}{4}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

REMARQUE.

LES exemples qu'on a donnez de la 4[e] maniere suffisent pour faire voir comment on peut changer l'expression d'une incommensurable en une infinité d'autres équivalentes en multipliant son numerateur & son dénominateur par une même grandeur.

Voici une 5[e] maniere de trouver des expressions équivalentes d'une même incommensurable qui a une grandeur sous le signe & une grandeur hors du signe; (quand il n'y a pas de grandeur hors du signe, l'unité peut toujours être regardée comme la grandeur hors du signe, $\sqrt[3]{a} = 1\sqrt[3]{a}$.) Cette 5[e] maniere n'est que la quatriéme exprimée d'une autre façon; & elle est d'usage dans le calcul des puissances par les exposans, (qu'on rendra general dans la suite,) pour donner differentes formes à une grandeur dont une partie est hors du signe, & l'autre sous le signe, sans en changer la valeur.

361. Cette 5[e] *maniere* consiste à multiplier la grandeur qui est hors du signe, & à diviser en même temps la grandeur qui est sous le signe par une même grandeur; ou bien à diviser la grandeur qui est hors du signe, & à multiplier en même temps celle qui est sous le signe, par une même grandeur. Il est évident que cela n'en doit point changer la valeur, & que par cette operation on multiplie le numerateur & le dénominateur par une même grandeur; car $a \times \frac{b}{1} = ac \times \frac{b}{c}$; comme aussi $\frac{a}{1} \times b = \frac{a}{c} \times bc$.

EXEMPLES.

EN multipliant dans $x^4 \sqrt[3]{ax^8}$, x^4 par x^3, & en divisant en m me temps $\sqrt[3]{ax^8}$ par x^3 réduite à $\sqrt[3]{x^6} = x^3$, on changera $x^4 \sqrt[3]{ax^8}$ en $x^{4+3} \frac{\sqrt[3]{ax^8}}{\sqrt[3]{x^6}} =$ * $x^7 \sqrt[3]{ax^2}$ qui est équivalente à $x^4 \sqrt[3]{ax^8}$. * 109.

En multipliant dans $x^4 \times \frac{1}{\sqrt[3]{ax^3}}$, x^4 par x^n, en divisant

$\frac{1}{\sqrt[3]{ax^3}}$ par $\sqrt{x^4} = x^2$ on la changera en $x^{4+2} \times \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{ax^3}}}{\sqrt{x^4}} = x^6 \times \frac{1}{\sqrt[3]{ax^3} \times \sqrt{x4}} = x^6 \times \frac{1}{\sqrt[3]{ax^7}}$ qui eſt équivalente à $x^4 \times \frac{1}{\sqrt[3]{ax^3}}$.

En diviſant dans $\overline{3ax^3 + 4x^4} \times \sqrt[3]{ax + x^2}$, ce qui eſt hors du ſigne par x; & multipliant en même temps par $\sqrt[3]{x^2} = x$, ce qui eſt ſous le ſigne, on la changera en $\overline{3ax^2 + 4x^3} \times \sqrt[3]{ax + x^2} \times \sqrt[3]{x^2} = \overline{3ax^2 + 4x^3} \times \sqrt[3]{ax^3 + x^4}$.

D'où l'on voit qu'en general on peut faire les changemens ſuivans dans toutes les incommenſurables qui peuvent être repréſentées par $gx^m \sqrt[p]{ax + bx^n + cx^{2n}}$ &c. ſans en changer la valeur. 1°. On peut multiplier gx^m par x élevée à telle puiſſance qu'on voudra, comme par x^q, & diviſer en même temps la partie qui eſt ſous le ſigne par $\sqrt[p]{x^{pq}} = x^q$, & l'on aura $gx^{m+q} \frac{\sqrt[p]{ax + bx^n + cx^{-n}}}{\sqrt[p]{x^{pq}}}$ &c. qui deviendra, en

* 149. & 440. faiſant la diviſion par le moyen des expoſans, * $gx^{m+q} \sqrt[p]{ax^{1-pq} + bx^{n-pq} + cx^{2n-pq} + \&c.}$ qu'on pourra auſſi écrire de cette maniere * $gx^{m+q} \times$ *153.

$\overline{ax^{1-pq} + bx^{n-pq} + cx^{2n-pq} +}^{\frac{1}{p}}$ &c.

Si l'on veut repréſenter l'expoſant rompu $\frac{1}{p}$ par une lettre r, en ſuppoſant $r = \frac{1}{p}$, on trouvera en multipliant chacune de ces grandeurs égales par p, $pr = 1$; & en diviſant chaque membre de cette derniere égalité par r, on aura $p = \frac{1}{r}$. En ſubſtituant dans l'expreſſion précedente r à la place de $\frac{1}{p}$, & $\frac{1}{r}$ à la place de p, elle deviendra, ſans changer de valeur,

$gx^{m+q} \times \overline{ax^{1-\frac{q}{r}} + bx^{n-\frac{q}{r}} + cx^{2n-\frac{q}{r}}}^{r} + \&c.$

On peut auſſi diviſer gx^m par x^q, & multiplier ce qui eſt ſous le ſigne par $\sqrt[p]{x^{pq}} = x^q$, & l'on aura $gx^{m-q} \sqrt[p]{ax + bx^n + cx^{2n}} \times \sqrt[p]{a^{pq}}$ qui diviendra, en faiſant la multiplication par le moyen des expoſans, * $gx^{m-q} \sqrt[p]{ax^{1+pq} + bx^{n+pq} + cx^{2n+pq}} +$ &c. *148 & qu'on pourra auſſi écrire de cette maniere $gx^{m-q} \times$ 427.

$\overline{ax^{1+pq} + bx^{n+pq} + cx^{2n+pq} + \&c.}^{\frac{1}{p}}$ En ſuppoſant comme ci-

dessus $r = \frac{1}{p}$; d'où l'on déduira $p = \frac{1}{r}$; & en substituant dans l'expression précedente r à la place de $\frac{1}{p}$; & $\frac{1}{r}$ à la place de p ; elle deviendra, sans changer de valeur,

$gx^{m-q} \times \overline{ax^{1+\frac{q}{r}} + bx^{n+\frac{q}{r}} + cx^{2+\frac{q}{r}} + \&c.}^{r}$

2°. On peut faire en sorte que, dans la grandeur complexe qui est sous le signe, le premier terme ax demeure sans x, c'est à dire, devienne simplement a ; ou que le dernier terme cx^{2n} devienne sans x^{2n} ou soit simplement c.

Pour faire que a demeure seule sans x, il faut diviser ce qui est sous le signe par $\sqrt[p]{x}$, & multiplier en même temps ce qui est hors du signe par $\sqrt[p]{x}$, & l'on aura $gx^m \times \sqrt[p]{x} \times$

*149 & 440. $\frac{\sqrt[p]{ax + bx^n + cx^{2n}}}{\sqrt[p]{x}} =$ * $gx^m \sqrt[p]{x} \times \sqrt[p]{a + bx^{n-1} + cx^{2n-1}}$ qui deviendra (en se servant de l'expression des exposans au lieu des signes)

$gx^{m+\frac{1}{p}} \times \overline{a + bx^{n-1} + cx^{2n-1}}^{\frac{1}{p}} =$ (en supposant $r = \frac{1}{p}$) $gx^{m+r} \times \overline{a + bx^{n-1} \times cx^{2n-1} + \&c.}^{r}$ où l'on voit que le terme a sous le signe, n'a plus x, & cependant l'expression est équivalente à $gx^m \sqrt[p]{ax + bx^n + cx^{2n}}$.

Pour faire en sorte que ce soit le terme cx^{2n} sous le signe, qui devienne c sans x^{2n} ; il faut diviser la grandeur qui est sous le signe par $\sqrt[p]{x^{2n}}$, & multiplier en même temps par $\sqrt[p]{x^{2n}}$ celle qui est hors du signe, & l'on trouvera $gx^m \times \sqrt[p]{x^{2n}} \times$

*149 & 440. $\frac{\sqrt[p]{ax + bx^n + cx^{2n}}}{\sqrt[p]{x^{2n}}} =$ * $gx^m \sqrt[p]{x^{2n}} \times \sqrt[p]{ax^{1-2n} + bx^{n-2n} + cx^{2n-2n}}$

153. $=$ (en se servant de l'expression des exposans sans les signes radicaux) $gx^{m+\frac{2n}{p}} \times \overline{c + bx^{-n} + ax^{-2n+1}}^{\frac{1}{p}} =$ (en supposant $r = \frac{1}{p}$) $gx^{m+2nr} \times \overline{c + bx^{-n} + ax^{-2n+1}}^{r}$; le terme cx^{2n} est devenu c sans x^{2n}, & cette expression est équivalente à la proposée.

DÉFINITION.

DE'FINITION.

462. UNE ſuite de pluſieurs grandeurs incommenſurables dont les ſignes radicaux ont le même expoſant jointes par les ſignes $+$ & $-$, comme $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d}$, &c. ſera nommé *une ſuite d'incommenſurables:* on la diſtingue par termes; chaque incommenſurable fait un terme; quand il y a une ou pluſieurs grandeurs commenſurables, comme dans $a + f - \sqrt{b} + \sqrt{c}$, toutes les commenſurables $a + f$ ne font qu'un ſeul terme; & s'il y avoit des grandeurs incommenſurables qui fuſſent commenſurables entr'elles, elles ne feroient auſſi qu'un ſeul terme; ainſi la ſuite $a + f - \sqrt{b} + \sqrt{a^2b}$ ne contient que deux termes, $a + f$ n'en faiſant qu'un, & $- \sqrt{b} + a\sqrt{b}$ n'en faiſant auſſi qu'un ſeul qui eſt $\overline{a - 1} \times \sqrt{b}$.

Quand une de ces ſuites a deux termes, on l'appelle *un binome;* ſi elle en a trois, *un trinome*, &c.

On donne ici à ces ſommes d'incommenſurables le nom de *ſuites* pour les diſtinguer des *incommenſurables complexes*, comme $\sqrt[p]{a + bx^n + cx^{2n} +}$ &c. parceque le calcul de ces dernieres eſt le même que le calcul des incommenſurables incomplexes $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, &c. qu'on a expliqué juſqu'ici.

On fera pourtant diſtinguer de deux ſortes dincommenſurables complexes. Les unes, comme $\sqrt{a + bx + dx^2}$, ne contiennent ſous le ſigne que des grandeurs commenſurables, les autres ont ſous le même ſigne parmi leurs termes des incommenſurables, comme $\sqrt{a + \sqrt{a + b}}$. Le calcul de ces dernieres a du rapport avec le calcul *des ſuites d'incommenſurables* qu'on va expliquer; c'eſt pourquoi on a différé juſqu'ici d'en donner des exemples.

SECTION VII.

Où l'on explique le calcul des suites d'incommensurables.

L'Addition & la Soustraction.

PROBLÊME I.

463. *AJOUTER une suite d'incommensurables à une autre, ou la retrancher d'une autre. On suppose que tous les signes radicaux dans l'une & l'autre ont le même exposant.*

Regle ou Operation. On les écrira d'abord l'une sous l'autre, observant quand il y a des termes incommensurables dans l'une & l'autre, qui sont commensurables entr'eux, de les écrire les uns sous les autres, * les ayant réduits auparavant à la plus simple expression. On ajoutera ensuite les termes commensurables entr'eux comme si c'étoient des grandeurs commensurables, & on joindra tous les autres les uns aux autres avec leur signe, & l'on aura leur somme.

* 429.

La soustraction se fera en ôtant les termes de la suite à retrancher, des termes de l'autre suite qui leur sont commensurables quand il y en a, comme dans la soustraction des grandeurs commensurables, & on ôtera les autres termes en les joignant par des signes + & — opposez aux leur, aux termes de la suite dont on doit faire la soustraction.

EXEMPLES.

ADDITION.

$$a + 2\sqrt[2]{ab} + 3\sqrt[2]{ac}$$
$$b - \sqrt[2]{ab} + 5\sqrt[2]{ac}$$

Somme $a + b + \sqrt[2]{ab} + 8\sqrt[2]{ac}$.

SOUSTRACTION.

$$a + 2\sqrt[2]{ab} + 3\sqrt[2]{ac}$$
$$b - \sqrt[2]{ab} + 5\sqrt[2]{ac}$$

Difference $a - b + 3\sqrt[2]{ab} - 2\sqrt[2]{ac}$

ADDITION.

$$\overline{3a + 5b} \times x\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} + 3\sqrt[3]{a-y}$$
$$+ 2b\, x\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} - 2\sqrt[3]{a+y}$$

Somme $\overline{3a + 7b} \times x\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} + 3\sqrt[3]{a-y} - 2\sqrt[3]{a+y}$

SOUSTRACTION.

$$\overline{3a + 5b} \times x\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} + 3\sqrt[3]{a-y}$$

$$+ \; 2bx\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} - 2\sqrt[3]{a+y}$$

Difference $\overline{3a + 3b} \times x\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} + 3\sqrt[3]{a-y} + 2\sqrt[3]{a+y}$.

Pour les incommensurables complexes qui ont sous leurs signes d'autres incommensurables.

464. POUR faire voir clairement que ces sortes d'incommensurables complexes peuvent quelquefois se réduire à une plus simple expression, on fera remarquer que quand on veut multiplier $\sqrt[n]{a+bx}$ par x, (on trouve d'abord $x\sqrt[n]{a+bx}$.) & l'on fait passer le multiplicateur x réduit à $\sqrt[n]{x^n}$ sous le signe de $\sqrt[n]{a+bx}$, * en multipliant $a + bx$ par x^n, & l'on trouve $\sqrt[n]{ax^n + bx^{n+1}}$. On multiplie de même $\sqrt[n]{a + \sqrt[n]{bx}}$ par x; (ce qui donne d'abord $x\sqrt[n]{a + \sqrt[n]{bx}}$;) & l'on fait passer x réduit à $\sqrt[n]{x^n}$ sous le signe, en multipliant $a + \sqrt[n]{bx}$ par x^n, & on trouve $\sqrt[n]{ax^n + x^n\sqrt[n]{bx}}$. * 428.

Cet exemple $\sqrt[n]{ax^n + x^n\sqrt[n]{bx}}$ (qui représente en general toutes les incommensurables complexes semblables) fait voir évidemment que quand une grandeur x^n, qui multiplie tous les termes de la grandeur complexe qui est sous le signe radical, est elle-même une puissance parfaite dont l'exposant n est celui du signe sous lequel est la grandeur complexe, on peut alors faire passer hors du signe la racine x de cette puissance parfaite x^n, & l'on a $\sqrt[n]{ax^n + x^n\sqrt[n]{bx}}$ réduite à sa plus simple expression $x\sqrt[n]{a + \sqrt[n]{bx}}$

Cela montre que pour réduire $\sqrt[3]{a^3b + a^3c\sqrt[3]{d}}$ à sa plus simple expression, il faut écrire $a\sqrt[3]{b + c\sqrt[3]{d}}$.

Pour réduire $\sqrt[3]{b^3c + \sqrt{b^4c^2d}}$ à sa plus simple expression, il faut d'abord réduire $\sqrt[2]{b^4c^2d}$ à sa plus simple expression $b^2c\sqrt[2]{d}$, & l'on a $\sqrt[3]{b^3c + b^2c\sqrt[2]{d}}$, qu'on réduit ensuite à sa plus simple expression $b\sqrt[3]{c + c\sqrt[2]{d}}$.

De même pour réduire $\sqrt{8+\sqrt{32}}$ à sa plus simple expression, il faut commencer par réduire $\sqrt{32}$ à $4\sqrt{2}$, & l'on a $\sqrt{8+4\sqrt{2}}$ qu'on réduit enfin à $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Il suit de là que si deux incommensurables complexes de cette sorte, etant réduites à leur plus simple expression, contiennent sous le signe les mêmes grandeurs; elles se-
*75 & 109. ront commensurables entr'elles. Car il est visible * que $3\sqrt{2+\sqrt{2}}$ est à $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ comme 3 à 2; puisque 3 & 2 sont multipliez par la grandeur $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

REMARQUES.

1.

465. IL est évident que ce qu'on vient d'expliquer par rapport aux incommensurables complexes $x\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{bx}}$ convient aussi aux incommensurables complexes $x\sqrt[n]{a+\sqrt[p]{bx}}$ qui ont des termes incommensurables dont le signe radical a un exposant p different de l'exposant n du signe radical principal $\sqrt[n]{}$ sous lequel sont tous les termes.

2.

466. On réduit ces incommensurables complexes, quand elles
*452. ont des signes differens, à un même signe, * comme les autres incommensurables; par exemple, pour réduire $\sqrt{b+\sqrt[3]{cd}}$ & $\sqrt[3]{a^2-a\sqrt[3]{bc}}$ à un même signe $\sqrt[6]{}$, on élevera $b+\sqrt[3]{cd}$ à la troisiéme puissance, & $a^2-a\sqrt[3]{bc}$ à la 2ᵉ; & l'on aura $\sqrt[6]{b^3+3bcd+\overline{3b^2+cd}\times\sqrt[3]{cd}}$, & $\sqrt[6]{a^4-2a^3\sqrt[3]{bc}+a^2\sqrt[3]{b^2c^2}}$ qui sont équivalentes aux proposées; & si l'on veut que les signes radicaux des termes qui sont sous le signe principal $\sqrt[6]{}$,
*452. ayent aussi le signe $\sqrt[6]{}$, on changera $\sqrt[3]{cd}$ * en son équivalante $\sqrt[6]{c^2d^2}$, $\sqrt[3]{bc}$ en son équivalante $\sqrt[6]{b^2c^2}$, & enfin $\sqrt[3]{b^2c^2}$ en son équivalante $\sqrt[6]{b^4c^4}$, & on écrira ces nouveaux termes dans les grandeurs complexes proposées à la place des termes ausquels ils sont équivalans.

467. Pour ajouter ou soustraire ces sortes d'incommensurables complexes, il faut réduire à leur plus simple expression celles qui peuvent y être réduites, & les réduire aussi à avoir

un même signe : on fera ensuite l'addition ou la soustraction comme dans le Problême précedent.

EXEMPLE.

ADDITION.

$ab + 3a\sqrt[2]{b} + c\sqrt[2]{d}$

$2ab - a\sqrt[2]{b} + c\sqrt[2]{d}$

Somme $3ab + 2a\sqrt[2]{b} + c\sqrt[2]{d}$.

SOUSTRACTION.

$ab + 3a\sqrt[2]{b} + c\sqrt[2]{d}$

$2ab - a\sqrt[2]{b} + c\sqrt[2]{d}$

Difference $- ab + 4a\sqrt[2]{b} + c\sqrt[2]{d}$

La Multiplication.

PROBLÊME II.

468. *MULTIPLIER une suite d'incommensurables par une autre. On suppose que les signes radicaux de l'une & de l'autre suite ont tous le même exposant.*

Regle ou Operation. Il faut multiplier successivement tous les termes d'une suite par chacun des termes de l'autre, observant * la regle des signes + & —, de la multiplication ; * 95.
ajouter tous les produits dans une somme : ce sera le produit qu'on cherche. S'il se trouvoit dans l'une des suites ou dans les deux, plusieurs termes commensurables entr'eux, il faudroit réduire tous ces termes d'une même suite en un seul, les réduisant d'abord à leur plus simple expression, & les ajoutant ensuite en un seul terme. Il faut de même réduire en un seul terme tous les termes, du produit qu'on trouvera, qui seront commensurables entr'eux.

EXEMPLES.

$\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$

$\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$

$a + \sqrt[2]{ab}$

$+ \sqrt[2]{ab} + b$

Produit $a + b + 2\sqrt[2]{ab}$

$a + b + 2\sqrt[2]{ab}$

$\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$

$a\sqrt[2]{a} + b\sqrt[2]{a} + 2a\sqrt[2]{b}$

$+ a\sqrt[2]{b} + b\sqrt[2]{b} + 2b\sqrt[2]{a}$

Produit. $\overline{a + 3b} \times \sqrt[2]{a} + \overline{3a + b} \times \sqrt[2]{b}$ 3e puiss. de $\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$

$$a^2 + 3a\sqrt[3]{\tfrac{a^2}{b}} - 4b\sqrt[3]{c}$$
$$1 - 2a\sqrt[3]{\tfrac{a^2}{b}} + 5b\sqrt[3]{b}$$

$$a^2 + 3a\sqrt[3]{\tfrac{a^2}{b}} - 4b\sqrt[3]{c}$$
$$- 2a^3\sqrt[3]{\tfrac{a^2}{b}} - 6a^3\sqrt[3]{\tfrac{a}{b^2}} + 8ab\sqrt[3]{\tfrac{a^2c}{b}}$$
$$+ 5a^2b\sqrt[3]{b} + 15ab\sqrt[3]{a^2} - 20b^2\sqrt[3]{bc}$$

Prod. $a^2 + \overline{3a - 2a^3} \times \sqrt[3]{\tfrac{a^2}{b}} - 4b\sqrt[3]{c} - 6a^3\sqrt[3]{\tfrac{a}{b^2}} + 8ab\sqrt[3]{\tfrac{a^2c}{b}} + 5a^2b\sqrt[3]{b} + 15ab\sqrt[3]{a^2} - 20b^2\sqrt[3]{bc}$

Exemple où il y a des grandeurs imaginaires.

multiplié $x^2 + x\sqrt[2]{-k^2} - j^2$
$$- x\sqrt[2]{-l^2} + j\sqrt[2]{-k^2}$$
$$+ j\sqrt[2]{-l^2}$$
$$- \sqrt[2]{-k^2} \times \sqrt[2]{-l^2}$$

multiplicateur $x + j + \sqrt[2]{-l^2}$

$$x^3 + x^2\sqrt{-k} - j^2x$$
$$- x^2\sqrt[2]{-l^2} + jx\sqrt[2]{-k^2}$$
$$+ jx\sqrt[2]{-l^2}$$
$$- x\sqrt[2]{-k^2} \times \sqrt{-l^2}$$
$$+ jx^2 \qquad + jx\sqrt[2]{-k^2} \qquad - j^3$$
$$- jx\sqrt[2]{-l^2} \qquad + j^2\sqrt[2]{-k^2}$$
$$+ j^2\sqrt[2]{-l^2}$$
$$- j\sqrt[2]{-k^2} \times \sqrt[2]{-l^2}$$
$$+ x^2\sqrt[2]{-l^2} + x\sqrt[2]{-k^2} \times \sqrt[2]{-l^2} - j^2\sqrt[2]{-l^2}$$
$$+ l^2x \qquad + j\sqrt[2]{-k^2} \times \sqrt[2]{-l^2}$$
$$- jl^2$$
$$+ l^2\sqrt[2]{-k^2}$$

---

produit $x^3 + x^2\sqrt[2]{-k^2} - j^2x \qquad - j^3$
$$+ jx^2 \qquad + 2jx\sqrt[2]{-k^2} \qquad + j^2\sqrt[2]{-k^2}$$
$$+ l^2x \qquad - jl^2$$
$$+ l^2\sqrt[2]{-k^2}$$

Si on multiplie ce produit par $x - j - \sqrt[2]{-k^2}$, on trouvera le produit

$$x^4 \left.\begin{array}{l} -\ 2j^2 \\ +\ k^2 \\ +\ l^2 \end{array}\right\} \times x^2 \left.\begin{array}{l} +\ 2jk^2 \\ -\ 2jl \end{array}\right\} \times x \begin{array}{l} +\ j^4 \\ +\ j^2k^2 \\ +\ j^2l^2 \\ +\ k^2l^2 \end{array}$$

Exemple ſur les incommenſurables complexes qui ont des incommenſurables parmi leurs termes.

469. SI l'on avoit $a\sqrt[n]{a+b}$ à multiplier par $b\sqrt[n]{c+d}$, il eſt évident * que le produit ſeroit $ab\sqrt[n]{ac+bc+ad+bd}$. D'où *431. l'on voit que dans les incommenſurables complexes il faut multiplier, 1°, ce qui eſt hors du ſigne dans le multiplié par ce qui eſt hors du ſigne dans le multiplicateur, (ce qui donne ab;) 2°. ce qui eſt ſous le ſigne par ce qui eſt ſous le ſigne ; & écrire pour le produit total $ab\sqrt[n]{ab+bc+ad+bd}$. Cela ſuffit pour faire concevoir la multiplication des incommenſurables complexes qui ont des incommenſurables parmi leurs termes : il faut ſeulement obſerver, 1°, qu'on multiplie à part les grandeurs commenſurables qui ſont hors du ſigne principal dans le multiplié & dans le multiplicateur; & dans le produit total on les écrit au devant du ſigne principal comme l'on le voit dans les exemples.

2°. Que dans les multiplications partiales on ne fait point d'attention au ſigne principal du multiplié & du multiplicateur (qui doit y avoir le même expoſant,) & l'on multiplie les grandeurs qui ſont ſous le ſigne principal du multiplié par les grandeurs qui ſont ſous le ſigne principal du multiplicateur, comme s'il n'y avoit point de ſigne principal dans l'un & dans l'autre; mais on a ſoin de remettre le ſigne principal dans le produit total.

3°. Que quand tous les termes de la grandeur complexe, qui eſt ſous le ſigne principal, ſont incommenſurables, comme dans $a\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{b}}$, le ſigne du terme le plus à gauche $\sqrt[n]{a^{n-1}}$ n'influe point ſur le terme ſuivant, quand il n'y a pas de ligne tirée de ce ſigne pour couvrir le terme ſuivant à droite. Il en eſt de même dans $b\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{c}}$. Ainſi pour faire

les multiplications partiales de la 1[re] par la 2[e], on multiplie d'abord $\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{b}$ par $\sqrt[n]{a}$, & ensuite par $\sqrt[n]{c}$. Après avoir pris la somme de ces produits, on écrit au devant le signe principal, on tire une ligne qui couvre le produit total, & on écrit au devant du signe principal le produit *ab* des commensurables.

4°. Enfin, quand on a formé le produit total, on le ré-
* 464. duit * à sa plus simple expression, quand cela se peut, comme on le voit dans le 4[e] exemple.

EXEMPLES.

I.

$$a\sqrt[2]{a + \sqrt[2]{bc}}$$
$$a\sqrt[2]{c - \sqrt[2]{bc}}$$

$$a^2\left\{\begin{array}{l} ac + c\sqrt[2]{bc} \\ \quad - a\sqrt[2]{bc} - bc \end{array}\right.$$

Produit $a^2\sqrt[2]{ac - bc - \overline{a + c} \times \sqrt[2]{bc}}$

EXEMPLE II.

$$a\sqrt[n]{a \quad + \sqrt[n]{b^{n-1}}}$$
$$b\sqrt[n]{a^{n-1} - \sqrt[n]{b^3}}$$

$$ab\left\{\begin{array}{l} a^n \quad + a^{n-1}\sqrt[n]{b^{n-1}} \\ \quad - a\sqrt[n]{b^3} - b \end{array}\right.$$

Produit $ab\sqrt[n]{a^n - b + a^{n-1}\sqrt[n]{b^{n-1}} - a\sqrt[n]{b^3}}$

EXEMPLE III.

$$a\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{b}}$$
$$b\sqrt[n]{\sqrt[n]{a} \quad + \sqrt[n]{c}}$$

$$ab\left\{\begin{array}{ll} a & + \sqrt[n]{ab} \\ & + \sqrt[n]{a^{n-1}c} + \sqrt[n]{bc} \end{array}\right.$$

Produit $ab\sqrt[n]{a \quad + \sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{a^{n-1}c} + \sqrt[n]{bc}}$

EXEMPLE

EXEMPLE IV.

$$\sqrt[3]{\sqrt{a^3} + \sqrt{a^2b}}$$
$$\sqrt[3]{\sqrt{a^4c} + \sqrt{a^2d}}$$

$$\sqrt[3]{a^5c} + \sqrt[3]{a^4bc}$$
$$+ \sqrt[3]{a^5d} + \sqrt[3]{a^4bd}$$

Produit $\sqrt[3]{a^2\sqrt{ac} + a^2\sqrt{bc} + a^2\sqrt{ad} + a\sqrt{bd}} =$
$= a\sqrt[3]{\sqrt{ac} + \sqrt{bc} + \sqrt{ad} + \sqrt{bd}}$

EXEMPLE V.

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}$$
$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}$$

$$+ \tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{2}q\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}$$
$$+ \tfrac{1}{2}q\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3} + \tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3$$

Produit $\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3 + q\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{2|7}p^3}}$

EXEMPLE VI.

Si on multiplie la grandeur $\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}$ par elle-même, on trouvera le même produit que dans le 5e Exemple, avec cette seule difference qu'il y aura le signe — devant le terme incommensurable $q\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}$.

EXEMPLE VII.

Si on multiplie $\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}$, qu'on nommera a; par $\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}$, qu'on nommera b; on trouvera que le produit ab sera $\sqrt[3]{\tfrac{1}{27}p^3} = \tfrac{1}{3}p$; parceque toutes les autres grandeurs du produit se détruiront par des signes opposez + & —, & qu'il ne restera sous le signe $\sqrt[3]{}$ que la grandeur $\tfrac{1}{27}p^3$.

EXEMPLE VIII.

$$\begin{aligned}\text{A}\quad & x^2 + x\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}^{\,2} - p \\ & + x\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}} + 2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}} \times \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt[2]{\tfrac{1}{2}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}} \\ & + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}^{\,2}\end{aligned}$$

$$\text{B}\quad x - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}$$

. . . .

$$\begin{aligned}\mathit{A}\quad & x^2 + ax - p \\ & + bx + a^2 \\ & + 2ab \\ & + b^2\end{aligned}$$

$$\mathit{B}\quad x - a - b$$

$$\begin{aligned}\text{C}\quad & x^3 * - px + ap \\ & + bp \\ & - a^3 \\ & - 3a^2b \\ & - 3ab^2 \\ & - b^3\end{aligned}$$

. . . .

$$\mathit{C}\quad x^3 - px + q$$

Si l'on proposoit de multiplier la grandeur A par la grandeur B, on pourroit, pour abreger le calcul, supposer $a = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}$, & $b = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}$, & l'on changeroit par ce moyen le multiplié A en *A*, & le multiplicateur B en *B*: faisant la multiplication de *A* par *B*, on trouveroit le produit *C*; & substituant dans le dernier terme de *C*, les valeurs de $-a^3$, de $-b^3$, de $-3a^2b$, de $-3ab^2$, on le réduiroit à la seule grandeur $+q$, & le produit C deviendroit *C* $x^3 - px + q$.

Car, 1°, il est évident que $a^3 = -\frac{1}{2}q - \sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$, & que $b^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$; ainsi $-a^3 - b^3 = +\frac{1}{2}q + \sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3} + \frac{1}{2}q - \sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3} = +q$. 2°. Par le 7e exemple $ab = \frac{1}{3}p$; d'où l'on déduit $-3a \times ab = -ap$, & $-3ab \times b = -bp$; ainsi $+ap - 3a^2b = 0$, $+bp - 3ab^2 = 0$ & $-a^3 - b^3 = +q$.

REMARQUE.

Il est bon de remarquer les avantages que l'on tire pour la facilité du calcul, de la maniere d'abreger des expressions fort composées par d'autres plus simples, & même par une seule lettre, quand cela se peut, comme dans le 8e exemple.

PROBLÊME III.

470. *Ayant une fraction dont le dénominateur est une suite d'incommensurables de tant de termes qu'on voudra, & dont le numerateur est une grandeur quelconque (on supposera ici, pour tourner toute l'attention des Commençans à ce qu'il y a de principal dans le Problême, que le numerateur est l'unité) la changer en une autre fraction équivalente dont le dénominateur soit une grandeur commensurable ; c'est à dire ôter toutes les incommensurables du dénominateur ; & trouver les formules propres à délivrer ainsi le dénominateur d'une fraction de toutes les incommensurables qu'il peut contenir, sans changer la valeur de la fraction. On supposera que tous les signes radicaux du dénominateur ont 2 pour exposant.*

Remarques pour la résolution du Problême.

Par exemple, $\frac{1}{\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b} + \sqrt{c} + \sqrt[2]{d} + \sqrt[2]{e} + \&c.}$ peut représenter une des fractions de ce Problême; il s'agit de délivrer le dénominateur de cette fraction de toutes les incommensurables qu'il contient, sans changer la valeur de la fraction.

On remarquera, 1°, qu'en multipliant les deux termes d'une fraction par un même multiplicateur, * on n'en change point la valeur. 2°. qu'en multipliant une incommensu- *75.

rable par elle-même, de façon qu'on éleve la grandeur qui eſt ſous le ſigne à la puiſſance dont l'expoſant eſt celui du ſigne, on la rend commenſurable; par exemple, $\sqrt[2]{a} \times \sqrt[2]{a} = a$. $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a$; & ainſi des autres. 3°. que dans la multiplication d'une grandeur complexe comme $a + b + c +$ &c. par la même grandeur, ſi l'on change ſeulement dans le multiplicateur le ſigne + ou — d'un ou de deux ou de pluſieurs termes, il arrive par là que l'on trouve des produits particuliers qui ſe détruiſent par des ſignes oppoſez + & —, & qu'il y a dans le produit total moins de termes qu'il n'y en auroit, ſi l'on n'avoit pas changé le ſigne + ou — de quelques-uns des termes. Ainſi $\overline{a+b} \times \overline{a-b} = a^2 - b^2$. 4°. qu'enfin, en prenant pour les exemples des fractions qui ayent pour dénominateurs des ſuites d'incommenſurables litterales, leſquels dénominateurs ayent d'abord deux termes, puis trois, après quatre, & ainſi de ſuite; on trouvera par le Problême des multiplicateurs en lettres propres à délivrer d'incommenſurables les dénominateurs des fractions qui auront deux termes, trois termes, quatre termes d'incommenſurables, & ainſi de ſuite; & que ces multiplicateurs exprimez par des lettres feront autant de *formules* pour délivrer d'incommenſurables les dénominateurs des fractions particulieres qui auront deux termes, trois termes, & ainſi de ſuite.

Réſolution du Problême. *Regle ou Operation*. 1°. Pour faciliter le calcul il faut repréſenter les incommenſurables du dénominateur chacune par une lettre ſans ſigne radical; par ex. $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+b+c}$, $\frac{1}{a+b+c+d}$, $\frac{1}{a+b+c+d+e}$, & ainſi de ſuite, repréſenteront les fractions dont le dénominateur a deux, trois, quatre, cinq incommenſurables, &c.

2°. Il faut operer par ordre, premierement, ſur la fraction de deux incommenſurables, puis ſur celle de trois, après ſur celle de quatre, & ainſi de ſuite; & chercher pour chacune le multiplicateur par lequel multipliant les deux termes de la fraction il vienne un produit du dénominateur où il n'y ait plus d'incommenſurables.

3°. Pour trouver ce multiplicateur il faut multiplier le ſeul dénominateur tel qu'il eſt par le dénominateur même, après

avoir changé le ſigne + ou — de l'un de ſes termes, quand il n'en a que deux ou trois; on change les ſignes + ou — de deux de ſes termes, quand il a quatre ou cinq termes, & ainſi des autres. Cette premiere operation ſuffit quand le dénominateur n'a que deux termes; mais quand le dénominateur en a un grand nombre, il faut abreger le produit qu'on vient de trouver, en exprimant par une ſeule lettre (élevée à la puiſſance du degré des dimenſions des termes du produit) tous les termes commenſurables du produit. Regardant ce produit comme s'il étoit le dénominateur qu'on doit délivrer d'incommenſurables, il faut le multiplier par lui-même après avoir changé le ſigne + ou — de quelques-uns des termes du multiplicateur, ce qui donnera un nouveau produit qu'on abregera comme le précedent, & qu'on multipliera de même par lui-même après avoir changé le ſigne + ou — de quelques-uns des termes du multiplicateur. Continuant ainſi d'operer, on arrivera enfin à un produit qui n'aura plus que des grandeurs commenſurables.

4°. On ſéparera du dernier produit commenſurable le dénominateur incommenſurable de la fraction donnée ; & ce qui demeurera après cette ſéparation ſera le multiplicateur qu'on cherchoit, par lequel multipliant les deux termes de la fraction donnée, on ôtera les incommenſurables de ſon dénominateur. Ce multiplicateur ſera *une formule* qui repréſentera le multiplicateur pour toutes les fractions particulieres dont le dénominateur aura le même nombre d'incommenſurables que la propoſée. Cela s'éclaircira par les exemples ſuivans.

EXEMPLES.

I.

POUR ôter les incommenſurables du dénominateur de la fraction $\frac{1}{\sqrt[2]{3}+\sqrt[2]{2}}$.

1°. On ſuppoſera $\sqrt[2]{3}=a$, $\sqrt[2]{2}=b$, & l'on aura $\frac{1}{a+b}$ qui repréſentera toutes les fractions dont le dénominateur a deux incommenſurables.

2°. Il faut multiplier $a + b$ par $a - b$, & l'on aura le produit $a^2 - b^2$ où il n'y a plus d'incommenſurables.

Ainſi $a - b$ eſt la formule qui repréſente le multiplicateur qu'il faut prendre pour ôter les incommenſurables du dénominateur des fractions repréſentées par $\frac{1}{a+b}$. Elle fait voir, par exemple, que pour ôter les incommenſurables de $\frac{1}{\sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{2}}$, il faut multiplier les deux termes par $\sqrt[2]{3} - \sqrt[2]{2}$, & l'on aura la fraction $\frac{\sqrt[2]{3} - \sqrt[2]{2}}{3 - 2 = 1}$ équivalente à la propoſée.

2.

Pour ôter les incommenſurables du dénominateur des fractions repréſentées par $\frac{1}{a+b+c}$; il faut multiplier $a + b + c$ par $a + b - c$, & l'on aura $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$. Il faut ſuppoſer (pour abreger) les commenſurables $a^2 + b^2 - c^2 = d^2$. Et le produit ſera $d^2 + 2ab$. Il faut le multiplier par $d^2 - 2ab$, & l'on aura le produit $d^4 - 4a^2b^2$ où il n'y a plus d'incommenſurables. En remettant dans ce produit la valeur de d^2, on aura $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$. On ſeparera de ce dernier produit le dénominateur $a + b + c$; ce qui ſe peut faire en prenant dans la ſuite des operations le produit $\overline{a + b - c} \times \overline{a^2 + b^2 - c^2 - 2ab} = a^3 - a^2b - a^2c - ab^2 - ac^2 + 2abc + b^3 - b^2c - bc^2 + c^3$; ou bien en diviſant le dernier produit qui n'a plus d'incommenſurables $a^4 + b^4$ &c. par $a + b + c$, & le quotient $a^3 - a^2b - a^2c - ab^2 - ac^2 + 2abc + b^3 - b^2c - bc^2 + c^3$ ſera la formule du multiplicateur dont il faut ſe ſervir pour ôter les incommenſurables du dénominateur des fractions repréſentées par $\frac{1}{a+b+c}$, & le dénominateur délivré d'incommenſurables ſera repréſenté par $a^4 + b^4 +$ &c.

3.

Pour trouver le multiplicateur qui doit ſervir à ôter les incommenſurables du dénominateur de $\frac{1}{a+b+c+d}$, il faut multiplier le dénominateur par $a + b - c - d$; & ſuppo-

fant $a^2+b^2-c^2-d^2=e^2$, le produit fera $e^2+2ab-2cd$; il faut le multiplier par $-e^2+2ab-2cd$, & fuppofant dans le produit les grandeurs commenfurables $-e^4+4a^2b^2+4c^2d^2=f^4$, le produit fera $f^4-8abcd$. Il faut le multiplier par $f^4+8abcd$, & l'on aura enfin le produit $f^8-64a^2b^2c^2d^2$, dans lequel il n'y a plus d'incommenfurables. Il ne faut plus que fubftituer dans ce produit la valeur de f^8, fubftituer dans ce qui en viendra la valeur des puiffances de e, après ces fubftitutions féparer $a+b+c+d$ de ce produit, & l'on aura le multiplicateur qu'on cherchoit.

4.

On trouvera de même le multiplicateur qui doit fervir à ôter les cinq incommenfurables du dénominateur de $\frac{1}{a+b+c+d+e}$, en multipliant d'abord ce dénominateur par $a+b+c-d-e$, ce qui donnera $a^2+b^2+c^2-d^2-e^2+2ab+2ac+2bc-2de$. Ce produit (en fuppofant $f^2=a^2+b^2+c^2-d^2-e^2$ qui font commenfurables) deviendra $f^2+2ab+2ac+2bc-2de$. On le multipliera par $-f^2+2ab+2ac+2bc+2de$, & l'on trouvera (en fuppofant les grandeurs commenfurables $-f^4+4a^2b^2+4a^2c^2+4b^2c^2-4d^2e^2=-g^4$) le produit $-g^4+4f^2de+8abc\times\overline{a+b+c}$.

On remarquera ici qu'en joignant à ce produit celui-ci $-8abc\times\overline{a+b+c+d+e}$, le produit deviendra $-g^4+4f^2de-8abc\times\overline{d+e}$ qui n'a plus que quatre termes dont trois font incommenfurables. Cela fait voir que pour arriver à un produit qui n'ait que quatre termes, il faut faire ainfi les multiplications : il faut multiplier le dénominateur propofé $a+b+c+d+e$ par $\overline{a+b+c-d-e}\times\overline{-f^2+2ab+2ac+2bc+2de}$, y joindre $\overline{a+b+c+d+e}\times-8abc$, & l'on arrivera au produit $-g^4+4f^2de-8abc\times\overline{d+e}$ qui eft égal au produit $-g^4+4f^2de+8abc\times\overline{a+b+c}-8abc\times\overline{a+b+c+d+e}$.

Pour continuer, il faut multiplier $-g^4+4f^2de-8abc\times\overline{d+e}$ par $-g^4+4f^2de+8abc\times\overline{d+e}$, & l'on trouvera

$g^8 + 16f^4d^2e^2 - 64a^2b^2c^2 \times \overline{d^2+e^2} - 2 \times 4g^4f^2 \times de - 64a^2b^2c^2 \times 2de$. On supposera les grandeurs commensurables $g^8 + 16f^4d^2e^2 - 64a^2b^2c^2 \times \overline{d^2+e^2} = h^8$, & $- 2 \times 4g^4f^2 \times de - 64a^2b^2c^2 \times 2de$ pouvant se réduire à $+ \overline{g^4f^2 + 16a^2b^2c^2} \times - 8de$, on supposera (pour abreger le calcul) les grandeurs commensurables $+ g^4f^2 + 16a^2b^2c^2 = l^6$, & le produit qu'on vient de trouver sera $h^8 - 8l^6de$ qui n'a plus que deux termes, dont un seul est incommensurable.

Enfin on multipliera $h^8 - 8l^6de$ par $h^8 + 8l^6de$, & l'on aura le produit $h^{16} - 64l^{12}d^2e^2$ qui n'a plus d'incommensurables.

On separera de ce produit le dénominateur $a + b + c + d + e$, en substituant les valeurs des puissances de f, de g, de h, & de l dans la suite des operations que voici marquées. $\overline{a+b+c+d+e} \times \overline{a+b+c-d-e} \times \overline{-f^2 + 2ab + 2ac + 2bc + 2de} - 8abc \times \overline{a+b+c+d+e}$ plus tout le produit précedent multiplié par $-g^4 + 4f^2de + 8abc \times \overline{d+e}$; plus tout le produit qui précede multiplié par $h^8 + 8l^6de$; & après les substitutions on ne commencera la suite de produits que par $\overline{a+b+c-d-e} \times \overline{-f^2 + 2ab}$ &c. & l'on aura le multiplicateur qu'on cherchoit.

REMARQUES.

I.

On a donné le signe $+$ à tous les termes du dénominateur qui contient une suite d'incommensurables; mais il est évident que la methode est la même quand les signes sont $-$, ou mêlez de $+$ & de $-$, & qu'on peut représenter tous les dénominateurs, qui ont une suite d'incommensurables, par $a + b + c + d + e$ &c. en supposant que les signes $+$ représentent les signes $+$ ou $-$ des dénominateurs particuliers; par exemple, $a + b + c$ peut représenter $\sqrt[2]{5} - \sqrt[2]{3} - \sqrt[2]{2}$, en supposant que $+ b$ représente $- \sqrt[2]{3}$, & $+ c = - \sqrt[2]{2}$. Il faut seulement prendre garde dans les produits aux signes $+$ ou $-$ que doivent avoir les termes des produits par rapport à la supposition que $+ b + c$ représentent $- \sqrt[2]{3} - \sqrt[2]{2}$.

2.

2.

On peut continuer d'appliquer la methode aux dénominateurs qui ont plus de cinq termes ; mais dans la pratique cela eſt aſſez inutile ; car ces cas là n'arrivent preſque jamais.

On verra , vers la fin du Problême ſuivant l'uſage de ce 3ᵉ Problême pour la diviſion des ſuites d'incommenſurables.

3.

471. On pourroit étendre la methode du 3ᵉ Problême à ôter les incommenſurables des fractions dont le dénominateur eſt une ſuite de termes incommenſurables, leſquels ont tous le ſigne $\sqrt[3]{}$, ou $\sqrt[4]{}$, ou $\sqrt[5]{}$, &c.

Mais cela ne pouvant gueres être d'uſage que dans l'analyſe où ces cas là n'arrivent encore que très rarement , & l'analyſe elle-même fourniſſant des methodes plus aiſées que celles qu'on pourroit mettre ici, il ſuffira de donner la methode pour délivrer d'incommenſurables les dénominateurs des fractions , qui n'ont chacun que deux termes incommenſurables avec le ſigne $\sqrt[3]{}$, ou $\sqrt[4]{}$, ou $\sqrt[5]{}$, &c.

Par exemple , pour trouver le multiplicateur qui doit ſervir à ôter les incommenſurables de $\frac{1}{a+b}$, en ſuppoſant que a & b repréſentent des incommenſurables avec le ſigne $\sqrt[3]{}$; il faut multiplier $a + b$ par le multiplicateur $\overline{a - b}$, non pas pris lineaire , mais élevé à la 2ᵉ puiſſance ; c'eſt à dire, il faut multiplier $a + b$ par $a^2 - 2ab + b^2$, & l'on aura le produit $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$.

On remarquera que ſi on ajoutoit le produit de $a + b$ par $+ ab$, on auroit $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 + a^2b + ab^2 = a^3 + b^3$ qui ne contient plus d'incommenſurables.

Cela fait voir que pour ôter les incommenſurables du dénominateur de $\frac{1}{a+b}$, il faut ſe ſervir du multiplicateur $a^2 - ab + b^2$, & que ce multiplicateur eſt la formule que l'on cherchoit . Par exemple , pour ôter les incommenſurables du dénominateur de $\frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}$, il faut ſuppoſer $a = \sqrt[3]{3}$, & $b = \sqrt[3]{2}$, & l'on aura $a^2 - ab + b^2 = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$. Il

faut multiplier les deux termes de $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$ par $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}$ $+\sqrt[3]{4}$, & l'on aura $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3+2=5}$.

Pour trouver le multiplicateur qui doit servir à ôter les incommensurables du dénominateur de $\frac{1}{a+b}$, en supposant que a & b représentent deux incommensurables avec le signe $\sqrt[4]{}$, il faut multiplier $a+b$ par le multiplicateur $a-b$ élevé à la 3e puissance; c'est à dire, par $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, & l'on trouvera le produit $a^4-2a^3b+2ab^3-b^4$.

On remarquera que lui ajoutant le produit $\overline{a+b}\times\overline{+2a^2b-2ab^2}=+2a^3b+2a^2b^2-2a^2b^2-2ab^3$, on aura le produit a^4-b^4 où il n'y a plus d'incommensurables. Ce qui fait voir que le multiplicateur ou la formule qu'on cherche est $a^3-a^2b+ab^2-b^3$.

On trouvera de même que $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$; $a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5$, $a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6$; & ainsi de suite, sont les formules des multiplicateurs qui doivent servir à délivrer d'incommensurables le dénominateur de $\frac{1}{a+b}$, en supposant que $a+b$ représente successivement deux incommensurables avec le signe $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[6]{}$, $\sqrt[7]{}$, &c.

4.

472. Quand les formules sont trouvées, on peut, pour mieux représenter les incommensurables, mettre les signes radicaux dans la fraction generale qui représente toutes les fractions particulieres dont les dénominateurs ont une suite d'incommensurables, & marquer aussi les signes radicaux devant les termes des formules. Par exemple, $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ représentera toutes les fractions dont le dénominateur est de deux termes incommensurables avec le signe $\sqrt[3]{}$, & $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ représentera la formule qui doit servir à ôter les incommensurables du dénominateur de ces fractions: il en est de même des autres.

La démonstration du 3[e] Problême est évidente par les operations mêmes que l'on a faites pour le résoudre, & par les remarques qui servent de préparation à la résolution.

La division des suites d'incommensurables.

PROBLÊME IV.

473. *DIVISER une suite d'incommensurables soit par une grandeur commensurable, soit par une autre suite d'incommensurables : les exposans des signes radicaux doivent être les mêmes dans le dividende & dans le diviseur.*

Regle ou Operation. Il faut faire la division comme celle des grandeurs litterales complexes, observant * la regle des signes + & — de la division, & * les regles de la division des incommensurables qui n'ont qu'un signe radical, comme on le verra dans les exemples suivans. * 139. * 440.

EXEMPLES.

I.

Où le diviseur est commensurable.

Dividende $\sqrt[2]{8} + \sqrt[2]{48} - \sqrt[2]{50}$ ($2 = \sqrt[2]{4}$ diviseur.
$\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{12} - \sqrt[2]{\frac{50}{4}}$ quotient.

Le même Exemple où les incommensurables sont réduites à leur plus simple expression.

$2\sqrt[2]{2} + 4\sqrt[2]{3} - 5\sqrt[2]{2} = -3\sqrt[2]{2} + 4\sqrt[2]{3}$ (2 diviseur.
$-\frac{1}{2}\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{3}$ quot.

EXEMPLE II.

Où le diviseur n'a qu'un seul terme, lequel est incommensurable.

$3\sqrt[3]{15} - 2\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{35}$ ($2\sqrt[3]{5}$
$\frac{3}{2}\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\frac{17}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{7}$

EXEMPLE III.

$a\sqrt[2]{ab} - \frac{a^2}{b}\sqrt[2]{bc} - \frac{ac}{b}\sqrt[2]{cd}$ ($a\sqrt[2]{b}$
$\sqrt[2]{a} - \frac{a}{b}\sqrt[2]{c} - \frac{c}{b}\sqrt[2]{\frac{cd}{b}}$.

Dans les Exemples suivans le diviseur est une suite d'incommensurables.

EXEMPLE IV.

$$\begin{array}{l|l} 4\sqrt{12}-16\sqrt{30}+6\sqrt{18}-6\sqrt{14}+24\sqrt{35}-9\sqrt{21} & 2\sqrt{2}-8\sqrt{5}+3\sqrt{3} \\ & \overline{2\sqrt{6}-3\sqrt{7}} \end{array}$$

EXEMPLE V.

$$\left.\begin{array}{l} a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b} \\ \quad +2a\sqrt{b}+b\sqrt{a} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \sqrt{a}+\sqrt{b} \\ \hline a+2\sqrt{ab}+b \end{array}$$

Quand le dividende & le diviseur contiennent des grandeurs incommensurables litterales, il faut ordonner l'un & l'autre par rapport à une même lettre, écrivant pour premier terme celui qui contient la plus haute puissance de cette lettre, pour second terme celui qui contient la puissance immédiatement moindre, & ainsi de suite : comme on le voit dans ce 5e Exemple.

Ensuite on dira le quotient de $a\sqrt{a}$ divisé par $\sqrt{a}$ est a; il faut écrire a au quotient; écrire o sous $a\sqrt{a}$ dans le dividende; multiplier $+\sqrt{b}$ par le quotient a; retrancher le produit $a\sqrt{b}$ de $+3a\sqrt{b}$, & écrire au dessous le reste $+2a\sqrt{b}$, qu'il faut réduire à $+2\sqrt{a^2b}$ afin de continuer la division.

On dira ensuite le quotient de $+2a\sqrt{b}=+2\sqrt{a^2b}$ divisé par $\sqrt{a}$ est $+2\sqrt{ab}$; il faut écrire $+2\sqrt{ab}$ au quotient, marquer o au dividende sous $+2a\sqrt{b}$, multiplier $+\sqrt{b}$ par $+2\sqrt{ab}$, retrancher le produit $+2b\sqrt{a}$ de $3b\sqrt{a}$, & écrire le reste $+b\sqrt{a}$.

Enfin on dira le quotient de $+b\sqrt{a}$ divisé par $\sqrt{a}$ est $+b$; il faut écrire $+b$ au quotient, marquer o au dividende sous $+b\sqrt{a}$, multiplier $+\sqrt{b}$ par $+b$; retrancher le produit $+b\sqrt{b}$ de $+b\sqrt{b}$ dans le dividende; & comme il ne reste rien, le quotient $a+2\sqrt{ab}+b$ est exact.

Voici l'exemple de la division du même dividende par $a+2\sqrt{ab}+b$.

$$\left.\begin{matrix} a\sqrt[2]{a} + 3a\sqrt[2]{b} + 3b\sqrt[2]{a} + b\sqrt[2]{b} \\ + a\sqrt[2]{b} + 2b\sqrt[2]{a} \end{matrix}\right\} \frac{a + 2\sqrt[2]{ab} + b}{\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}}$$

REMARQUE.

474. QUE le dividende ait plusieurs termes incommensurables ou qu'il n'ait qu'un seul terme, & que ce seul terme soit commensurable ou incommensurable, cela ne met pas de difficulté à faire la division. Quand le diviseur n'a qu'un seul terme, que ce terme soit commensurable ou incommensurable, la division est toujours facile, & elle se fait exactement, comme on l'a vû dans les trois premiers exemples. Toute la difficulté de la division des suites d'incommensurables ne vient que de ce que le diviseur contient plusieurs termes incommensurables. Voici la methode pour faire ces divisions.

Methode pour la division des suites d'incommensurables quand le diviseur est une suite d'incommensurables.

475. IL faut regarder le dividende & le diviseur comme une fraction dont le premier est le numerateur, & le second le dénominateur : chercher * par le 7e Problême (qui n'est que pour ceci) le multiplicateur propre à délivrer d'incommensurables le dénominateur. Multiplier par ce multiplicateur le dividende & le diviseur, ce qui donnera une nouvelle fraction * égale à celle du dividende & du diviseur; & son dénominateur étant commensurable, on fera la division de son numerateur par son dénominateur; & le quotient sera évidemment celui que l'on cherche: car il aura * le même rapport à l'unité qu'a le dividende proposé au diviseur proposé. * 470. * 75. * 106.

Par exemple, s'il faut diviser $3\sqrt[2]{5} + 4\sqrt[2]{7}$ par $4\sqrt[2]{3} - 3\sqrt[2]{2}$, on supposera la fraction $\frac{3\sqrt[2]{5} + 4\sqrt[2]{7}}{4\sqrt[2]{3} - 3\sqrt[2]{2}}$, on multipliera les deux termes * par $4\sqrt[2]{3} + 3\sqrt[2]{2}$, & l'on trouvera * 470.
$\frac{12\sqrt[2]{15} - 9\sqrt[2]{10} + 16\sqrt[2]{21} - 12\sqrt[2]{14}}{30} = \frac{3\sqrt[2]{5} + 4\sqrt[2]{7}}{4\sqrt[2]{3} - 3\sqrt[2]{2}}$: on

fera enſuite la diviſion, & le quotient qu'on cherche ſera en réduiſant les fractions aux moindres termes $\frac{2}{5}\sqrt{15} - \frac{1}{10}\sqrt{10} + \frac{8}{15}\sqrt{21} - \frac{2}{5}\sqrt{14}$.

S'il faut diviſer 12 par $\sqrt{7} - \sqrt{3}$, on ſuppoſera $\frac{12}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$, on multipliera les deux termes par $\sqrt{7} + \sqrt{3}$, & l'on trouvera $\frac{12\sqrt{7} + 12\sqrt{3}}{4}$, on fera enſuite la diviſion, & le quotient qu'on cherche ſera $3\sqrt{7} + 3\sqrt{3}$.

De même pour diviſer $a - b$ par $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, on ſuppoſera la fraction $\frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$; on multipliera les deux termes par $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, & l'on aura $\frac{\overline{a - b} \times \overline{\sqrt{a} + \sqrt{b}}}{a - b}$; on fera enſuite la diviſion, & le quotient qu'on cherche ſera $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Ces exemples ſuffiſent pour faire clairement concevoir la methode, & en même temps l'uſage du 3e Problême.

La Diviſion, lorſqu'il y a des incommenſurables imaginaires.

476. LA diviſion eſt ſemblable à celle des grandeurs complexes;
*139. il y faut obſerver * la regle des ſignes + & — de la diviſion,
*444. & ce qu'il y a de particulier * à la diviſion des imaginaires. Il ſuffira d'en mettre ici des exemples où l'on diſtinguera par une ligne ponctuée le dividende d'avec les reſtes particuliers que l'on ajoute au dividende dans la pratique de la diviſion.

EXEMPLE I.

					Diviseur / quotient
Divid.	$x^4 - 2j^2x^2$	$+ 2jk^2x$	$+ j^4$		$x - j - \sqrt{-k^2}$ diviſeur.
	$+ k^2x^2$	$- 2jl^2x$	$+ j^2k^2$		$x^3 + jx^2 \quad - j^2x \quad - j^3$ quot
	$+ l^2x^2$		$+ j^2l^2$		$+ x^2\sqrt{-k^2} + 2jx\sqrt{-k^2} + j^2\sqrt{-k^2}$
			$+ k^2l^2$		$+ l^2x \quad + jl^2$
					$+ l^2\sqrt{-k^2}$
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .		
$+ jx^3$	$- j^2x^2$	$- j^3x$	$+ j^3\sqrt{-k^2}$		
$+ x^3\sqrt{-k^2}$	$+ 2jx^2\sqrt{-k^2}$	$+ j^2x\sqrt{-k^2}$	$+ jl^2\sqrt{-k^2}$		
		$- jl^2x$			
		$+ l^2x\sqrt{-k^2}$			

EXEMPLE II.

dividende.

$$x^3 + jx^2 \quad - j^2x \quad - j^3$$
$$+ x^2\sqrt[2]{-k^2} + 2jx\sqrt[2]{-k^2} + j^2\sqrt[2]{-k^2}$$
$$+ l^2x \quad - jl^2$$
$$+ l^2\sqrt[2]{-k^2}$$

$$x^2 + x\sqrt[2]{-k^2} - j^2 \quad \text{diviseur.}$$
$$- x\sqrt[2]{-l^2} + j\sqrt[2]{-k^2}$$
$$+ j\sqrt[2]{-l^2}$$
$$- \sqrt[2]{-k^2} \times \sqrt[2]{-l^2}$$

$$x + j + \sqrt[2]{-l^2} \quad \text{quotient.}$$

. . . .

$$+ x^2\sqrt[2]{-l^2} + jx\sqrt[2]{-k^2} \quad - j^2\sqrt[2]{-l^2}$$
$$- jx\sqrt[2]{-l^2} \quad - j\sqrt[2]{-k^2} \times \sqrt[2]{-l^2}$$
$$+ x\sqrt[2]{-k^2} \times \sqrt[2]{-l^2}$$

EXEMPLE III.

dividende.

$$x^2 + x\sqrt[2]{-k^2} - j^2$$
$$- x\sqrt[2]{-l^2} + j\sqrt[2]{-k^2}$$
$$+ j\sqrt[2]{-l^2}$$
$$- \sqrt[2]{-k^2} \times \sqrt[2]{-l^2}$$

$$x - j + \sqrt[2]{-k^2} \quad \text{diviseur.}$$

$$x + j - \sqrt[2]{-l^2} \quad \text{quotient.}$$

. . . .

$$+ jx$$

La Division des incommensurables complexes qui ont des incommensurables parmi leurs termes.

477. POUR diviser une incommensurable complexe $ab\sqrt[2]{ac + ad + bc + bd}$

*441. par une autre $a\sqrt[2]{a + b}$; il est évident * qu'il faut diviser, 1°, la grandeur ab qui est hors du signe par a qui est hors du signe, ce qui donne le quotient b; 2°, diviser la grandeur $ac + ad + bc + bd$ qui est sous le signe par $a + b$, ce qui donne le quotient $c + d$; 3°, & écrire pour quotient $b\sqrt[2]{c + d}$. Lorsque les incommensurables complexes contiennent sous le signe des incommensurables parmi leurs

termes, la division se doit faire de la même maniere, en
* 440. & les art. suivans. observant ce qui est de particulier * dans la division d'une incommensurable par une autre grandeur commensurable, ou incommensurable.

EXEMPLE I.

PAR exemple, si l'on propose de faire la division de $a^2\sqrt[2]{ac - a\sqrt[2]{bc} - bc + c\sqrt[2]{bc}}$ par $a\sqrt[2]{a + \sqrt[2]{bc}}$; on divisera, 1°, a^2 par a, & l'on aura le quotient a; 2°, on divisera $ac - a\sqrt[2]{bc} - bc + c\sqrt[2]{bc}$ par $a + \sqrt[2]{bc}$, & l'on trouvera le quotient $c - \sqrt[2]{bc}$; 3°, il faut écrire pour le quotient qu'on cherche $a\sqrt[2]{c - \sqrt[2]{bc}}$.

EXEMPLE II.

ON trouvera de la même maniere, en divisant $ab\sqrt[n]{a + \sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{a^{n-1}c} + \sqrt[n]{bc}}$ par $a\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{b}}$ que le quotient est $b\sqrt[n]{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{c}}$.

EXEMPLE III.

SI l'on vouloit diviser la grandeur (C.) $x^3 - px + q$ par la grandeur (B) $x - \overset{F}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}} - \overset{G}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}}$.
Pour abreger le calcul on supposeroit l'incommensurable complexe F $= a$, & l'incommensurable complexe G $= b$, & l'on changeroit par ce moyen le diviseur B en $B.\ x - a - b$.

dividende (C) $x^3 - px + q$	(B.) $x - a - b$ diviseur.
$\overset{\circ}{+ax^2} \quad \overset{\circ}{+a^2x} - ap$	(A.) $x^2 + ax - p$ quotient.
$\overset{\circ}{+bx^2} \quad \overset{\circ}{+2abx} - bp$	$+bx + a^2$
$\overset{\circ}{+b^2x} \quad + a^3$	$+2ab$
$+3a^2b$	$+b^2$
$+3ab^2$	
$+b^3$	

On feroit ensuite la division, & l'on trouveroit le quotient

tient A, & le reste $+q - ap - bp + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

En substituant dans ce reste les valeurs de $a^3 + b^3 = -q$, comme on l'a fait voir dans le 8e Exemple de l'article 469, & les valeurs de $+3a^2b + 3ab^2 = +ap + bp$, comme on l'a montré dans le même endroit ; tout ce reste entier se trouveroit égal à zero, toutes les grandeurs dont il est composé se détruisant par des signes + & — opposez, aprés les substitutions. Ainsi on trouveroit que le quotient A est exact.

On substitueroit ensuite dans ce quotient les valeurs de a, de b, & celles de a^2, de $2ab$ & de b^2, ces dernieres ont été prises pour les Exemples 5e, 6e & 7e de l'article 469. Et aprés ces substitutions les quotient A se trouveroit changé en la grandeur A du 8e Exemple de l'article 469 ; & cette grandeur A seroit le quotient qu'on vouloit trouver de la grandeur C divisée par la grandeur B.

La formation des puissances des suites d'incommensurables & des incommensurables complexes qui ont des incommensurables parmi leurs termes.

478. LA formation des puissances de toutes les grandeurs, & par consequent de toutes les grandeurs incommensurables, * se fait par la multiplication réiterée de la grandeur qu'on veut élever à une puissance dont l'exposant est donné. On peut aussi se servir des formules des puissances de l'art. 160, comme on l'a enseigné dans les articles 171 & les suivans. C'est pourquoi les Commençans pourront eux-mêmes élever telle suite d'incommensurables qu'ils voudront, & telles incommensurables complexes qui ont des incommensurables parmi leurs termes, qui pourront se présenter, à une puissance donnée quelconque ; puisqu'il ne faut employer que la multiplication de ces sortes de grandeurs, qu'on leur a enseignée. Il est inutile de grossir ce Traité des ces calculs qui ne leur apprendroient rien de nouveau.

* 143 & 159.

Remarque sur l'extraction des racines des suites d'incommensurables.

479. L'EXTRACTION des racines des suites d'incommensurables n'est gueres d'usage que dans l'analyse. Cette science fournit une methode facile & generale pour faire l'extraction des racines de telle suite qu'on voudra d'incommensurables.

On trouvera cette methode expliquée *dans la derniere Section du cinquiéme Livre de l'Analyse démontrée*, *page* 257. On ne sçauroit donner ici que des methodes particulieres pour les suites de deux termes incommensurables, de trois termes, de quatre termes, &c. Ces methodes seroient même difficiles à démontrer sans se servir de l'analyse. On a cru qu'il seroit inutile d'en prolonger ce Traité. On se contentera de mettre la methode pour extraire la racine quarrée des binomes, comme de $5 + 2\sqrt[2]{6}$, dont les signes radicaux ont pour exposant 2. Voici le principe de cette methode.

480. Si l'on éleve un binome $\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$ à la 2e puissance, on trouvera le binome $a + b + 2\sqrt[2]{ab}$. Cela fait voir que dans toute seconde puissance d'un binome, laquelle n'a aussi que deux termes, l'un des termes $a + b$ est la somme des quarrez des deux termes du binome qui en est la racine, & que l'autre terme $2\sqrt[2]{ab}$ est le double du produit des deux termes $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[2]{b}$ du binome qui en est la racine.

Mais les quarrez $a + b$ des deux termes de la racine $\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$ qui paroissent distinguez dans le quarré $a + b + 2\sqrt[2]{ab}$, sont d'ordinaire confondus ensemble, comme dans $5 + 2\sqrt[2]{6}$ qui est le quarré de $\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{3}$. C'est pourquoi la formule $a + b + 2\sqrt[2]{ab}$ ne peut pas suffire telle qu'elle est pour donner une regle generale de l'extraction des racines 2es des binomes. Voici ce qu'il y faut ajouter.

Si l'on prend le quarré $a^2 + 2ab + b^2$ du premier terme $a + b$, & qu'on en ôte le quarré $4ab$ du second terme $2\sqrt[2]{ab}$, on aura $a^2 - 2ab + b^2$ qui est le quarré de $a - b$ difference des quarrez a & b des deux termes $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[2]{b}$ de la racine.

Si lon prend $a - b$ racine 2e de $a^2 - 2ab + b^2$, & que, 1°, on l'ajoute au 1er terme $a + b$ du binome $a + b + 2\sqrt[2]{ab}$, on trouvera $2a$, dont la moitie a sera le quarré du 1er terme de $\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$ 2°. Si l'on retranche $a - b$ de $a + b$. l'on trouvera $2b$, dont la moitie b sera le quarré du second terme $\sqrt[2]{b}$ de $\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$.

On déduit de-là cette *regle pour l'extraction de la racine quarrée des binomes*.

481. Pour tirer la racine quarrée d'un binome comme $7 + \sqrt[2]{48}$, 1°, il faut ôter le quarré du moindre terme du quarré du plus grand terme, & prendre la racine quarrée du reste. (Dans cet exemple il faut ôter 48 quarré de $\sqrt[2]{48}$ du quarré 49 du plus grand terme 7, & prendre 1 qui est la racine quarrée du reste 1.)

2°. Il faut ajouter cette racine 2ᵉ du reste au plus grand terme, ce qui donnera une somme, & retrancher cette même racine du même plus grand terme, ce qui donnera un reste. (Dans cet exemple il faut ajouter 1 à 7, & la somme sera 8, & retrancher 1 de 7, & le reste sera 6.)

3°. Il faut prendre séparément la racine 2ᵉ de la moitié de la somme & de la moitié du reste, & faire un binome de ces deux racines, en les joignant avec le même signe + ou — qui joint les deux termes du binome dont on cherche la racine; ce binome sera la racine qu'on demande. (Dans cet exemple on prendra 2 racine 2ᵉ de 4 moitié de la somme 8, & $\sqrt[2]{3}$ racine 2ᵉ de 3 moitié du reste 6; & l'on aura $2 + \sqrt[2]{3}$ pour la racine 2ᵉ de $7 + \sqrt[2]{48}$)

EXEMPLES.

POUR tirer la racine quarrée de $y + a - 2\sqrt[2]{ay}$, 1°, on ôtera de $y^2 + 2ay + a^2$ quarré du 1ᵉʳ terme $y + a$; le quarré $4ay$ du second terme $- 2\sqrt[2]{ay}$; & l'on trouvera le reste $y^2 - 2ay + a^2$, on prendra $y - a$ racine 2ᵉ du reste $y^2 - 2ay + a^2$. 2°. On ajoutera $y - a$ à $y + a$, & la somme sera $2y$, sa moitié sera y. On ôtera $y - a$ de $y + a$; le reste sera $+ 2a$, sa moitié a. 3°. L'on prendra les racines $\sqrt[2]{y}$, $\sqrt[2]{a}$ de ces moitiez, & l'on écrira $\sqrt[2]{y} - \sqrt[2]{a}$ pour la racine que l'on cherche.

Pour trouver la racine quarrée de $m^2 + \frac{px^2}{m} + x\sqrt{4pm}$, 1°, on ôtera $4pmx^2$ de $m^4 + 2mpx^2 + \frac{p^2x^4}{m^2}$, & l'on prendra $m^2 - \frac{px^2}{m}$ racine 2ᵉ du reste. 2°. On ajoutera $m^2 - \frac{px^2}{m}$ à $m^2 + \frac{px^2}{m}$, & on l'en retranchera; m^2 sera la moitié de la somme, & $\frac{px^2}{m}$ la moitié du reste. 3°. On prendra les racines 2ᵉˢ de ces moitiez, & on les écrira ainsi $m + x\sqrt[2]{\frac{p}{m}}$. Ce sera la racine qu'on cherchoit.

Pour extraire la racine 2ᵉ de $- 1 + \sqrt[2]{-8}$, 1°, on ôtera $- 8$ quarré de $+ \sqrt[2]{-8}$ de $+ 1$ quarré de $- 1$, ce qui donnera $+ 9$, dont on prendra la racine 2ᵉ qui est $+ 3$. 2°. On ajoutera $+ 3$ au terme $- 1$, & la somme sera $+ 2$, sa moitié est $+ 1$. On ôtera $+ 3$ du même terme $- 1$, & l'on aura $- 4$, sa moitié est $- 2$. 3°. On prendra les racines 2ᵉˢ de ces moitiez; ces racines sont $+ 1$, $\sqrt[2]{-2}$, & l'on aura $+ 1 + \sqrt[2]{-2}$ pour la racine qu'on cherche.

Pour avoir la racine 2ᵉ de $4\sqrt[2]{2} - 2\sqrt[2]{6}$, 1°, on ôtera 24

quarré de $-2\sqrt[2]{6}$, de 32 quarré de $4\sqrt[2]{2}$, & le reste sera 8; on en prendra la racine 2ᵉ qui est $2\sqrt[2]{2}$. 2°. On ajoutera cette racine à $4\sqrt[2]{2}$, la somme sera $6\sqrt[2]{2}$, sa moitié sera $3\sqrt[2]{2}$. On ôtera cette même racine $2\sqrt[2]{2}$, de $4\sqrt[2]{2}$, le reste sera $2\sqrt[2]{2}$, sa moitié sera $1\sqrt[2]{2}$. 3°. On prendra les racines 2ᵉˢ de ces moitiez; ces racines sont $\sqrt[2]{\overline{3\sqrt[2]{2}}} = \sqrt[4]{18}$, $\sqrt[2]{\overline{1\sqrt[2]{2}}} = \sqrt[4]{2}$. On écrira $\sqrt[4]{18} - \sqrt[4]{2}$ pour la racine qu'on cherche.

On peut par la même regle trouver la racine d'un quadrinome comme $\overline{10 + \sqrt[2]{24} + \sqrt[2]{40} + \sqrt[2]{60}}$, (ou en le réduisant à la plus simple expression) de $\overline{10 + 2\sqrt[2]{6}} + \overline{2\sqrt[2]{10} + 2\sqrt[2]{15}}$, en le considerant comme un binome, dont on distinguera les deux termes par une ligne sur chacun. 1°. On ôtera le quarré du second terme $\overline{2\sqrt[2]{10} + 2\sqrt[2]{15}}$ qui est (en le réduisant à sa plus simple expression) $100 + 40\sqrt[2]{6}$, du quarré du premier terme $10 + 2\sqrt[2]{6}$ qui est $124 + 40\sqrt[2]{6}$, ce qui donnera 24, dont on prendra la racine 2ᵉ qui est $2\sqrt[2]{6}$. 2°. On ajoutera $2\sqrt[2]{6}$ au premier terme $10 + 2\sqrt[2]{6}$; la somme sera $10 + 4\sqrt[2]{6}$, sa moitié sera $5 + 2\sqrt[2]{6}$. On ôtera $2\sqrt[2]{6}$ du même premier terme; le reste sera 10, sa moitié sera 5. 3°. On prendra les racines 2ᵉˢ de ces moitiez, & l'on trouvera par la regle des
* 481. binomes * que $\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{3}$ est la racine 2ᵉ de $5 + 2\sqrt[2]{6}$, & la racine 2ᵉ de 5 est $\sqrt[2]{5}$. On écrira $\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{5}$ pour la racine 2ᵉ du quadrinome proposé.

REMARQUE.

482. QUAND on ne peut pas trouver par la regle la racine quarrée d'un binome, ou quand on trouve pour cette racine une expression plus composée que n'est le binome proposé, on se contente d'écrire $\sqrt[2]{}$ au devant du binome pour marquer la racine 2ᵉ de ce binome. Par exemple, pour extraire la racine 2ᵉ de $+\frac{1}{2}n - \sqrt[2]{\frac{1}{4}n^2 - p}$, il suffit d'écrire $\sqrt[2]{\frac{1}{2}n - \sqrt[2]{\frac{1}{4}n^2 - p}}$.

La démonstration de la regle est clairement contenue dans
* 480. le principe * dont on l'a déduite.

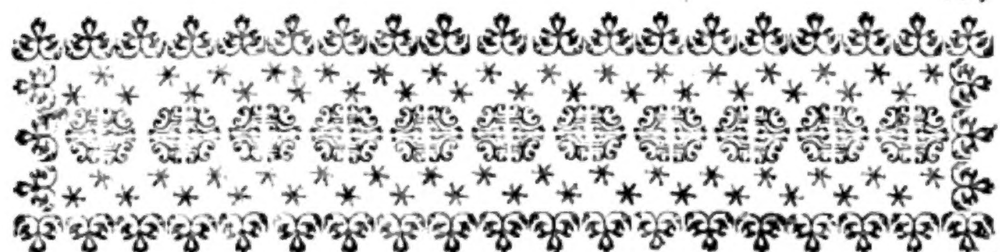


TABLE DES SECTIONS.

LIVRE I.

Du Calcul des grandeurs entieres.

SECTION I. *Des noms des principales Propositions dont on se sert dans les Mathematiques, les Axiomes generaux de ces Sciences, dont on déduira les premieres Regles du Calcul, & enfin la division de ce Traité.* Page 1

SECT. II. *De l'Addition & de la Soustraction des grandeurs entieres.* 37

SECT. III. *De la Multiplication des grandeurs entieres.* 50

SECT. IV. *De la Division des grandeurs entieres.* 79

SECT. V. *De la composition ou de la formation des Puissances des grandeurs entieres.* 125

SECT. VI. *De la résolution des Puissances numeriques & litterales, ce qu'on nomme aussi l'extraction des racines.* 166

LIVRE II.

Du Calcul des grandeurs rompues, qu'on nomme aussi fractions : des comparaisons des rapports simples ; des rapports composez ; & du calcul des grandeurs incommensurables.

SECTION I. *Des grandeurs simples ou premieres, & des grandeurs composées ; la methode de trouver le plus grand diviseur commun à deux & à plusieurs grandeurs, & la methode de trouver tous les diviseurs d'une grandeur composée.* 215

SECT. II. *Des réductions des grandeurs rompues.* 253

SECT. III. *De l'Addition, Soustraction, Multiplication,*

Division des fractions, de la formation de leurs puissances, & de l'extraction de leurs racines. 274

SECT. IV. *Sur les comparaisons des rapports geometriques, où sont expliquées les proportions des grandeurs en general.* 315

SECT. V. *Des rapports composez.* 338

SECT. VI. *Du calcul des incommensurables simples, ou qui n'ont qu'un signe radical.* 372

SECT. VII. *Du calcul des suites d'incommensurables.* 410

Fin de la Table.